Επαναληπτικό Θέμα Μαθηματικών Γ΄ προσανατολισμού,

σε όλη την ύλη

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΕΠΤΑ (7)

<u>ΘΕΜΑ</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x)=e^{x}+4e^{-x}\,,\ x\in R \text{ και } h(x)=\ln x\,,\ x>0$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$

Αν $f(x)=x+\frac{4}{x}$, $x>0$, τότε :

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία ,τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) **i.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2e$ έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1 , x_2 , όπου $x_1<2<x_2$

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)+f'(x)=2e$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (x_1,x_2)

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ε) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f η οποία διέρχεται απ το σημείο $A(0,8)$ και να δείξετε ότι η C_f είναι πάνω απ την (ε) για κάθε $x>0$, εκτός απ το σημείο επαφής.

στ) Αν ε: $y=-3x+8$ να δείξετε ότι η (ε) τέμνει την C_g σε σημείο $x_o\in(1,e)$.

ζ) Να δείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{f(\alpha)-4}{x-1}+\frac{f(\beta)+3\beta-8}{x-2}=0\,,\ \text{όπου } 0<\alpha\neq 2 \text{ και } 0<\beta\neq 1$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (1,2)

η) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν ισχύει :

$$f(\alpha+\beta)+f(3\alpha-\beta)=8$$

θ) Να δείξετε ότι

$$\frac{f(x)-5}{x-1} < \frac{4-f(x)}{2-x}, \quad 1<x<2$$

ι) Να υπολογίσετε το όριο :

$$K=\lim_{x\to 1}\frac{f(\lambda)-4x}{f(x)+3x-8} \quad , \text{ όπου } 0<\lambda \neq 2$$

ια) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{e}^{e^2}\frac{\ln^2 x+4}{x\ln x}\,dx$$

ιβ) Να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\eta\mu x)\,dx \geq \frac{16\pi-9}{6}$$

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΛΑΜΑΝΗΣ

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

από τον επιμελητή του

I like maths

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !

Ιορδάνη Χ. Κοσόγλου, Msc μαθηματικό του ΓΕ.Λ Αριδαίας

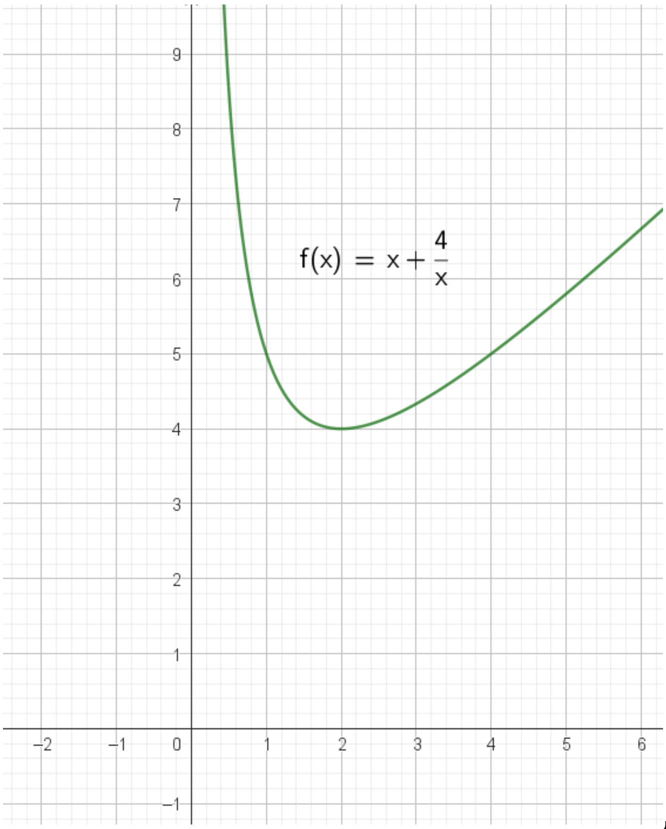
Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x)=e^{x}+4e^{-x}\ ,\ x\in R \text{ και } h(x)=\ln x\ ,\ x>0$$

α) Είναι **$f(x)=x+\frac{4}{x}$, x>0 , μην ξεχνάς ότι :** $e^{\ln x}=x$

β) $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$

- Για κάθε $x\in[2,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και
- Για κάθε $x\in(0,2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα
- f(2)=4
- το σημείο (2,4) είναι ολικό ελάχιστο της f και
- $f(x)\geq 4 \Leftrightarrow f(x)\geq f(2)$
- Σ.Τ της f , το διάστημα $[4,+\infty)$



,

γ) **i.** Ο αριθμός $2e\in f((0,2))$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,2] άρα υπάρχει μοναδικό x_1 ώστε $f(x_1)=2e$

Ομοίως για το x_2.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)+f'(x)=2e$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2)

<u>υπόδειξη</u>

Θεωρώ την συνάρτηση $\rho(x)=e^x(f(x)-2e)$ και εφαρμόζω Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Εναλλακτικά κάνω Bolzano για την συνάρτηση

$\rho(x)=f(x)+f'(x)-2e$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$. (λύση που πρότεινε ο συνάδερφος και φίλος κ. Γιάννης Καρεκλάς)

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

<u>Απάντηση</u>

Έχει Π.Α την y=x και Κ.Α την x=0

ε) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f η οποία διέρχεται απ το σημείο Α(0,8) και να δείξετε ότι η C_f είναι πάνω απ την (ε) για κάθε x>0 , εκτός απ το σημείο επαφής.

<u>Λύση</u>

Η f είναι ΚΥΡΤΗ στο $(0,+\infty)$, γιατί $f''(x)=\frac{8}{x^3}>0$ για κάθε x>0

Έστω (κ, f(κ)) το σημείο επαφής της (ε) με την C_f

Είναι $\quad$ ε: $y-f(\kappa)=f'(\kappa)(x-\kappa)$

Το σημείο Α ικανοποιεί την (ε) άρα

$$8-\kappa-\frac{4}{\kappa}=\left(1-\frac{4}{\kappa^2}\right)(-\kappa)$$

Απ όπου προκύπτει ότι κ=1 και ε: $y=-3x+8$

Από κυρτότητα και εφαπτομένη προκύπτει ότι :

$$f(x)\geq -3x+8 \ , x>0$$

Το «=» ισχύει για x=1

στ) Αν ε: $y=-3x+8$ να δείξετε ότι η (ε) τέμνει την C_g σε σημείο $x_o \in (1, e)$.

<u>**Λύση**</u>

Πρέπει να δείξω ότι η εξίσωση

$$g(x)=-3x+8$$

έχει ρίζα στο $(1, e)$

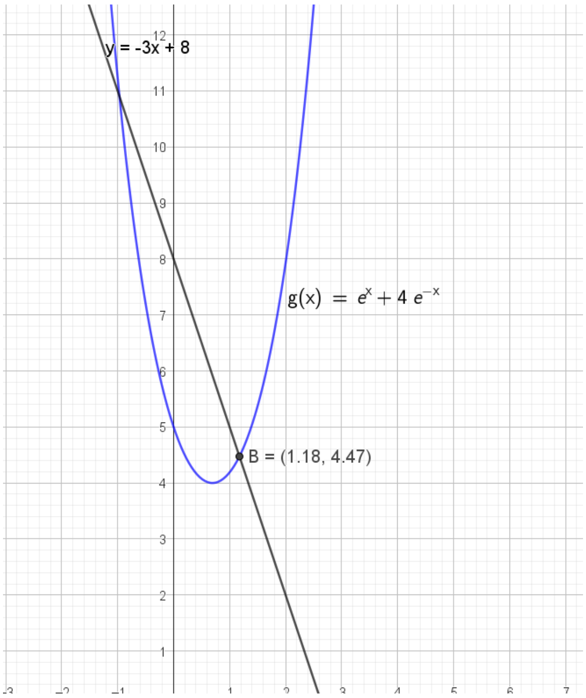
Θεωρώ την συνάρτηση

$$M(x)=g(x)+3x-8$$

- Συνεχής στο $[1, e]$
- $M(1)=e+\frac{4}{e}-5=f(e)-5<0$
  - γιατί, $2<e<3 \Leftrightarrow f(e)<f(3)$, όπου $f(3)=3+\frac{4}{3}<5$
- $M(e)>0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (1, e)$ ώστε

$$M(x_o)=0$$



ζ) Να δείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{f(\alpha)-4}{x-1}+\frac{f(\beta)+3\beta-8}{x-2}=0 \text{ , όπου } 0<\alpha\neq 2 \text{ και } 0<\beta\neq 1$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (1,2)

<u>Υπόδειξη</u>

Θεώρησε την πρωτοβάθμια συνάρτηση

$$\Pi(x)=(f(\alpha)-4)(x-2)+(f(\beta)+3\beta-8)(x-1)$$

και εφάρμοσε Θ.Bolzano στο [1,2]

η) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν ισχύει :

$$f(\alpha+\beta)+f(3\alpha-\beta)=8$$

<u>Απάντηση</u>

$\alpha=\beta=1$

θ) Να δείξετε ότι

$$\frac{f(x)-5}{x-1}<\frac{4-f(x)}{2-x}, \quad 1<x<2$$

<u>Υπόδειξη</u>

Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα [1, x] , [x,2]

και μονοτονία f'

ι) Να υπολογίσετε το όριο :

$$K=\lim_{x\to 1}\frac{f(\lambda)-4x}{f(x)+3x-8} \quad , \text{ όπου } 0<\lambda\neq 2$$

<u>Απάντηση</u>

$K=\frac{f(\lambda)-4}{0^{+}}=+\infty$

ια) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{e}^{e^2}\frac{\ln^2 x+4}{x\ln x}\,dx$$

<u>Υπόδειξη</u>

$$I=\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln^2 x+4}{\ln x}\,dx=\int_1^2 f(u)du=\frac{3}{2}+\ln 16$$

ιβ) Να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\eta\mu x)dx \geq \frac{16\pi-9}{6}$$

<u>Υπόδειξη</u>

$f(x)\geq -3x+8 \Longrightarrow f(\eta\mu x)\geq -3\eta\mu x+8$

Καλή συνέχεια!

I like maths

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !