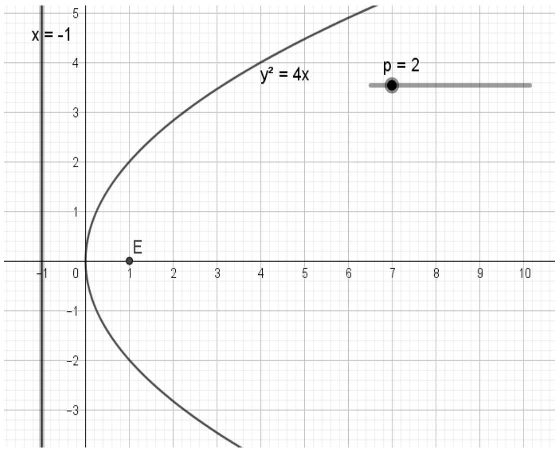
ΕΝΟΤΗΤΑ: Τι πρέπει να ξέρω απ τις Κωνικές Τομές.

Α . Παραβολή

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ) των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο Ε (εστία) και μια ευθεία δ(διευθετούσα).

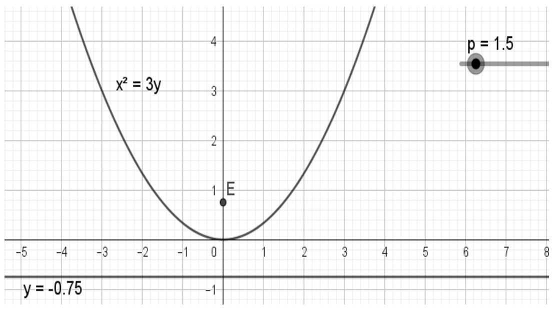
Εξίσωση Παραβολής : **$y^2=2px$ (1)**

- p και x ($x\neq0$) ομόσημοι
- Εστία το σημείο $E(\frac{p}{2},0)$
- Διευθετούσα η ευθεία δ: $x=\frac{-p}{2}$
- Έχει κορυφή την αρχή των αξόνων Ο(0,0).
- Βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η δ και το σημείο Ε.
- Ο άξονας xx΄είναι άξονας συμμετρίας της.
- Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο της (1) , η **ε:** $y\cdot y_1 =p(x+x_1)$ είναι εφαπτομένη της (1) στο Μ με συντελεστή $\lambda_\varepsilon=\frac{p}{y_1}$, $y_1\neq0$. Στην κορυφή της, η εφαπτομένη της είναι ο άξονας yy΄ (ε: x=0)



Εξίσωση Παραβολής : **$x^2=2py$ ή $y=\frac{x^2}{2p}$ (2)**

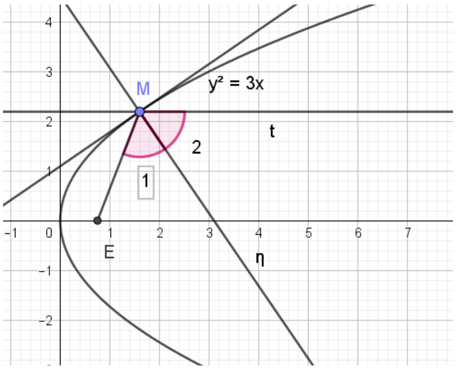
- p και y ($y\neq0$) ομόσημοι
- Εστία το σημείο $E(0,\frac{p}{2})$
- Διευθετούσα η ευθεία δ: $y=\frac{-p}{2}$
- Έχει κορυφή την αρχή των αξόνων Ο(0,0).
- Βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η δ και το σημείο Ε.
- Ο άξονας yy΄είναι άξονας συμμετρίας της.
- Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο της (1) , η **ε: $x\cdot x_1 = p(y+y_1)$** είναι εφαπτομένη της (1) στο Μ με συντελεστή $\lambda_\varepsilon =\frac{x_1}{p}$.



Ιδιότητες - Παρατηρήσεις

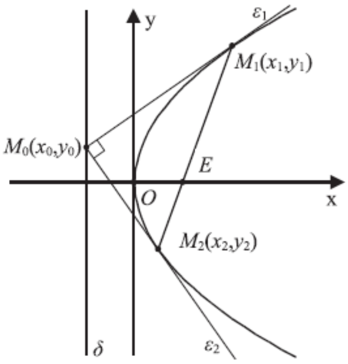
ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ Ιδιότητα (σελίδα 95)

Η κάθετη ευθεία (η) στην εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ημιευθείες ΜΕ ,Mt ($E\widehat{M}t$).
Δηλαδή $M_1=M_2$



*ΠΟΛΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ (εφαρμογή 1 σελίδας 97-ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ σχολικό έτος21-22)

Έστω ότι απ τα σημεία $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_1, y_1)$ παραβολής φέρνουμε τις εφαπτομένες της, οι οποίες τέμνονται κάθετα στο $M_o(x_o, y_o)$ που ανήκει στη διευθετούσα.



Η ευθεία M_1M_2 με εξίσωση $y_oy=p(x+x_o)$ καλείται πολική ευθεία, το σημείο M_o πόλος της M_1M_2 και έχει τη μορφή που θα είχε η εφαπτομένη της παραβολής στο M_o ,αν αυτό ανήκε στην παραβολή.

Ασκήσεις που πρέπει να γίνουν

- 1,2,3,4,5 σελίδας 99
- 2 σελίδας 100
- 4 – 8 σελίδας 100 για p = 2

<u>Β. Έλλειψη</u>

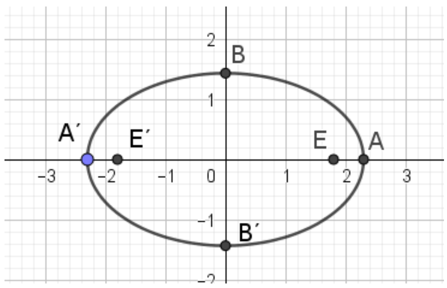
<u>ΟΡΙΣΜΟΣ :</u> Έλλειψη με **εστίες** Ε, Ε΄, ονομάζεται ο γ.τ των σημείων του επιπέδου Μ(x,y) των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα Ε και Ε΄ είναι σταθερό και μεγαλύτερο του ΕΕ΄. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε , συνήθως, με 2α και την απόσταση των εστιών- εστιακή απόσταση (ΕΕ΄) =2γ.

(ΜΕ)+(ΜΕ΄)=2α

<u>Εξίσωση Έλλειψης :</u> $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ή $\beta^2 x^2+\alpha^2 y^2=\alpha^2\beta^2$ **(3)**

- $\alpha>\gamma$
- Οι άξονες xx΄ , yy΄ είναι άξονες συμμετρίας της.
- Η (3) τέμνει τον xx΄ στα Α΄(-α, 0) και Α(α, 0).
- Η (3) τέμνει τον yy΄ στα Β(0,β) και Β΄ (0,-β).
- Το Ο(0,0) κέντρο συμμετρίας.
- 2α: είναι το μήκος μεγάλου άξονα , 2β: το μήκος μικρού άξονα
- 2γ : η εστιακή απόσταση
- $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$
- Ε(γ, 0) και Ε΄(-γ, 0), οι εστίες της (3).
- ε=$\frac{\gamma}{\alpha}$ εκκεντρότητα έλλειψης. Ισχύει $\varepsilon<1$
- Αν Μ(x_1, y_1) σημείο της (3) , η **ε:** $\frac{x_1x}{\alpha^2}+\frac{y_1y}{\beta^2}=1$ είναι

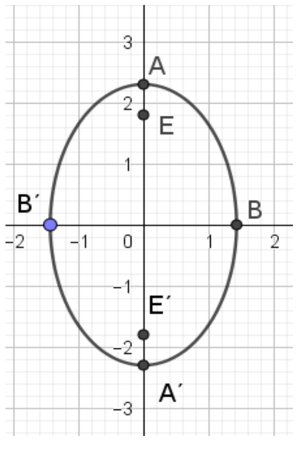
  εφαπτομένη της με συντελεστή λ=$\frac{-\beta^2x_1}{\alpha^2y_1}$, $y_1\neq0$



<u>Εξίσωση Έλλειψης :</u> $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ ή

$\beta^2 y^2+\alpha^2 x^2=\alpha^2\beta^2$ **(4)**

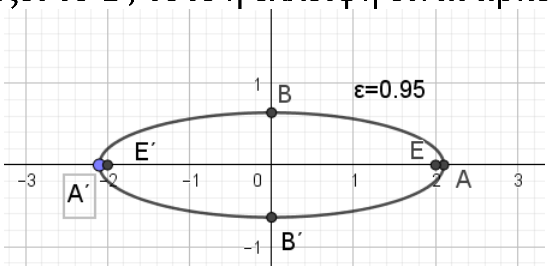
- α>γ
- Οι άξονες xx΄ , yy΄ είναι άξονες συμμετρίας της.
- Η (4) τέμνει τον yy΄ στα Α΄(0,-α) και Α(0,α).
- Η (4) τέμνει τον xx΄ στα Β(β,0) και Β΄ (-β,0).
- Το Ο(0,0) κέντρο συμμετρίας.
- 2α: είναι το μήκος μεγάλου άξονα , 2β: το μήκος μικρού άξονα.
- 2γ : η εστιακή απόσταση



- $\boldsymbol{\gamma^2=\alpha^2-\beta^2}$
- Ε(0,γ) και Ε΄(0,-γ), οι εστίες της (4).
- $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$ εκκεντρότητα έλλειψης. Ισχύει $\varepsilon < 1$
- Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο της (4) , η **ε:** $\frac{\mathbf{y_1 y}}{\boldsymbol{\alpha^2}} + \frac{\mathbf{x_1 x}}{\boldsymbol{\beta^2}} = \mathbf{1}$ είναι εφαπτομένη της με συντελεστή $\lambda=\frac{-\alpha^2 x_1}{\beta^2 y_1}$, $y_1 \neq 0$

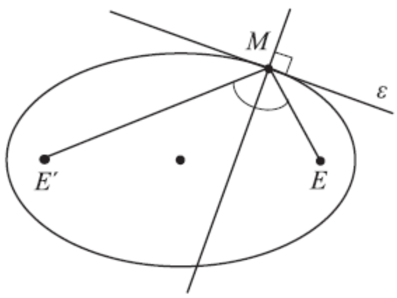
Ιδιότητες - Παρατηρήσεις

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δυο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς το Ο σημεία M_1 ,M_2 της έλλειψης λέγεται διάμετρος αυτής.
- Δυο ελλείψεις με την ίδια εκκεντρότητα είναι όμοιες.
- Αν το ε πλησιάζει το 0 , τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.
- Αν ε πλησιάζει το 1 , τότε η έλλειψη είναι αρκετά επιμήκης.



ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ Ιδιότητα (σελίδα 109)

Η κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\widehat{M}E$.



Ασκήσεις που πρέπει να γίνουν απ το σχολικό

- 1,2, σελίδας 111
- 3,5,6 σελίδας 112

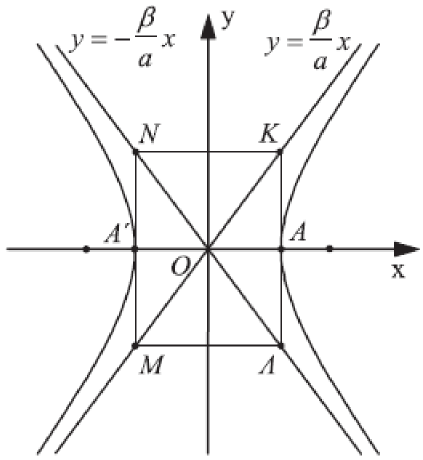
Γ. Υπερβολή

ΟΡΙΣΜΟΣ : Υπερβολή με **εστίες** Ε, Ε΄, ονομάζεται ο γ.τ των σημείων του επιπέδου Μ(x,y) των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα Ε και Ε΄ είναι σταθερή και μικρότερη του ΕΕ΄. Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου τη συμβολίζουμε , συνήθως, με 2α και την απόσταση των εστιών- εστιακή απόσταση (ΕΕ΄) =2γ.

$$|(ΜΕ)-(ΜΕ΄)|=2α$$

Εξίσωση Υπερβολής : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ή $\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2=\alpha^2\beta^2$ **(5)**

- $\gamma>\alpha$
- Οι άξονες xx΄ , yy΄ είναι άξονες συμμετρίας της.
- Η (5) τέμνει τον xx΄ στα Α΄(-α, 0) και Α(α, 0).
- Η (5) Δεν τέμνει τον yy΄.
- Το Ο(0,0) κέντρο συμμετρίας.
- 2γ : η εστιακή απόσταση
- $\boldsymbol{\gamma^2=\alpha^2+\beta^2}$
- Ε(γ, 0) και Ε΄(-γ, 0), οι εστίες της (5).
- ε=$\frac{\gamma}{\alpha}$ εκκεντρότητα υπερβολής. Ισχύει $\varepsilon > 1$
- Αν Μ(x_1, y_1) σημείο της (5) , η **ε:** $\frac{x_1x}{\alpha^2}-\frac{y_1y}{\beta^2}=1$ είναι εφαπτομένη της με συντελεστή λ=$\frac{\beta^2x_1}{\alpha^2y_1}$, $y_1\neq0$
- Οι $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $y=\frac{-\beta}{\alpha}x$ είναι ασύμπτωτες της (5).
- Το ΚΝΜΛ ονομάζεται ορθογώνιο βάσης της υπερβολής. Όπου Κ(α, β) , Λ(α,-β),Ν(-α, β) Μ(-α, -β)



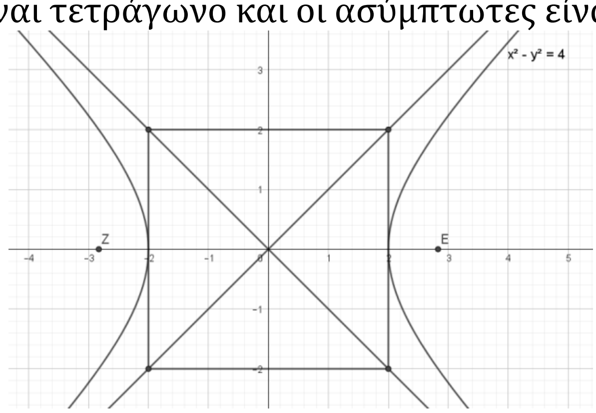
Εξίσωση Υπερβολής : $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ ή $\beta^2 y^2 - \alpha^2 x^2=\alpha^2\beta^2$ **(6)**

- $\gamma>\alpha$
- Οι άξονες xx΄ , yy΄ είναι άξονες συμμετρίας της.
- Η (6) τέμνει τον yy΄ στα Α΄(0,-α) και Α(0,α).
- Η (6) Δεν τέμνει τον xx΄.
- $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$
- Ε(0.γ) και Ε΄(0,-γ), οι εστίες της (6).

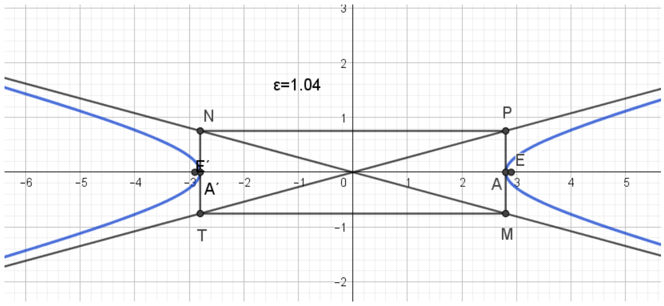
- Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο της (6) , η $\boldsymbol{\varepsilon}$**:** $\frac{\mathbf{y_1 y}}{\boldsymbol{\alpha^2}} - \frac{\mathbf{x_1 x}}{\boldsymbol{\beta^2}} = \mathbf{1}$ είναι εφαπτομένη της με συντελεστή $\lambda = \frac{\alpha^2 x_1}{\beta^2 y_1}$
- Οι $y=\frac{\alpha}{\beta}x$, $y=\frac{-\alpha}{\beta}x$ είναι ασύμπτωτες της (6).

Ιδιότητες - Παρατηρήσεις

- Αν α=β ,τότε η υπερβολή καλείται ισοσκελής. Το ορθογώνιο της βάσης είναι τετράγωνο και οι ασύμπτωτες είναι y=x, y=-x

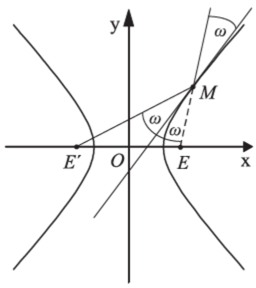


- Αν ε πλησιάζει το 1 , τότε η υπερβολή έχει επιμήκης ορθογώνιο βάσης.



ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ Ιδιότητα (σελίδα 109)

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής στο σημείο Μ διχοτομεί τη γωνία Ε΄ΜΕ



Ασκήσεις που πρέπει να γίνουν

- 1,2,3,4,7 σελίδας 123