ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$.

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+3x+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=\lambda x+1$. Αν η ευθεία (ε) εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f να βρείτε:
i) το $\lambda \in \Re$
ii) τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

4) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+ax+\beta$ και $g(x)=x^3-\gamma$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να διέρχονται από το σημείο Α(1,2) και να έχουν την ίδια εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

5) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^3+x-3, & x\le -1 \\ x^2+6x, & x>-1 \end{cases}$ ii) $g(x)=\begin{cases} x^2+9x-3, & x<-1 \\ x^3+4x-6, & x\ge -1 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=-1$.

6) Δίνονται οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ii) $g(x)=\begin{cases} x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι: $f'(0)=g'(0)=0$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+ax+1, & x\le 0 \\ x^2+x+a^2, & x>0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του α, έτσι ώστε:
i) η f να είναι συνεχής
ii) η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2, & x<1 \\ \beta\sqrt{x}, & x\geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τους α, β ώστε η f να παραγωγίζεται στο $x_0=1$.

9) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^4\eta\mu^{\nu}\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ \sqrt{x}\eta\mu 5x, & x\geq 0 \end{cases}$ ii) $g(x)=\begin{cases} x^3 e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2 e^{-\frac{1}{x}}\sigma\upsilon\nu^{\nu}\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$

όπου ν φυσικός με ν > 1, είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$.

10) Να βρεθούν οι α, β ϵ ℜ ώστε η συνάρτηση

$f(x)=\begin{cases} ax^2+2\beta\sqrt{x+3}+6, & x<1 \\ x^2+(a+\beta)x-1, & x\geq 1 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

11) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x \in \Re$ ισχύει $f^3(x)-xf^2(x)-x^2f(-x)=x^2\eta\mu x$, να αποδείξετε ότι: $f'(0)=1$.

12) Αν $2x+3\leq f(x)\leq x^2+2x+3$ για κάθε $x \in \Re$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=3$ ii) $f'(0)=2$

13) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ έχει την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε x, $y \in \Re$. Αν η f παραγωγίζεται στο $x_0=0$ με $f'(0)=2$, να αποδείξετε ότι παραγωγίζεται σε κάθε α ϵ ℜ.

14) Αν $f^2(x)-2xf(x)=3\eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \Re$ και η f παραγωγίζεται στο $x_0=0$, να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=0$ και την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$.

15) Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και

$$5\eta\mu^2 x-3x^4\leq xf(x)\leq 5\eta\mu^2 x+3x^4 \text{ για κάθε } x \in \Re$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$ ii) $f'(0)=5$

16) Αν η f είναι συνεχής στο 3 και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=5$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(3)=0$ ii) $f'(3)=5$

17) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο α και $\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)}{x}=3$, να αποδείξετε ότι $f'(a)=3$.

18) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 με $f(x_0)=g(x_0)=0$ και $g'(0)\neq 0$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+\beta, & x<2 \\ 3, & x=2 \\ \gamma x^2+x-3, & x>2 \end{cases}$, όπου α, β, γ ϵ ℜ. Να βρείτε τους α, β, γ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x=2$.

20) Αν η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=x_0$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

21) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο α, να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}=a^2f'(a)-2af(a)$

ii) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}=g(a)f'(a)-f(a)g'(a)$

22) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3}{x-1}=2$, να αποδείξετε ότι $f'(1)=5$.

23) Να βρεθούν οι α, β, γ ϵ ℜ ώστε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+ax-2}{x-1}, & x<1 \\ \gamma x^2+\beta x+a, & x\geq 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ώστε να ισχύει $\eta\mu 2x-x^2\leq f(x)\leq \eta\mu 2x+x^2$, για κάθε x ϵ ℜ. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.

25) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι συνεχής στο $x=1$ και έχει την ιδιότητα $x^2f^3(x)+f(x)+1=x^3$, για κάθε x ϵ ℜ. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=3$.

26) Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$, για κάθε x, $y \in \Re$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α με $f'(a)=1+a$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=1+x$ για κάθε $x \in \Re$.

27) Αν $f'(0)=1$ και για κάθε x, $y \in \Re$ ισχύει

$$f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu 2y+f(y)\sigma\upsilon\nu 2x$$

να αποδείξετε ότι $f'(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$, για κάθε $x \in \Re$.

28) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x^2), & x\le 1 \\ f(2x-1), & x>1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=2f'(1)$.

29) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με $f'(2)=3$, να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-5h)}{f(2+6h)-f(2-2h)}$.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\kappa x+\lambda+1$. Αν μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης 3 εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(0,0), να βρείτε τα κ, λ $\in \Re$.

31) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{4x+1}$ και $g(x)=ax^2+x+\beta$. Να βρείτε τα α, β $\in \Re$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=2$.

32) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$, όταν:

i) $f(x)=-x+\sqrt{x}$ ii) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+3$ iii) $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$

33) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες σχηματίζουν γωνία $\dfrac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$, όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ ii) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{1+x}, & x<0 \\ \eta\mu x-1, & x\ge 0 \end{cases}$ iii) $f(x)=\begin{cases} 2e^x-x, & x\le 1 \\ 3x^2+2, & x>1 \end{cases}$

34) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+2$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες μεταξύ τους.

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

i) Να βρείτε σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της f οι εφαπτομένες είναι παράλληλες μεταξύ τους.
ii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες της είναι κάθετες.

36) Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ∈ ℜ για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \gamma + x^x$ και $g(x) = ax^2 + \beta x + 2$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους Μ(1,2).

37) Αν $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x + \gamma, & x \leq 1 \\ \dfrac{\gamma}{x} + 2, & x > 1 \end{cases}$ να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ∈ ℜ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 6 = 0$.

38) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x^2}, \lambda > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

39) Έστω η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει: $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

40) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{16}{9}x + 1$. Αν ισχύει η σχέση

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2x^4 + 5x}{3x^3 + 2x^2} - \kappa x\right) = \lambda$$

με κ, λ ∈ ℜ, να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + 2$.

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}(x - 2)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων ενώ υπάρχει μία μόνο εφαπτομένη η οποία διέρχεται από το σημείο Α(2,0).

42) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2002 + |\ln(x - 1)|$. Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2002. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δυο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα Α και Β. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα Α και Β είναι κάθετες μεταξύ τους.

43) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ και για κάθε $x \in \Re$ ισχύει $f(e^{-x})=x^2+2x+3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1,f(1))$.

44) Να αποδειχθεί ότι από τα σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση $y=-1$ άγονται κάθετες εφαπτομένες στην παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$.

45) Να βρείτε τα α, β ϵ ℜ, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=ax+\frac{x-1}{x}$ στο σημείο της Α(1,1) να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+(4a+\beta)x+a$.

46) Ένα σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-2x+3$. Αν την χρονική στιγμή t_0 η κλίση της f στο σημείο Μ είναι 25 και η τετμημένη του Μ αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s, να βρεθούν:
i) η τετμημένη του σημείου Μ
ii) ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του σημείου Μ.

47) Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό 16 cm^2/s. Να βρεθεί:
i) ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς του κύβου την χρονική στιγμή που αυτή είναι 5 cm.
ii) ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κύβου την χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 5 cm.

48) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της σκιάς ενός ανθρώπου, ύψους 1,70 m, ο οποίος απομακρύνεται με ταχύτητα 2 m/s από μια κολόνα, της οποίας η λάμπα φωτίζει από ύψος 5,1 m από το έδαφος.

49) Σε μια κωνική δεξαμενή χύνεται νερό με ρυθμό 2π m^3/s. Αν το ύψος της δεξαμενής είναι 10 m και το πάνω μέρος της έχει εμβαδόν 25π m^2, να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο ανέρχεται το επίπεδο του νερού όταν το βάθος του είναι 2 m.

50) Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x-1)^2$. Η τετμημένη του Μ είναι θετική και απομακρύνεται από την αρχή Ο των αξόνων με ρυθμό 2. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Μ με τον άξονα $x'x$ όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x-y+1=0$, καθώς και η τετμημένη του Μ την στιγμή εκείνη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ.Μ.Τ ΚΑΙ ΣΤΟ Θ. ROLLE

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

51) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2x+2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$$

i) Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής για την f στο διάστημα [-3,2].

ii) Εφόσον πληρούνται, να το εφαρμόσετε και να βρείτε τα ξ που το επαληθεύουν.

52) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x\le 0\\ x^3+(\beta-1)x, & x>0\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α, β ϵ ℜ έτσι, ώστε να εφαρμόζεται για την f το θεώρημα του Rolle στο διάστημα [-1,1].

53) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, ώστε για την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+\beta, & x<0\\ \gamma x^2+4x+2, & x\ge 0\end{cases}$$

να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα [-2,2]. Στην συνέχεια να επαληθευτεί το θεώρημα για την συνάρτηση f.

54) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β), $f(a)=\beta$ και $f(\beta)=a$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ϵ (α,β) τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=-1$.

55) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-21x^2+18x+6\mu=0$ έχει για κάθε τιμή του μ ϵ ℜ το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (1,2).

56) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5-5x+\lambda=0$, όπου λ ϵ ℜ, δεν μπορεί να έχει δυο πραγματικές ρίζες στο διάστημα (-1,1).

57) Να αποδείξετε ότι: $\left|\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta\right|\le|\alpha-\beta|$ για κάθε α, β ϵ ℜ.

58) Να αποδείξετε ότι:

i) $|\text{ημ}\alpha-\text{ημ}\beta|\le|\alpha-\beta|$ για κάθε α, β ϵ ℜ.

ii) αν $0<\alpha<\beta$, τότε $1-\dfrac{\alpha}{\beta}<\ln\dfrac{\beta}{\alpha}<\dfrac{\beta}{\alpha}-1$

iii) αν $0<\alpha<\beta$, τότε $e^{\beta}-e^{\alpha}<\beta e^{\beta}-\alpha e^{\alpha}$

59) Να αποδείξετε ότι:

i) $e^x < \dfrac{e^x - 1}{x} < 1$ για κάθε $x < 0$

ii) $\dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ για κάθε $x > 0$.

60) Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

61) Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και ισχύουν $f(a) = a$, $f(\beta) = \beta$ και $f(\gamma) = \gamma$ για κάποιο γ є (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ є (α,β) τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

62) Δίνεται η συνάρτηση $f : [α,β] \to \Re$, συνεχής στο διάστημα [α,β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) με $f(a) = f(\beta)$. Αν γ είναι σημείο του (α,β) τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \dfrac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ є (α,β) τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

63) Αν $α < 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

64) Δίνεται η συνάρτηση $f : [α,β] \to \Re$, συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β). Να αποδείξετε ότι:
i) για την συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)}(x - a)(x - \beta)$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο [α,β].
ii) υπάρχει ξ є (α,β) τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{1}{a - \xi} + \dfrac{1}{\beta - \xi}$

65) Αν $2α + 5β + 10γ = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $αx^4 + βx + γ = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

66) Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μια διαδρομή 300 Km σε 3 ώρες. Να αποδείξετε ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά την διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν 100 Km την ώρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

67) Αν η συνάρτηση f είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] με $f(a) = f(\beta)$ και $f'(a) = f'(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ є (α,β) τέτοιο, ώστε $f'''(\xi) = 0$.

68) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [-2,2] και παραγωγίσιμη στο (-2,2) με $f'(x) \le 1$ για κάθε x ϵ (-2,2), $f(-2) = -2$ και $f(2) = 2$.
i) Να εφαρμόσετε για την f το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [-2,0] και [0,2].
ii) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

69) Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ είναι $f'(x) \le 2$ για κάθε x ϵ ℜ. Αν $f(1) = 2000$, να αποδείξετε ότι $1998 \le f(2) \le 2002$.

70) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\lambda x^2 + 2\mu x = \lambda + \mu$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

71) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1,2], παραγωγίσιμη στο διάστημα (1,2) και $f(2) - f(1) = 3$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

72) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και $\mathrm{f}(\alpha) - \mathrm{f}(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 ϵ (α,β) τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2x_0$.

73) Δίνεται η συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \Re$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) με $f(a) = a$ και $f(\beta) = \beta$.
Να αποδειχθεί ότι:
i) υπάρχει γ ϵ (α,β) τέτοιο, ώστε $f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$
ii) υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \ne x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) f'(x_2) = 1$

74) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -(4\alpha + 2)x^2 - 2\gamma x - 3\alpha - 8, & x < 0 \\ 3\alpha x^3 - (6 + \alpha)x - 3\beta - 2\alpha - 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τους α, β και γ ϵ ℜ, ώστε:
i) η f να παραγωγίζεται στο ℜ.
ii) να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την f στο [-1,1].

75) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + ax + \beta, & x < 1 \\ \beta x^2 + 2x + a, & x \ge 1 \end{cases}$ με α, β ϵ ℜ. Να βρεθούν οι α και β, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο Α(-1,0) και στο διάστημα [0,2] να εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής. Στην συνέχεια να γίνει η εφαρμογή του θεωρήματος.

76) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^4 + 2\lambda x - \lambda - 1 = 0$ έχει, για κάθε λ ϵ ℜ, μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα (0,1).

77) Αν α, β, γ, δ ϵ $\Re$ και $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}+\delta=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

78) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4+2x^3-7x^2-x+5$ και $g(x)=x^4-2x^3+2x^2+x-4$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα (1,2).

79) Να αποδείξετε ότι:

i) $2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{\pi}{e}$ ii) $\text{συν}\frac{5\pi}{18}<\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$

80) Να αποδείξετε ότι:

i) $\text{εφ}50^\circ>1+\frac{\pi}{18}$ ii) $2-\frac{e}{2}<\ln 2<\frac{2}{e}$

iii) $\frac{\text{εφ}\beta}{\text{εφ}\alpha}>\frac{\beta}{\alpha}$ για κάθε $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iv) $x\le \text{εφ}x\le\frac{x}{\text{συν}^2 x}$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

81) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β), να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $2f'(\xi)=f'(\xi_1)+f'(\xi_2)$.

82) Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β). Αν $f(a)=2\beta$ και $f(\beta)=2a$, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x-2y+3=0$.

83) Έστω $\alpha>0$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [-α,α] συνάρτηση g. Αν $2g(0)=g(a)+g(-a)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ϵ (-α,α) τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0$.

84) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β), με $f(a)=f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

85) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,1)$, συνεχή στο διάστημα $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ με $|f'(x)|<1$ για κάθε $x \in (0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi$.

86) Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο τυχαίων ριζών της εξίσωσης $e^x \eta\mu x = 1$ βρίσκεται μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $e^x \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$.

87) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία που έχουν τετμημένες $x_1 \in (-\pi,0)$ και $x_2 \in (0,\pi)$.

88) Δίνεται η συνάρτηση f τρείς φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(a)=f'(a)=0$ και $f(\beta)=f'(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'''(\xi)=0$.

89) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\ \Delta \to \Delta$, όπου $\Delta=[0,1]$ με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)=1-\gamma$

ii) υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$ τέτοιο, ώστε $f'(a)f'(\beta)=1$.

90) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$, $f(1)=3$ και $f(2)=6$, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

91) Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2} < \ln(\alpha+2) < \alpha+1$ για κάθε $\alpha > -1$.

92) Έστω οι συναρτήσεις f και g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) με $f(a)=f(\beta)=0$ και $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ρίζα στο (α,β).

93) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)^2$.

i) Να βρείτε την f'

ii) Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών του πολυωνύμου

$$g(x)=(x-2)(x-3)^2+(x-1)(x-3)^2+2(x-1)(x-2)(x-3)$$

94) Αν $\alpha e > \beta e > 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha^\alpha > \beta^\beta$.

95) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β και γ, ώστε για την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2x^3+(a+2)x^2+(\beta-2)x+2\gamma, & x<1\\ (\beta+2)x^2+(a-4)x+6, & x\geq 1\end{cases}$$

να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα [-1,2].

96) Έστω $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\gamma \in \Re$ τέτοιο, ώστε $f'(\gamma)=\dfrac{2\gamma f(\gamma)}{1-\gamma^2}$.

97) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(1)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=2-\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

98) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1], $f(0)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\dfrac{2f'(\gamma)}{f(\gamma)}=\dfrac{f'(1-\gamma)}{f(1-\gamma)}$.

99) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1] με $f(0)=0$ και $f(1)=1$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ:
Να εφαρμόσετε θεώρημα ενδιαμέσων τιμών και να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,1)$: $f(\gamma)=1/2$

100) Να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=2^x+5^x$, $x \in \Re$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ:
Θεωρήστε την συνάρτηση $f(t)=t^x$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

101) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=x+\dfrac{x+2}{x+1}$

ii) $f(x)=x^2-2x(x-6)\ln x-12x+11$

iii) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

102) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=2(\ln x-1)(x^2-2x)-(x-2)^2+5$

ii) $f(x)=2xe^x-e(x+1)^2+2e$

103) Να βρεθούν οι τιμές του α ϵ $\Re$, ώστε:

i) η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 6x + 5$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

ii) η συνάρτηση $g(x) = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax + 4$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

104) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = \ln|x| + \dfrac{2}{x^2}$ ii) $g(x) = \ln x + \dfrac{2}{x} - 2\sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

105) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f.

ii) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις ακριβώς πραγματικές ρίζες, δύο αρνητικές και δύο θετικές.

106) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $e^x + x^2 = x + 1$ ii) $e^x = 1 + \ln(x+1)$

107) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3^x + 4^x = 5^x$ ii) $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 6^x$

108) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

109) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \ln\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\eta\mu x)$, $x \in (0,\pi)$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x + \ln\left(\varepsilon\phi\dfrac{x}{2}\right) = \ln(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in (0,\pi)$.

110) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

i) $\ln(x+1) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ ii) $24 - 12x^2 + x^4 > 24\sigma\upsilon\nu x$

111) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii) Να αποδειχθεί ότι $e^\pi > \pi^e$.

iii) Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$.

iv) Να αποδειχθεί ότι $a^{a+1} > (a+1)^a$ για κάθε $a \geq e$.

112) Να συγκριθούν οι αριθμοί $2^{\sqrt{5}}$ και 5.

113) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^3+9x^2+12x+16, & x<1 \\ 2x^3-27x^2+84x-20, & x\geq 1 \end{cases}$

ii) $g(x)=\begin{cases} -12(x+2)e^{-x}, & x\leq 0 \\ 2x^3-9x^2+12x-24, & x>0 \end{cases}$

114) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$, $x>2$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι $\ln(x-1)\cdot\ln(x+1)<\ln^2 x$, $x>2$.

115) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-3$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

iii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ καθώς και το σύνολο τιμών της f.

116) Αν για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $a^x\geq x+1$, να αποδείξετε ότι $a=e$.

117) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$\mathrm{f(x)=x^3(1-3\ln x)-36\cdot x(1-\ln x)}$$

118) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] αλλά όχι αντιστρέψιμη, να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

119) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{\ln x}{x+1}$ ii) $g(x)=(x-1)(e^x-x)-e^x+\dfrac{x^2}{2}$

120) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\dfrac{1}{2\eta\mu^2 x}+\ln|\eta\mu x|$, $x\in(0,\pi)$

ii) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+2\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)$, $x\in(0,\pi)$

iii) $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x-4\sigma\upsilon\nu x+6\ln(2+\sigma\upsilon\nu x)$, $x\in[0,2\pi]$

121) Αν είναι $a^x\geq a+e\ln x$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $a=e$.

122) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases}(x+2)(x-1)^2, & x<1\\ -(x^2-4x+3)^2, & x\geq 1\end{cases}$

ii) $g(x)=\begin{cases}1-\eta\mu x, & x\in[-\pi,0)\\ \sigma\upsilon\nu x-x, & x\in[0,2\pi]\end{cases}$

123) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1-\ln(x+1)$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

ii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

iii) Να αποδείξετε ότι $1+\ln(x+1)\leq e^x$ για κάθε $x>-1$.

iv) Αν είναι $a^x\geq 1+\ln(x+1)$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $a=e$.

124) Να αποδείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, η οποία ικανοποιεί για κάθε $x\in\Re$ την σχέση $f^2(x)+2f(x)=x^3+x+e^x$, δεν έχει κρίσιμα σημεία.

125) Να αποδειχθεί ότι:

i) $\ln x+\dfrac{1}{x-2}\leq -1$ για κάθε $x\in(0,2)$

ii) $(\ln 4x)\left(\ln\dfrac{9}{x}\right)\leq(\ln 6)^2$ για κάθε $x>0$

iii) $x^2(\ln x-1)-ex+e^2\geq 0$ για κάθε $x>1$.

126) Αν ισχύει η σχέση $x-1\leq ax\ln x$ για κάθε $x>0$, να βρείτε την τιμή του α є ℜ.

127) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2(a+1)\ln x+\beta x^2-(2a+\beta)x+1$. Να βρείτε τους α και β, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$.

128) Αν α, β > 0 και γι κάθε $x\in\Re$ ισχύει $a^x+\beta^x-2x\geq 2$, να δείξετε ότι $a\beta=e^2$.

129) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ και ισχύει η σχέση $f(x)\eta\mu 2x-x^2-6x\leq 0$ για κάθε $x\in\Re$, να δείξετε ότι $f(0)=3$.

130) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί την σχέση $f^3(x)+x^3=3xf(x)-1$. Αν το $f(a)$ είναι τοπικό ακρότατο της f, να αποδείξετε ότι $a=1$.

131) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x-2\ln x+3$ ως προς την μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης.

132) Να βρείτε τις τιμές των α, β ϵ ℜ, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=ax^3+\beta x^2-36x+5$$

να έχει στο σημείο $x_0=3$ τοπικό ακρότατο και η γραφική της παράσταση C_f να έχει σημείο καμπής το σημείο $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

133) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(a-\frac{2}{3}\right)x^3-\left(a+\frac{1}{2}\right)x^2-10x+7$. Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής στο $x_0=\frac{3}{2}$ και στην συνέχεια να μελετηθεί η f ως [προς την μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.

134) Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

με $\alpha\neq 0$ και $\beta^2=3\alpha\gamma$ δέχεται στο σημείο καμπής της οριζόντια εφαπτομένη.

135) Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα οι παρακάτω συναρτήσεις και να βρεθούν τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων.

i) $f(x)=\begin{cases} x^4-6x^2+2x+1, & x\leq 0 \\ x^4-4x^3+2x+1, & x>0 \end{cases}$

ii) $g(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+3x-1, & x\leq 2 \\ (x-3)^5+2, & x>2 \end{cases}$

136) Μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $\left(f'(x)\right)^3+\left(f'(x)\right)^2+f'(x)=e^x+x-1$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με οριζόντια εφαπτομένη.

ii) η f είναι κυρτή στο ℜ.

137) Μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο ℜ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $f'(x)+\left[f''(x)\right]^{2000}=\sigma\upsilon\nu^2 x-3x+e^{-x}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

138) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-\lambda x^2+1$. Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Στην συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.

139) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\beta x^3+6(\beta^2+\beta)x^2+2ax+1$, α, β ϵ ℜ. Να βρεθούν οι α και β, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει σημείο καμπής το Μ(0,1) και η C_f να δέχεται στο σημείο $\mathrm{N}(1, f(1))$ οριζόντια εφαπτομένη.

140) Έστω f παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδειχθεί ότι $f(a)+f(\beta)\le 2f\left(\dfrac{a+\beta}{2}\right)$ για κάθε α, β ϵ Δ.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

141) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x+3+\dfrac{5e^x}{1+e^x}$ και $g(x)=3x-2+\dfrac{\eta\mu x}{x}$. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f και C_g.

142) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-5x+6}{x^2-1}$. Να βρείτε:

i) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f

ii) τις πλάγιες ασύμπτωτες της C_f.

143) Αν η ευθεία ε: $2x-y+\beta=0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{(a+1)x^2-2ax+3}{3x-2}$, να αποδείξετε ότι α = 5 και β = -2.

144) Αν η ευθεία με εξίσωση $y=3x+4$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f:\Re\to\Re$ στο $+\infty$, να βρεθούν οι τιμές του μ ϵ ℜ, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu f(x)+6x}{xf(x)-3x^2+5x+2}=1$.

145) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$ ii) $g(x)=\dfrac{x^2+3x-5}{x+1}$ iii) $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

146) Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{xe^x-x}$ ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$ iii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\sigma\phi x}$

147) Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\varepsilon\varphi x}{1-\sigma\upsilon\nu 2x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$

148) Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\ln(\sqrt{x}+2)}$ ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x^3+x^2+x+1)\ln x}{e^{2x}}$

149) Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 e^x$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$

150) Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^4-4x^3+11$ ii) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

iii) $\mathrm{f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}}$ iv) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2x-3}$