



ΑΡΧΗ 1ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ-

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ;
Μονάδες 5
- A2.** Πότε δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
Μονάδες 4
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται 1-1;
Μονάδες 4
- A4.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
Μονάδες 4
- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1, είναι και γνησίως μονότονη.
- β.** Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.
- γ.** Η συνάρτηση $g \circ f$ ονομάζεται σύνθεση της g με την f .
- δ.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x - 2$.
- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
Μονάδες 4
- B2.** Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - 2}{\sqrt{x+1} - 1}$.
Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΑΡΧΗ 2ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ****Γ' ΤΑΞΗ**

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} , με τους άξονες.

Μονάδες 8

B4. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $(f \circ f \circ g)(x) + (f \circ g)(x) = f(e^x + x - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $g(x^{2023} + 2x^3) = g(4 - x^5)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Γ1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες. Στην περίπτωση όπου $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο υποσύνολο του στο οποίο ισχύει $f = g$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1, ενώ η συνάρτηση f δεν είναι 1-1.

Μονάδες 5

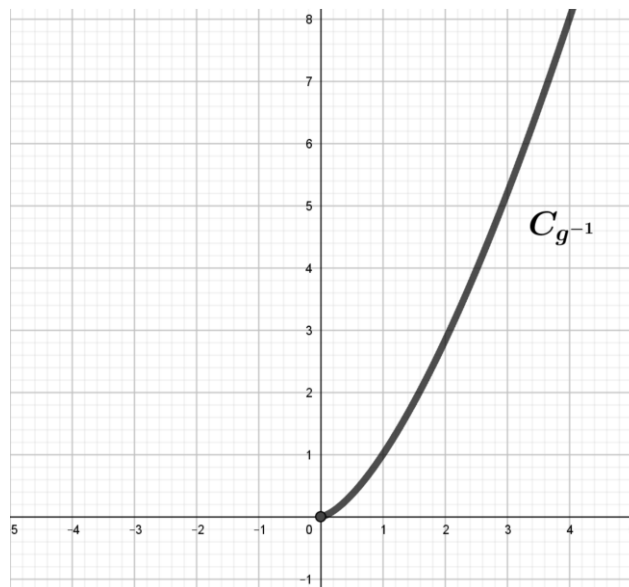
Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

Μονάδες 3

Γ4. Να αποδείξετε ότι $g^{-1}(x) = \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$.

Μονάδες 6

Γ5. Αν στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g^{-1} , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΑΡΧΗ 3ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ****Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $(g \circ f)(x) = \frac{-e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και

$g(x) = \frac{x-2}{1-x}$, $x \neq 1$. Δίνεται επίσης ότι $f(x) \neq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ η συνάρτηση

$h(x) = \left(x^2 + x - \frac{3}{4} + \ln \alpha + \alpha^3\right) (g \circ f)^{2023}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1.

Μονάδες 3

Δ4. Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι $x > f(g(x))$, για κάθε $x > 3$.

Μονάδες 3

Δ5. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^2(x) - 4}{x^2 - x}$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 4}$

Μονάδες 4