

**ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ: 2.1**  
**ΕΝΟΤΗΤΑ: ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ**

**ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

**ΤΡΟΠΟΣ 1 :** Ξεκινώ από το ένα μέλος της σχέσης που θέλω να δείξω, κάνω πράξεις (*ταυτότητες - επιμεριστική ιδιότητα*) και **με ισότητες** καταλήγω στο άλλο μέλος.

**ΤΡΟΠΟΣ 2 :** Κάνω πράξεις και στα δυο μέλη συγχρόνως **με ισοδυναμίες** και καταλήγω σε μια ισότητα που ισχύει, π.χ  $0x = 0$  ή  $\alpha = \alpha$  ή  $\beta = \beta$

**ΤΡΟΠΟΣ 3 :** Ξεκινώ και από τα δυο μέλη της σχέσης **χωριστά** και καταλήγω στην **ίδια** αλγεβρική παράσταση.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

Να αποδειχθούν οι ταυτότητες

**i.**  $(\alpha-1)^2-2(\alpha-1)(\alpha+1)+(\alpha+1)^2=4$

**ii.**  $(2x-1)^2-3x(x-1)+3x=(x+1)^2$

**iii.**  $\alpha(\alpha-2)-(\alpha-1)^2=-1$

**Ερώτηση 1** Πως μπορούμε να συμβολίσουμε έναν άρτιο (ζυγό) και πως έναν περιττό (μονό);

Θυμήσου τον τύπο της Ευκλείδειας Διαίρεσης απ το Γυμνάσιο.

Έστω ένας αριθμός  $n$ , όταν διαιρεθεί με τον αριθμό 2, τότε τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης είναι :.....ή.....

- Αν το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι ....., τότε η διαίρεση είναι **τέλεια**, άρα ο  $n$  είναι **πολλαπλάσιο** του 2, γράφεται.....
- Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι ....., τότε η διαίρεση ΔΕΝ είναι τέλεια, άρα ο  $n$  είναι ΔΕΝ είναι πολλαπλάσιο του 2, γράφεται.....

Άρα : Άρτιος :  $n = \dots\dots\dots$

Περιττός :  $n = \dots\dots\dots$

Άρτιος+Περιττός= Περιττός+Περιττός= (Περιττός)·(Περιττός)=

**Ερώτηση 2** Από τους αριθμούς  $\alpha=4\pi+2$ ,  $\beta=2\pi+2$ ,  $\gamma=4\pi^2+4\pi+1$ ,  $\delta=4\pi^2+12\pi+9$  όπου  $k \in \mathbb{Z}$ , ποιοι είναι άρτιοι και ποιοι περιττοί ; Γιατί ;

**ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

**Ενδεικτική δραστηριότητα**

Η Ελένη και ο Κώστας παρατηρούν ότι το άθροισμα  $3+11$  είναι άρτιος και το γινόμενο  $3 \cdot 11$  είναι περιττός. Κατόπιν αυτών,

η Ελένη ισχυρίζεται ότι:

**«αν το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιος, τότε το γινόμενό τους είναι περιττός.»**

Ο Κώστας ισχυρίζεται ότι:

**«αν το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι περιττός, τότε το άθροισμα τους είναι άρτιος.»**

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) οι ισχυρισμοί της Ελένης και του Κώστα λένε το ίδιο πράγμα;

β) είναι σωστός ο ισχυρισμός της Ελένης; Μπορείτε να βρείτε κατάλληλο αντιπαράδειγμα που να τον καταρρίπτει ;

γ) είναι σωστός ο ισχυρισμός του Κώστα; Μπορείτε να τον αποδείξετε ;

## ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

( **Άτοπο**: Δεν υπάρχει τρόπος να σταθώ-«Δεν βγάζει νόημα-Δεν στέκει»)  
Πότε χρησιμοποιείται, συνήθως, η μέθοδος; Τι κάνω σε αυτή τη μέθοδο ;

- Όταν το ζητούμενο χωρίζεται σε 2 κατηγορίες. Π.χ (άρτιοι-περιττοί) , (ρητοί-άρρητοι) , (μηδέν - όχι μηδέν) , ( $\geq 3$  <math><3) κ.ο.κ
- Σε αυτή τη μέθοδο, υποθέτω ότι το **ζητούμενο** της πρότασης που μου ζητούν να αποδείξω **ΔΕΝ** ΙΣΧΥΕΙ. Κάνω συλλογισμούς και καταλήγω σε ένα «αποτέλεσμα» που έρχεται σε **αντίθεση** με το **Δεδομένο-Υπόθεση** της πρότασης.

### **ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

Έστω  $a \in \mathbb{Z}$ . Αν ο  $a^2$  είναι άρτιος, τότε να αποδείξετε ότι ο  $a$  είναι άρτιος.  
ΔΕΔΟΜΕΝΟ ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ

#### **ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ**

Έστω ότι ο  $a$  **ΔΕΝ** είναι άρτιος. Άρα ο  $a$  θα είναι περιττός.

Συνεπώς γράφεται ως εξής :  $a=2\pi+1$ .

Όμως τότε ο  $a^2$  γράφεται:

$$a^2=(2\pi+1)^2=4\pi^2+4\pi+1=2 \cdot \underbrace{(2\pi^2+2\pi)}_{\kappa}+1=2\kappa+1,$$

Άρα ο  $a^2$  είναι περιττός. **Άτοπο** από την υπόθεση-δεδομένο (ο  $a^2$  είναι άρτιος). Κατέληξα σε άτοπο επειδή υπέθεσα ότι ο  $a$  είναι περιττός, συνεπώς ο  $a$  είναι ΑΡΤΙΟΣ.

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (δικό σας !)**

Έστω  $a \in \mathbb{Z}$ . Αν ο  $(a+3)^2$  είναι άρτιος, να δείξετε ότι ο  $a$  είναι περιττός.

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3(δικό σας !)**

7. Να δείξετε ότι:

i) Αν  $a$  ρητός και  $\beta$  άρρητος, τότε  $a+\beta$  άρρητος.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις :

i. Αν ο  $a$  είναι ρητός και ο  $\beta$  είναι άρρητος, τότε ο  $a-\beta$  είναι άρρητος.

ii. Αν  $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{5}$ , τότε να δείξετε ότι  $\beta \neq 5$

iii. Αν ο  $a$  είναι ρητός με  $a \neq 0$  και  $\beta$  άρρητος, τότε  $a \cdot \beta$  είναι άρρητος.

ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ, ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΑΙ ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΟΙ:

3,4,5 Α' ομάδας σελ52 και 7 ii) Β' Ομάδας σελίδα 53