ΓΝΩΣΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ

Ιωάννης Πατέρας
Μαθηματικός στο Μουσικό Σχολείο Τρικάλων
pat-j@otenet.gr

Περίληψη
Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε την κατανόηση του απείρου με την θεωρία της ενσώματης γνώσης των μαθηματικών, έτσι όπως την προσεγγίζουν οι γνωστικοί επιστήμονες G. Lakoff και R. Nunez μέσα από το βιβλίο τους ΄΄**Where Mathematics Comes From**΄΄. Με μια πρόταση για την θεωρία τους θα λέγαμε: ΄΄ **Σχήματα** ΄΄ **που δημιουργούνται μέσω της σωματικής μας εμπειρίας, συνεισφέρουν στην συγκρότηση αφηρημένων (μαθηματικών) εννοιών μέσω του μηχανισμού της μεταφοράς**.
Οι Lakoff και Nunez επιχειρούν μέσα από το βιβλίο τους να μας πείσουν ότι και οι πιο δύσκολες μαθηματικές έννοιες, όπως για παράδειγμα το πραγματικό άπειρο, μπορούν να κατανοηθούν με την θεωρία της ενσώματης γνώσης.

Εισαγωγή
Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί μια νέα επιστήμη, η γνωσιακή επιστήμη, η οποία έχει προσφέρει νέες θεωρίες και νέες μεθοδολογίες για την αντιμετώπιση των ζητημάτων που έχουν σχέση με τα γενικότερα φαινόμενα της γνώσης και της νόησης. Το κύριο χαρακτηριστικό της γνωσιακής επιστήμης είναι η διεπιστημονικότητα.
Σε αυτήν βασίζεται να λύσει ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που έχει ως τώρα να αντιμετωπίσει ο άνθρωπος, το πρόβλημα της κατανόησης του ανθρώπινου νου[1]. Η συνειδητοποίηση από μέρους των ερευνητών της ψυχολογίας, της γλωσσολογίας, της επιστήμης των Η/Υ, της φιλοσοφίας και νευροεπιστήμης ότι το ερώτημα για την φύση της ανθρώπινης διάνοιας είναι κοινό, οδήγησε στην δημιουργία ενός νέου διεπιστημονικού πεδίου με το όνομα γνωσιακή επιστήμη (cognitive science).

[1] Βοσνιάδου. Σ. Γνωσιακή επιστήμη: Η νέα επιστήμη του Νου

Αυτή η διεπιστημονικότητα είχε ως αποτέλεσμα να αναγνωριστεί από την μαθηματική κοινότητα, αλλά και από την γνωστική ψυχολογία (Lakoff και Nunez 1997), την νευροβιολογία (Edelman 1996), την Γλωσσολογία και άλλες επιστήμες, ότι η εκμάθηση και η πρακτική ενασχόληση με τα μαθηματικά, έχει απελευθερωθεί από το στενό πλαίσιο της διανοητικής δραστηριότητας.
Σήμερα, στο πλαίσιο της γνωσιακής επιστήμης όλες αυτές οι επιστήμες διερευνούν την γνωστική λειτουργία ως ένα φυσικό ενσώματο φαινόμενο που πραγματοποιείται στην βάση λειτουργιών του σώματος.
Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών όπως την προσεγγίζουν οι γνωστικοί επιστήμονες Lakoff και Nunez (Lakoff και Nunez 2000). Συγκεκριμένα επιλέγουν να κάνουν μια ανάλυση της θεωρίας τους μέσα από το σημαντικό έργο του Cantor για την απαρίθμηση των άπειρων συνόλων.
Για τον σκοπό αυτό στην αρχή του άρθρου αυτού θα παρουσιάσω συνοπτικά κάποια βασικά στοιχεία από το έργο του Cantor πάνω στα άπειρα σύνολα.

Cantor – Κατηγορίες συνόλων

Ο Cantor το 1883 στο έργο του «*Gesammelte Abhandkungen*» *δ*ίνει τον εξής ορισμό για την έννοια του συνόλου: *« Σύνολο είναι μια πολλαπλότητα που μπορούμε να την αντιληφθούμε ως ενότητα»*[2]. Πράγματι μια από τις βασικές ιδιότητες της ανθρώπινης νόησης είναι η ικανότητα που έχουμε να αντιλαμβανόμαστε σύνολα. Αυτό φαίνεται απλό όσον αφορά σύνολα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Όταν όμως σκεφτούμε σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων ανακύπτουν σοβαρά ερωτήματα, όπως :
Πώς είναι δυνατόν εμείς όντα με πεπερασμένες εμπειρίες, περιορισμένοι από τις συγκεκριμένες πεπερασμένες δυνατότητες του σώματός μας και του εγκεφάλου μας, να έχουμε αντίληψη του άπειρου;
Ένα από τα βασικά προβλήματα του 19^{ου} αιώνα ήταν ο προσδιορισμός του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με άπειρα κυρίως στοιχεία. Για να λύσει αυτό το πρόβλημα βασίστηκε στην ιδέα του ζευγαρώματος των στοιχείων δυο συνόλων. Συγκεκριμένα αν δυο πεπερασμένα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων τότε υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους. Αλλά και αντίστροφα όταν υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων δυο πεπερασμένων συνόλων τότε αυτά έχουν το ίδιο

[2] Rudy Rucker, R. Το Άπειρο και ο Νους.

πλήθος στοιχείων. Το πλήθος στοιχείων του συνόλου το ονομάζουμε δύναμη του συνόλου ή πληθικό αριθμό του συνόλου (πληθάριθμος). Ο Cantor επεξέτεινε αυτήν την ιδέα της ένα προς ένα αντιστοιχίας στα απειροσύνολα, αξιοποιώντας προηγηθείσες εργασίες των Bolzano και Dedekind. Συγκεκριμένα ο Dedekind είχε ορίσει την έννοια του απειροσυνόλου ως εξής:
Ένα σύνολο S έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, αν και μόνο αν υπάρχει γνήσιο υποσύνολό του A έτσι ώστε να ορίζετε μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των A και S.
Ο Cantor γενίκευσε αυτή την διατύπωση ορίζοντας ότι: *Όταν δυο σύνολα πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους στοιχείων μπορούν να τεθούν σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία τότε έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.* Τα δυο σύνολα τότε λέμε ότι έχουν την ίδια δύναμη ή τον ίδιο πληθικό αριθμό.
Έτσι τα απέραντα σύνολα που μπορούν να τεθούν σε μια αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών τα ονόμασε **αριθμήσιμα**. Τον πληθικό αριθμό των απέραντων αυτών συνόλων τον ονόμασε άλεφ0 και τον συμβολίζουμε με $\aleph_0$.
Στην συνέχεια έδειξε ότι το σύνολο των ***ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο***. Πράγματι, θα αντιστοιχίσουμε τους θετικούς ρητούς σε μια ακολουθία $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ δηλαδή μια ′′1 – 1′′ αντιστοιχία με τους φυσικούς, όπου $r_i = \frac{p}{q}$, $p, q \in N^*$. Η βασική ιδέα είναι $p + q = 2,3,4, \dots$

	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	…………
q = 1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	…………
q = 2	$\frac{1}{2}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	…………
q = 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	…………..
q = 4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	………....
q = 5	….	…	…	….	…………
….					

Έτσι κατασκευάζουμε την ακολουθία $r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = 2, \dots, r_7 = \frac{2}{3}$, ...

Έτσι όλοι οι ρητοί αριθμοί (θετικοί, αρνητικοί, μηδέν) μπορούν να τεθούν σε μια γραμμική ακολουθία και να τεθούν σε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με τους θετικούς ακεραίους.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & r_1 & -r_1 & r_2 & -r_2 & \ldots. \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

Στην συνέχεια ο Cantor με την παρακάτω ευφυή ΄΄ διαγώνια διαδικασία
΄΄ έδειξε ότι το σύνολο **των *πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο*.**
Βασίστηκε στην ιδέα ότι αν το R είναι αριθμήσιμο, τότε και το υποσύνολό του A = (0,1) θα είναι αριθμήσιμο, επομένως θα μπορούσε να γραφεί στην μορφή μιας ακολουθίας

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

Οι οποίοι σε δεκαδική μορφή θα ήταν:

$$\begin{gathered} r_1 = 0, d_{11} d_{12} d_{13} \ldots \\ r_2 = 0, d_{21} d_{22} d_{23} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_n = 0, d_{n1} d_{n2} d_{n3} \ldots \end{gathered}$$

Αν ένας δεκαδικός είναι πεπερασμένος τον συμπληρώνουμε με μηδενικά. Σχηματίζουμε τώρα το νέο αριθμό $r = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ ως εξής:

$$d_i = \begin{cases} 4, & \alpha\nu \ d_{ii} \neq 4 \\ 5, & \alpha\nu \ d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Ο νέος αριθμός r δεν ισούται με κανένα από τα $r_1, r_2, \ldots$ αφού στην θέση i θα έχει διαφορετικό δεκαδικό ψηφίο, για κάθε i.

- Αν το τυχαίο r_i στην θέση i έχει την τιμή 4 τότε το r θα έχει την τιμή 5, ενώ αν έχει οποιαδήποτε άλλη τιμή εκτός του 4 το r θα έχει την τιμή 4.

Επομένως δεν υπάρχει ακολουθία $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ που μπορεί περιλάβει όλους τους πραγματικούς αριθμούς μεταξύ του (0,1).
Άρα υπάρχουν δυο ειδών απέραντα σύνολα, το αριθμήσιμο που περιλαμβάνει τους ακέραιους, τους ρητούς και τους αλγεβρικούς

και το μη – αριθμήσιμο σύνολο των πραγματικών αριθμών: το πραγματικό συνεχές.
Ο πληθικός αριθμός του πραγματικού συνεχές συμβολίζεται με c και γράφουμε $\aleph_0 < c$ επειδή οι πραγματικοί αριθμοί περιέχουν τους φυσικούς ως ένα υποσύνολο, αλλά δεν μπορούν να τεθούν σε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με αυτούς.
Στην συνέχεια έδειξε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί, και οι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος (0,1) έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό c, αφού ο μετασχηματισμός $x' = \frac{1}{1+e^{-x}}$ ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του άξονα των πραγματικών αριθμών $(-\infty < x < \infty)$ και του ευθυγράμμου τμήματος $0 < x < 1$.
Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι **τα σύνολα των άρτιων αριθμών, των περιττών αριθμών, των πολλαπλασίων ενός αριθμού m είναι όλα ισοδύναμα με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, έχουν δηλαδή τον ίδιο πληθάριθμο $\aleph_0$ (card($\mathbb{N}$) = $\aleph_0$)**.
Αυτό φαίνεται λίγο παράξενο, πως είναι δυνατόν το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ που περιλαμβάνει εκτός από τους άρτιους και τους περιττούς, να έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο μόνο των άρτιων ή μόνο των περιττών; Πως δηλαδή είναι δυνατόν ένα γνήσιο υποσύνολο ενός συνόλου να έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με αυτό; Αυτό ακριβώς είναι το παράδοξο των άπειρων συνόλων. Μπορούμε δηλαδή να απομακρύνουμε κάποια στοιχεία και αυτά να συνεχίσουν να έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.
Έτσι ένα σύνολο είναι άπειρο αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο με ένα κατάλληλο υποσύνολό του.
Μετά την διαγώνιο μέθοδο στο διάστημα (0,1) το άπειρο πλήθος των πραγματικών αριθμών στο διάστημα (0,1) δεν είναι ίδιο με το άπειρο των φυσικών αριθμών. Δεν είναι μόνο η ύπαρξη ενός αριθμού διαφορετικού από τους άπειρους αριθμούς στο διάστημα (0,1) ο οποίος θα μπορούσε έτσι να προστεθεί στο άπειρο πλήθος τους και να δώσει πάλι το ίδιο άπειρο, αλλά ένα τελείως διαφορετικό άπειρο που είναι << μεγαλύτερο >> από το άπειρο των φυσικών αριθμών.
Ο Cantor έδειξε ότι ένα επίπεδο ή ένα οποιοδήποτε στερεό έχει τον ίδιο αριθμό σημείων με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το συμπέρασμα είναι ότι ο πληθάριθμος ενός σημειοσυνόλου είναι ανεξάρτητος από την γεωμετρία του και την χωρική του διάσταση. Δηλαδή:

$$card(0,1) = cardR = card(R^2) = card(R^3) = card(άρρητων)$$

Στην συνέχεια προχώρησε στην έννοια του δυναμοσυνόλου και στα απειροσύνολα. Θυμίζω ότι δυναμοσύνολο P(A) ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του.
Άρα αν ένα σύνολο A έχει n στοιχεία τότε card(A) = n και το δυναμοσύνολό του έχει 2^n στοιχεία, δηλαδή card(P(A)) = 2^n.
Έτσι η πληθικότητα του δυναμοσυνόλου των φυσικών αριθμών είναι $2^{\aleph_0} = 2^{\text{άλεφ0}}$. Αυτό το νέο σύνολο με την σειρά του έχει πληθάριθμο $2^{2^{\aleph_0}}$.
Οδηγούμαστε έτσι σε μια άπειρη ακολουθία άπειρων πληθάριθμων

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \aleph_0,\ 2^{\aleph_0},\ 2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$$

O Cantor έδειξε ότι $c = 2^{\aleph_0}$.
Συνοψίζοντας έχουμε:

$$card(N) = card(Z) = card(Q) < card(R) = card(0,1) = card\big(P(N)\big) = card(\chi\acute{\omega}\rho o\upsilon)$$

Επίσης ανέπτυξε μια πλούσια εργασία πάνω στους υπερπεπερασμένους διατακτικούς αριθμούς και όρισε μια ακριβή αριθμητική υπερπεπερασμένων πληθαρίθμων. Έτσι οι άπειροι αριθμοί απέκτησαν ακριβές νόημα και αποτέλεσαν τον ακρογωνιαίο λίθο της ανάπτυξης εξαιρετικών δημιουργικών νέων μαθηματικών

Τα ενσώματα μαθηματικά (Lakoff – Nunez)
Οι Lakoff και Nunez μέσα από το βιβλίο τους ΄΄**Where Mathematics Comes From**΄΄ βλέπουν τον κόσμο να κυβερνιέται από τον ανθρώπινο εγκέφαλο και όχι από τα μαθηματικά. Η ανθρώπινη γνώση εξαρτάται αποκλειστικά από τον εγκέφαλο και με τον τρόπο με τον οποίο αυτός ανακαλύπτει πράγματα. Τα μαθηματικά δεν είναι μια ανακάλυψη σχετικά με τον εξωτερικό κόσμο, αλλά μια εφεύρεση βασισμένη σε μεταφορές συνδεδεμένες με τις ανθρώπινες σκέψεις, τα συναισθήματα και τις αντιδράσεις. Οι Lakoff και Nunez χρησιμοποιούν τους μηχανισμούς της αντίληψης του ενσωματωμένου ανθρώπινου μυαλού όπως αυτό έχει εξελιχθεί στον πραγματικό κόσμο. Τα μαθηματικά είναι ένα προϊόν των νευρικών δυνατοτήτων των εγκεφάλων μας, της φύσης των σωμάτων μας, της εξέλιξής μας, του περιβάλλοντός μας καθώς και της μεγάλης κοινωνικής και πολιτιστικής ιστορίας μας.

Υποστηρίζουν ότι όλες οι μαθηματικές ιδέες είναι περίτεχνες μεταφορές. Αυτές οι μεταφορές προέρχονται από τον πραγματικό κόσμο και στην συνέχεια συνδέονται και αναμειγνύονται για να οδηγήσουν τους διάφορους τομείς της μαθηματικής πρακτικής.
Επισημαίνουν ότι τα μαθηματικά είναι ενσώματα και βασίζονται στην ανθρώπινη εμπειρία. Δεν είναι εντελώς υποκειμενικά και δεν είναι θέμα απλών κοινωνικών συμβάσεων. Οι άνθρωποι κατανοούν τις αφηρημένες έννοιες με συγκεκριμένο τρόπο, χρησιμοποιώντας ιδέες και τρόπους σκέψεις που είναι θεμελιωμένοι στο αισθησιοκινητικό σύστημα αλλά όχι μόνο σε αυτό.
Οι πρόοδοι των γνωσιακών επιστημών επέτρεψαν στους ανωτέρω επιστήμονες να αναπτύξουν την θεωρία των ενσώματων μαθηματικών. Έτσι διατύπωσαν τρείς αφετηριακές προτάσεις για τα ενσώματα μαθηματικά.

i) **Η σωματοποίηση ή ενσωμάτωση του νου (the embodiment of mind).**
Αυτό σημαίνει ότι η φύση του σώματος, του μυαλού και των καθημερινών λειτουργιών του ανθρώπου δομεί και καθορίζει τις ανθρώπινες έννοιες και την ανθρώπινη λογική. Έτσι οι έννοιες και η λογική των μαθηματικών εμπεριέχονται στο σώμα.

ii) **Το γνωστικό ασυνείδητο (the cognitive unconscious)**
Οι μαθηματικές σκέψεις όπως και η εν γένει σκέψη του ανθρώπου υπάρχουν και λειτουργούν, χωρίς την άμεση δυνατότητα για απευθείας ενδοσκόπησή τους. Δηλαδή δεν έχουμε δυνατότητα πρόσβασης στα εννοιολογικά μας συστήματα ούτε στις χαμηλού επιπέδου διαδικασίες των σκέψεων.

iii) **Η μεταφορική σκέψη (metaphorical thought)**
Η εννοιολογικοποίηση των αφηρημένων νοητικών συλλήψεων σε διακριτούς όρους γίνεται χρησιμοποιώντας τους τρόπους λογισμού που βασίζονται στο αισθησιοκινητικό σύστημα. Ο μηχανισμός μέσω του οποίου το αφηρημένο γίνεται κατανοητό με συγκεκριμένους όρους (π.χ μέσω της χρήσης μεταφορών) καλείται εννοιολογική μεταφορά. Τα μαθηματικά χρησιμοποιούν εννοιολογικές μεταφορές. Για παράδειγμα μέσω εννοιολογικής μεταφοράς οι αφηρημένοι αριθμοί αντιστοιχίζονται στα σημεία μιας ευθείας.

Εξετάζοντας όλα τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι σύμφωνα με την θεωρία των ενσώματων μαθηματικών, **η πρόσβαση στα μαθηματικά επιτυγχάνεται μέσω εννοιών του ανθρώπινου μυαλού, οι οποίες μορφοποιούνται από το σώμα μας**.

Η γνωσιακή επιστήμη των μαθηματικών

Οι Lakoff και Nunez (1997, 2000) εμπνευσμένοι από τις θεωρητικές αρχές της ενσώματης γνώσης και χρησιμοποιώντας κυρίως τεχνικές από την γνωσιακή Γλωσσολογία (κυρίως Σημασιολογία) αναπτύσσουν και εφαρμόζουν μια λεπτομερή ανάλυση της συμπερασματικής οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών, θεωρημάτων, ορισμών και αξιωμάτων, την οποία ονομάζουν **Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών**.
Θέτουν ερωτήματα σχετικά με την συμπερασματική οργάνωση των μαθηματικών και όχι απλά για συμπεριφορές ή επιδόσεις ατόμων στο πεδίο των αριθμών. Υποστηρίζουν δε ότι οι αφηρημένες τεχνικές οντότητες στα μαθηματικά δημιουργούνται από την ανθρώπινη φαντασία, μέσω μιας πολύ συγκεκριμένης χρήσης γνωστικών μηχανισμών που στηρίζονται στην καθημερινή σωματική εμπειρία όπως οι:

- **Εννοιολογικές μεταφορές** – conceptual metaphor
- **Τα εννοιολογικά μίγματα (συνδυασμοί)** – conceptual blends
- **Οι αναλογικές σκέψεις (συλλογισμοί)** - analogical reasoning
- **Η πλασματική κίνηση** – fictive motion
- **Σχήματα του τρόπου** - aspectual schemas

Οι κυριότεροι από αυτούς είναι οι εννοιολογικές μεταφορές, τα εννοιολογικά μίγματα και τα εικονοσχήματα (image schemas)

Η εννοιολογική μεταφορά

Ο ορισμός που δίνουν οι Lakoff και Nunez (2000) είναι: Η εννοιολογική μεταφορά (conceptual metaphor) είναι ο γνωστικός μηχανισμός που επιτρέπει να συλλογιζόμαστε για ένα είδος σαν να ήταν κάποιο άλλο. Δεν είναι απλά ένα γλωσσολογικό φαινόμενο ή απλά ένα σχήμα λόγου. Είναι μάλλον ένας γνωστικός μηχανισμός που ανήκει στο βασίλειο της σκέψης. Η εννοιολογική μεταφορά είναι μια αντιστοίχιση (maping) οντοτήτων από ένα γνωστικό <<πεδίο πηγή>> (source domain) σε αντίστοιχες οντότητες σε ένα άλλο γνωστικό <<πεδίο στόχος>> (target domain). Θα μπορούσαμε να πούμε απεικονίσεις που διατηρούν την συμπερασματική δομή ανάμεσα στις δυο περιοχές.

Για παράδειγμα το μηδέν (0) μπορεί να είναι είτε ένα σημείο σε μια γραμμή ή το κενό σύνολο, και τα δυο ή τίποτα από τα δυο, και κάθε απόφαση είναι θέμα επιλογής της κατάλληλης εννοιολογικής μεταφοράς.

Τα εννοιολογικά μίγματα

Τα εννοιολογικά μίγματα είναι ο εννοιολογικός συνδυασμός δυο διακριτών γνωστικών δομών με σταθερή αντιστοιχία μεταξύ τους. Για παράδειγμα ο γνωστός μας καρτεσιανός κύκλος είναι ένα εννοιολογικό μίγμα ενός κύκλου και ενός συστήματος δυο κάθετων αξόνων με κοινή αρχή στο κέντρο του κύκλου και ακτίνα ίση με την μονάδα.

Από διδακτικής άποψης πολυμεσικές προσεγγίσεις που περιέχουν διάφορα είδη μεταφορών, συχνά συμβάλουν αποφασιστικά στην κατανόηση των μαθηματικών. Η εννοιολογική μεταφορά και η εννοιολογική μίξη δεν είναι απλά γλωσσικά φαινόμενα αλλά είναι σχετικά με την σκέψη και την γνώση.

Τα εικονοσχήματα

Οι Lakoff και johnon διατείνονται ότι το όχημα που μεταφέρει την εμπειρικά κατασκευασμένη γνώση είναι ένα ενσώματο σχήμα (embodied schema) – γνωστό επίσης ως εικονικό σχήμα (image schema).

<<Οι Lakoff και Nunez (2000) ορίζουν τα σχήματα εικόνων ως τις αρχέτυπες έννοιες (conceptual primitives) που οι χωρικές σχέσεις σε μια γλώσσα αποσυντίθενται και που όπως προκύπτει είναι παγκόσμιες.

Ο Johnon (1987) ορίζει τα εικονικά σχήματα ως δομές μιας δραστηριότητας μέσω των οποίων οργανώνουμε την εμπειρία μας (Κουλέτση, Ε. σελ.6)>>.

Τα εικονοσχήματα λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι είναι μια ιδιαίτερη γνωστική λειτουργία που είναι συγχρόνως και αντιληπτική και εννοιολογική. Βρίσκονται σ' ένα αρχικό στάδιο ανάπτυξης (primitives) και επιτρέπουν την οργάνωση των εμπειριών που εμπλέκουν χωρικές σχέσεις. Είναι δυναμικά επαναλαμβανόμενα πρότυπα που διαταράσσουν τις δράσεις και τις αντιλήψεις μας.

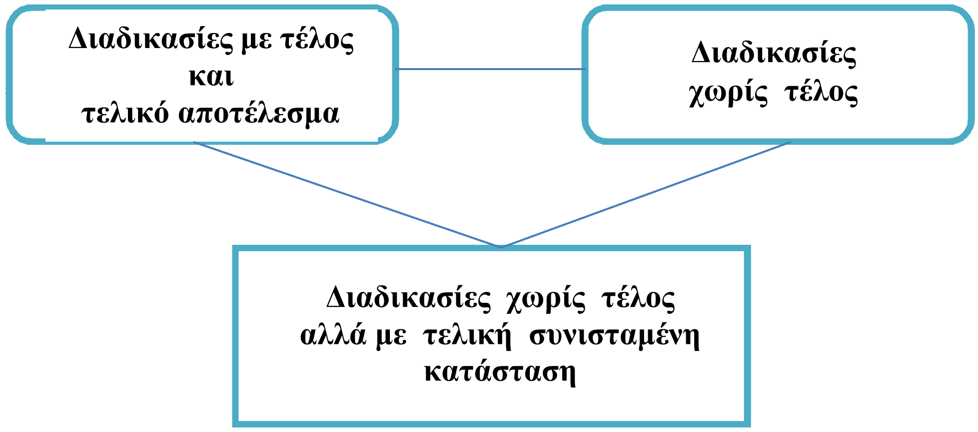
Η κατανόηση του απείρου μέσα από την θεωρία τους

Ένα πεδίο στο οποίο οι συγγραφείς διεξοδικά παρουσιάζουν πως οι γνωσιολογικοί μηχανισμοί συνεισφέρουν στην οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης είναι η ιδέα του πραγματικού απείρου. Οι Lakoff και Nunez περιγράφουν πως με την βοήθεια αυτών των μηχανισμών μπορούμε, παρ' όλο που δεν έχουμε εμπειρία για το άπειρο, να οικοδομήσουμε και να αντιληφθούμε το άπειρο ως μια ολοκληρωμένη

αντιληπτή οντότητα. Το πραγματικό άπειρο είναι το τελικό αποτέλεσμα μιας διαδικασίας άπειρων επαναλήψεων.
Οι Lakoff και Nunez υποστηρίζουν ότι για να κατανοήσουμε την γνωστική φύση του πραγματικού απείρου και της εννοιολογικής δομής με βάση το εν δυνάμει άπειρο πρέπει να αναφερθούμε σε δυο βασικές διαστάσεις του ανθρώπινου γνωστικού φαινομένου. Το ένα είναι ο **Χαρακτήρας** (aspect), όρος της Σημασιολογίας και το άλλο είναι η **BMI** (Lakoff και Nunez 2000, Βασική μεταφορά του απείρου) και εδώ χρησιμοποιείται ως η Βασική Χαρτογράφηση του Απείρου, μια εννοιολογική μίξη.
Χαρακτήρας (aspect): Η πιο σημαντική διάκριση όσον αφορά τον χαρακτήρα είναι αυτή μεταξύ τελειοποιήσιμου και μη – τελειοποιήσιμου χαρακτήρα. Η πρώτη έχει εγγενή ολοκλήρωση ενώ η δεύτερη όχι.
Διεργασίες μη – τελειοποιήσιμου χαρακτήρα μπορούμε να τις αντιληφθούμε ως συνεχείς ή επαναλαμβανόμενες και είναι οι διαδικασίες που έχουν σχέση με το άπειρο. Οι επαναληπτικές διαδικασίες έχουν ενδιάμεσα τελικά σημεία και αποτελέσματα. Μερικές φορές οι συνεχείς διαδικασίες μπορούν να γίνουν αντιληπτές με επαναλαμβανόμενους όρους και να εκφραστούν στην ίδια γλώσσα. Αυτή η ανθρώπινη γνωστική ικανότητα να αντιληφθούμε κάτι συνεχές με επαναλαμβανόμενους όρους καταλήγει να είναι πολύ σημαντικό όταν αφορά το άπειρο. Συνεχείς διαδικασίες χωρίς τέλος μπορούν να γίνονται αντιληπτές σαν να ήταν άπειρες επαναληπτικές διαδικασίες με ενδιάμεσα στάδια και ενδιάμεσα αποτελέσματα.
Η BMI είναι μια γενική εννοιολογική χαρτογράφηση που όπως υποστηρίζουν οι Lakoff και Nunez εμφανίζεται και εκτός μαθηματικών. Η ακρίβεια όμως και η αυστηρότητα των μαθηματικών την καθιστούν καταλληλότερη να εφαρμοστεί.
Η BMI είναι ένας ενιαίος ανθρώπινος καθημερινός εννοιολογικός μηχανισμός που είναι υπεύθυνος για την δημιουργία όλων των ειδών μαθηματικών, όπως πραγματικού απείρου, άπειρων συνόλων, ορίων, ελάχιστου άνω φράγματος, άπειρων σειρών κλπ. Είναι μια εννοιολογική μίξη που έχει δυο χώρους εισόδου. Ο ένας είναι ο χώρος που αφορά ολοκληρωμένες επαναληπτικές διαδικασίες (με τελειοποιήσιμο χαρακτήρα). Στα μαθηματικά οι διαδικασίες αυτές αντιστοιχούν στον πεπερασμένο χώρο. Ο άλλος χώρος εισόδου περιλαμβάνει ατελείωτες επαναληπτικές διαδικασίες (μη – τελειοποιήσιμου χαρακτήρα) και κατά συνέπεια χαρακτηρίζει τις διαδικασίες που εμπλέκονται στο άπειρο.

Στον μικτό χώρο (μίξη αυτών) αυτό που έχουμε είναι η διαφαινόμενη συμπερασματική δομή που απαιτείται για να χαρακτηρίσουμε τις διαδικασίες εκείνες που υπεισέρχονται στο πραγματικό άπειρο. Αλλά αυτό που κάνει αυτό το μίγμα πραγματικά πλούσιο είναι το γεγονός ότι: **μια ατελείωτη διαδικασία έχει ένα τέλος και μια τελική συνισταμένη κατάσταση**. Το παρακάτω σχήμα είναι χαρακτηριστικό.

Τελειοποιήσιμου χαρακτήρα **Μη –τελειοποιήσιμου χαρακτήρα**



Μεικτός χώρος πραγματικού απείρου

Απαρίθμηση άπειρων συνόλων
Με αυτά τα γνωστικά εργαλεία στο μυαλό μας θα αναλύσουμε την εργασία του Cantor για το πραγματικό άπειρο που αναπτύξαμε στην πρώτη ενότητα.
Όπως είδαμε ο Cantor στην μελέτη των ιδιοτήτων των απειροσυνόλων, όρισε ότι δυο απειροσύνολα έχουν την ίδια δύναμη (πληθάριθμο) αν μπορούν να τεθούν τα στοιχεία τους σε μια ΄΄1 – 1΄΄ αντιστοιχία. Για να χαρακτηρίσει την έννοια της δύναμης ενός συνόλου ο Cantor κάνει χρήση της εννοιολογικής μεταφοράς ΄΄ **ίδιο πλήθος στοιχείων** ΄΄ με το ΄΄ **ζευγάρωμα** ΄΄.
Παρόλο που πρόκειται για δυο γνωσιολογικά διαφορετικές ιδέες, με σημαντικές συμπερασματικές διαφορές, ο Cantor κατόρθωσε να ορίσει την απαρίθμηση των απειροσυνόλων καθιερώνοντας μια εννοιολογική μεταφορά στην οποία η έννοια ΄΄ ίδιο πλήθος ΄΄ γίνεται αντιληπτή με όρους της έννοιας ΄΄ ζευγάρωμα ΄΄.
Μόνο μέσω της μεταφοράς του Cantor είναι λογικό να πούμε ότι: ΄΄ *απέδειξε ότι υπάρχουν μεταφορικά ακριβώς τόσοι θετικοί άρτιοι αριθμοί*

όσοι είναι και οι φυσικοί αριθμοί΄΄ και όχι ότι τα σύνολα των θετικών άρτιων και των φυσικών έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Ο Cantor (όπως αναφερθήκαμε στην αρχή) απέδειξε ότι η δύναμη του συνόλου των φυσικών είναι ίδια με την δύναμη του συνόλου των ρητών. Στο τακτικό εννοιολογικό μας σύστημα αυτό δεν είναι αλήθεια. Όχι γατί η διαίσθησή μας είναι λάθος, ούτε επειδή η καθημερινή μας γλώσσα είναι ανακριβής και αόριστη αλλά επειδή γίνεται με μια διαφορετική συμπερασματική δομή. Αυτό που έκανε ήταν να δημιουργήσει μια νέα τεχνική μαθηματική έννοια – ζευγάρωμα και μ' αυτό νέα μαθηματικά. **Από γνωστική άποψη είναι μια μεταφορική και όχι κυριολεκτική επέκταση της πολύ ακριβής καθημερινής μας αντίληψης**.

Εμφανίσεις γνωσιολογικών μηχανισμών στο έργο του Cantor, και συγκεκριμένα χρήση της ΒΜΙ , έχουμε τόσο στην απόδειξη της αριθμησιμότητας του συνόλου των ρητών όσο και στην διαγώνια απόδειξη της μη αριθμησιμότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Για παράδειγμα ας εξετάσουμε την άπειρη διάταξη των κλασμάτων του Cantor. Εκεί η ΒΜΙ χρησιμοποιείται ξανά και ξανά, σιωπηρώς και ασυνείδητα στην κατανόηση του διαγράμματος (σελ. 3). Χρησιμοποιείται σε κάθε γραμμή της διάταξης για την εξασφάλιση όλων των κλασμάτων. Πρώτα η ΒΜΙ χρησιμοποιείται στην πρώτη στήλη για την εξασφάλιση όλων των κλασμάτων με αριθμητή ένα (1). Στην συνέχεια η ΒΜΙ χρησιμοποιείται για να εξασφαλίσει όλα τα κλάσματα με αριθμητή δύο (2) κ.ο.κ. Κατά τον ίδιο τρόπο η ΒΜΙ χρησιμοποιείται σε κάθε γραμμή του πίνακα για να διαβεβαιώσει όλα τα κλάσματα με παρονομαστή ένα, δύο, τρία κ.ο.κ περιλαμβάνονται σε αυτή την απέραντη διάταξη η οποία παρέχει ολοκλήρωση. Τέλος η ΒΜΙ χρησιμοποιείται στο να αντιληφθούμε το ατελείωτο που καλύπτει ένα ολοκληρωμένο μονοπάτι. Το βέλος καλύπτει κάθε κλάσμα του πίνακα εξασφαλίζοντας μέσω της ΒΜΙ την δυνατότητα μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης μεταξύ των ρητών και των φυσικών.

Τα μη-στερεοτυπικά συμπεράσματα της δουλειάς του Cantor με την βοήθεια της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών μας επιτρέπουν να καταλάβουμε την αφηρημένη ανθρώπινη σκέψη όπως αυτή εκδηλώνεται μέσω αντικρουόμενων νοητικών κατασκευών. Μέσα από την οπτική της Γνωσιολογικής επιστήμης μπορούμε :

- ✓ Να διασαφηνίσουμε τι είναι αυτό που κάνει τα συμπεράσματα του Cantor να μας φαίνονται μη - στερεοτυπικά .

- ✓ Να αντιληφθούμε ότι, αντίθετα με την πεποίθηση πολλών μαθηματικών και φιλοσόφων των Μαθηματικών, η φύση του δυνάμει απείρου και του πραγματικού απείρου μπορούν να κατανοηθούν όχι με όρους υπερβατικής ή πλατωνικής αλήθειας ή με όρους τυπικής λογικής αλλά με όρους ανθρώπινων ιδεών και γνωσιολογικών μηχανισμών.

Ανάμεσα στους σημαντικότερους μηχανισμούς για την κατανόηση της γνωσιολογικής φύσης των υπερπεπερασμένων αριθμών και του πραγματικού απείρου είναι:

- **Τα συστήματα χαρακτήρα**, επαναληπτικές και συνεχείς διαδικασίες, τελειοποιήσιμες και μη – τελειοποιήσιμες δομές, με αρχική κατάσταση και ενδιάμεσα αποτελέσματα.
- **Οι εννοιολογικές μεταφορές**, ίδιο πλήθος στοιχείων με πλήθος ζευγαριών στοιχείων.
- **Τα εννοιολογικά μίγματα**, όπως οι χρήσεις της BMI στις αποδείξεις του Cantor.

Οι μηχανισμοί αυτοί δεν είναι μαθηματικοί μηχανισμοί. Είναι ανθρώπινοι γνωσιολογικοί μηχανισμοί, προϊόντα της ανθρώπινης εξέλιξης εκατομμυρίων ετών, υποκείμενοι στους περιορισμούς και τις ιδιομορφίες του ανθρώπινου σώματος και εγκεφάλου. Οι Nunez και Lakoff έδειξαν ότι υπάρχουν και άλλες περιπτώσεις του πραγματικού απείρου που γίνονται αντιληπτές μέσω της BMI, όπως είναι τα σημεία στο άπειρο της προβολικής γεωμετρίας, τα όρια, οι υπερπεπερασμένοι διατακτικοί αριθμοί, τα απειροστά, τα ελάχιστα άνω φράγματα κλπ.

Όλες αυτές οι περιπτώσεις απείρου ανήκουν σε διαφορετικά Μαθηματικά πεδία και από καθαρά Μαθηματικής πλευράς η ύπαρξή τους διασφαλίζεται μέσω της υιοθέτησης κατάλληλων αξιωμάτων ΄΄ κομμένων και ραμμένων ΄΄ στα μέτρα της κάθε περίπτωσης.

Γι’ αυτό η BMI έχει έναν διπλό ρόλο : Αφ’ ενός εξηγεί με έναν μοναδικό μηχανισμό περιπτώσεις του απείρου που συναντώνται σε διαφορετικούς Μαθηματικούς τομείς. Σε διαφορετικά Μαθηματικά πεδία χρειαζόμαστε διαφορετικά αξιώματα σχετικά με το πραγματικό άπειρο, ενώ γνωσιολογικά όλες οι περιπτώσεις πραγματικού απείρου χαρακτηρίζονται από έναν μόνο μηχανισμό, την BMI.

Αφ’ ετέρου η BMI μαζί με τους άλλους γνωσιολογικούς μηχανισμούς μας παρέχουν μια γνωσιολογικά ευλογοφανή εξήγηση της φύσης του πραγματικού απείρου κάτω από τους περιορισμούς των ανθρώπινων νοητικών δομών, της ανθρώπινης γλώσσας και των ιδιαιτεροτήτων του ανθρώπινου σώματος και μυαλού. Ενώ τα αξιώματα δεν παίρνουν υπ' όψη τους αυτούς τους περιορισμούς και γι' αυτό δεν μπορούν να μας δώσουν εξηγήσεις για την φύση των υπερπεπερασμένων πληθικών αριθμών, του πραγματικού άπειρου ή γενικότερα για την φύση των μαθηματικών εννοιών.

Επίλογος

Οι προβληματισμοί των Lakoff και Nunez, αλλά και διάφορων σύγχρονων ερευνητών ανοίγουν ένα τεράστιο πεδίο αναζήτησης και μελέτης. Πως σκέφτεται άραγε ο μαθηματικός; Διαθέτει ένα ιδιαίτερο είδος ευφυΐας; Αν ναι τότε αυτό είναι κληρονομικό ή επίκτητο; Τα μαθηματικά είναι εγγεγραμμένα στον ανθρώπινο εγκέφαλο ή όχι; Πολλά ερωτήματα θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε πάνω σε αυτό το πνεύμα. Τα ερωτήματα αυτά δεν έχουν απλώς μια ακαδημαϊκή αξία. Έχουν και πρακτικές πλευρές. Οι ΄΄ ολοκληρωμένες ΄΄ απαντήσεις σε ερωτήματα όπως τα παραπάνω μπορούν να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, να στοχαστούν και να αναπροσαρμόσουν την διδασκαλία τους τόσο στον ψυχολογικό τομέα όσο και στον διδακτικό. Μπορούν να δώσουν μια ολοκληρωμένη εικόνα για την φύση των μαθηματικών, παίζοντας καθοριστικό ρόλο στη σύνδεση της φιλοσοφίας, της λογικής, της ιστορίας των μαθηματικών, της παιδαγωγικής, της ψυχολογίας και των άλλων επιστημών.

Abstract

In this article we present the theory of embodied knowledge and especially the embodied knowledge of mathematics the way it is approached by cognitive scientists G. Lakoff and R. Nunez in their book ΄΄Where Mathematics Comes From΄΄.

Putting their theory into one sentence we would say:

΄΄Figures generated by our physical experience, contribute to the formation of abstract (mathematical) concepts through the mechanism of transport΄΄.

Lakoff and Nunez are trying to convince us through their book that the most difficult mathematical concepts such us the actual infinite can be understood with the theory of embodied knowledge.

Βιβλιογραφία

1. Βοσνιάδου, Σ.(2004) *Γνωσιακή Επιστήμη: Η Νέα Επιστήμη του Νου*, Αθήνα, Εκδόσεις Gutenberg.
2. Δεληκανλής, Π. (2005). *Εγκέφαλος συμμετρία μάθησης μαθηματικών*. Αθήνα: Διπλωματική Εργασία.
3. Κουλέτση, Ε. (2010). *Οι εννοιολογικές μεταφορές και η χρήση από τους καθηγητές στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Διπλωματική Εργασία.
4. Brand, L. (1984). *Μαθηματική Ανάλυση*. Αθήνα: Ε.Μ.Ε
5. Nunez, R.E.(2003) *'Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination.' In Metaphor and Contemporary Science, edited by B. Basque and P. Pang, 49-72. Singapore*: National University of Singapore.
6. Núñez, R. (2004). *Embodied Cognition and the Nature of Mathematics*: Language, Gesture, and Abstraction. In K. Forbus, D. Gentner, and T. Regier (Eds.) *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Cognitive Science Society.* (pp. 36-37). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
7. Núñez, R & Lakoff, G (2000). *Where Mathematics Come From*, *HOW THE EMBODIED MIND BRINGS MATHEMATICS INTO BEING.* BASIC BOOKS
8. Nunez, R.E., Edwards, L.D., & Matos, P. (1999). *Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. Educational Studies in Mathematics.*
9. Lakoff, G &Johnson,M.(1999). *Philosophy In The Flesh: The Embodied Mind And Its Challenge To Western Thought*. Basic Books
10. Rucker, R. (1999). *Το άπειρο και ο νους*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές εκδόσεις