

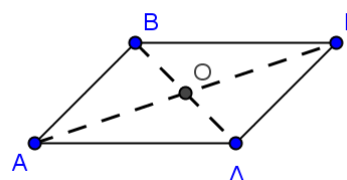
ΕΝΟΤΗΤΑ : ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
 ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ : 5.1 - 5.2 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ



Ορισμός: Παραλληλόγραμμο λέγεται το.....

Ιδιότητες Παραλληλογράμμου

- 1) $ABΓΔ \# \Rightarrow AB = ΔΓ \text{ και } ΒΓ = ΑΔ$
- 2) $ABΓΔ \# \Rightarrow \hat{A} = \hat{\Gamma} \text{ και } \hat{B} = \hat{\Delta}$
- 3) $ABΓΔ \# \Rightarrow ΟΑ = ΟΓ \text{ και } ΟΒ = ΟΔ$



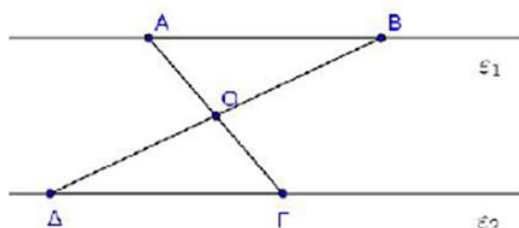
Ασκήσεις που έχω παραλληλόγραμμο!
 3 και 4 Κατανόησης - 1 και 4 Εμπέδωσης σχολικού (παράγραφος 5.2)

Κριτήρια (Πως αποδεικνύω ότι ένα τετράπλευρο είναι #;
 Αρκεί να ισχύει ένα απ τα παρακάτω!)

- 1) Αν οι απέναντι πλευρές ανά δυο είναι ίσες , τότε $ABΓΔ \#$
 $\{AB = ΔΓ \text{ και } ΒΓ = ΑΔ \} \Rightarrow ABΓΔ \#$
- 2) Αν δυο πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, τότε $ABΓΔ \#$ (αποδεικνύεται μέσω της (1))
 $\{AB = ΔΓ \text{ και } AB // ΔΓ \} \Rightarrow ABΓΔ \#$
- 3) Αν οι απέναντι γωνίες ανά δυο είναι ίσες , τότε $ABΓΔ \#$
 $\{ \hat{A} = \hat{\Gamma} \text{ και } \hat{B} = \hat{\Delta} \} \Rightarrow ABΓΔ \#$
- 4) Αν οι διαγώνιοι διχοτομούνται , τότε $ABΓΔ \#$ (αποδεικνύεται μέσω της (1))
 $\{ ΟΑ = ΟΓ \text{ και } ΟΒ = ΟΔ \} \Rightarrow ABΓΔ \#$

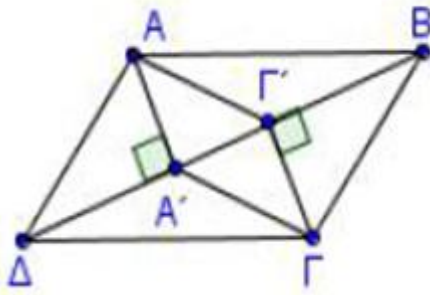
Ασκήσεις που θέλω να δείξω ότι είναι παραλληλόγραμμο!
 1 και 5 Κατανόησης - 2 Εμπέδωσης σχολικού (παράγραφος 5.2)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο (1618 ΤΘΔΔ 2022)



Στο διπλανό σχήμα $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και O μέσο της $BΔ$.
 α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΟΒ, ΟΓΔ$ και ίσα και να γραφούν τα ίσα στοιχεία τους.
 β) Να δείξετε ότι $ABΓΔ \#$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο (είναι η 1600 ΤΘΔΔ 2022, όμοια με 1534)



Στο διπλανό σχήμα ισχύουν ,
 $ΑΒΓΔ \#$, $Γ'$ προβολή του $Γ$ στην $ΒΔ$, $Α'$
προβολή του $Α$ στην $ΒΔ$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $ΓΓ' = ΑΑ'$

β) $ΓΓ' // ΑΑ'$

γ) το $ΑΓ'ΓΑ'$ είναι $\#$.

Συνευθειακά Σημεία

Α' Τρόπος : Όταν μου ζητούν να δείξω ότι τρία σημεία $Α, Γ, Β$ είναι συνευθειακά, το $Γ$ ανάμεσα και τα $Α, Β$ είναι στην ίδια ευθεία , τότε αρκεί να δείξω ότι η γωνία $Γ$ είναι ίση με 180° .

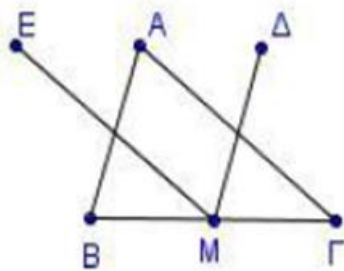
Β' Τρόπος : Αρκεί να δειχθεί ότι $ΑΓ // \epsilon$ και $ΓΒ // \epsilon$, όπου ϵ δίνεται. Τότε τα $Α, Γ, Β$ συνευθειακά. Γιατί, από σημείο εκτός ευθείας ($Γ$), πόσες ευθείες παράλληλες μπορώ να φέρω στην ευθεία; (*Ευκλείδειο Αίτημα*)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο (Άσκηση 3 Αποδεικτικές σχολικού βιβλίου)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Προεκτείνουμε τη $ΔΓ$ κατά $ΓΕ = ΔΓ$, και τη $ΔΑ$ κατά $ΑΖ = ΔΑ$. Να δείξετε ότι τα σημεία $Ζ, Β, Ε$ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3^ο (1535 – ΤΘΔΔ 2022)



Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και $Μ$ μέσο της $ΒΓ$. Ισχύουν :

το τμήμα $ΜΔ // ΑΒ$ και το $ΜΕ // ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΑΕ$

β) Να αποδείξετε ότι $Δ, Α, Ε$ είναι συνευθειακά.

γ) Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΒΓ$.

ΚΑΛΗ ΜΕΛΕΤΗ



ΕΝΟΤΗΤΑ : ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
 ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ : 5.3 - 5.4
 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ - ΡΟΜΒΟΣ

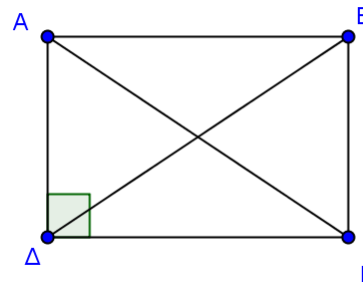


Ορισμός: Ορθογώνιο καλείται το Παραλληλόγραμμο που έχει μια ορθή γωνία.

Γιατί: Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μια ορθή γωνία τότε και η απέναντι της γωνία θα είναικαι επειδή το άθροισμα των γωνιών του παραλληλογράμμου είναι $(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$, άρα και οι άλλες δυο γωνίες θα είναι από $^\circ$ (η κάθε μία).

Ιδιότητες Ορθογωνίου

- 1) ΟΛΕΣ τις ιδιότητες του #
- 2) $AB\Gamma\Delta$ Ορθογώνιο \Rightarrow $A\Gamma = B\Delta$.



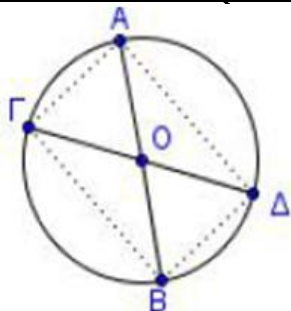
Κριτήρια Πως αποδεικνύω ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο ; ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- 1) Αν $\left\{ \begin{array}{l} AB\Gamma\Delta \# \\ + \\ \text{μια ορθή γωνία} \end{array} \right. \Rightarrow AB\Gamma\Delta \text{ ορθογώνιο}$
- 2) Αν $\left\{ \begin{array}{l} AB\Gamma\Delta \# \\ + \\ A\Gamma = B\Delta \end{array} \right. \Rightarrow AB\Gamma\Delta \text{ ορθογώνιο}$

- 3) Αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει **3** ορθές \Rightarrow **$AB\Gamma\Delta$ Ορθογώνιο.**
- 4) Αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει όλες τις γωνίες του ίσες \Rightarrow **$AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 $^\circ$ (Να λυθούν οι Άσκηση 1ι) Κατανόησης - Άσκηση 1 Εμπέδωσης)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 $^\circ$ (1683)



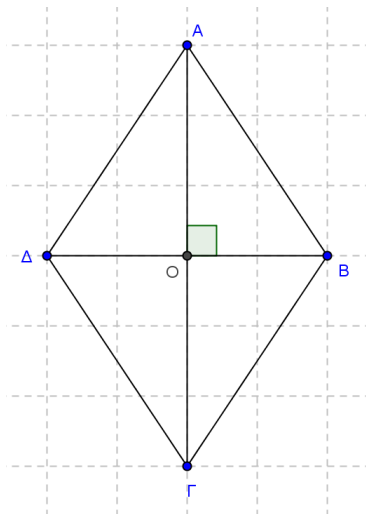
Δίνεται κύκλος και $\Gamma\Delta$, AB διάμετροι αυτού όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α) Να αποδείξετε ότι οι χορδές $A\Gamma, B\Delta$ είναι ίσες.
- β) Να αποδείξετε ότι το $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Ορισμός: Ρόμβος καλείται το Παραλληλόγραμμο που έχει **δυο** διαδοχικές πλευρές ίσες.

Ιδιότητες:

- 1) $ABΓΔ$ Ρόμβος \Rightarrow $ΑΓ$ κάθετη $ΒΔ$
- 2) $ABΓΔ$ ρόμβος \Rightarrow $ΑΓ$ και $ΒΔ$ διχοτομούν τις γωνίες του.
- 3) $ABΓΔ$ ρόμβος \Rightarrow $ABΓΔ \#$
 άρα έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.



Κριτήρια Πως αποδεικνύω ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος ; ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- 1) $AB=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ \Rightarrow$ $ABΓΔ$ Ρόμβος.
- 2) $\left\{ \begin{array}{l} ABΓΔ \# \\ + \\ \text{δυο διαδοχικές πλευρές ίσες} \end{array} \right. \Rightarrow$ $ABΓΔ$ Ρόμβος.
- 3) $\left\{ \begin{array}{l} ABΓΔ \# \\ + \\ ΑΓ \text{ κάθετη στην } ΒΔ \end{array} \right. \Rightarrow$ $ABΓΔ$ Ρόμβος
- 4) $\left\{ \begin{array}{l} ABΓΔ \# \\ + \\ \text{μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία} \end{array} \right. \Rightarrow$ $ABΓΔ$ Ρόμβος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο (Άσκηση 1ι) Κατανόησης)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο (Άσκηση 1 Αποδεικτικές)

Έστω $ABΓ$ τρίγωνο , $ΒΔ$ η διχοτόμος του και $Μ$ μέσο της $ΒΔ$. Από το $Δ$ φέρνω παράλληλη προς τη $ΒΓ$ που τέμνει την AB στο $Ε$. Αν η EM τέμνει τη $ΒΓ$ στο $Ζ$ να αποδείξετε ότι το $ΔΕΒΖ$ είναι ρόμβος.

ΛΥΣΗ (συμπλήρωσε τα κενά)

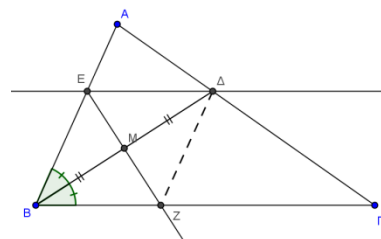
$ΕΔ // ΒΖ$ άρα εντός εναλλάξ ίσες.....

Το $ΒΕΔ$ είναι ισοσκελές και EM είναι.....

Επίσης το $ΒΕΖ$ είναι γιατί ;

Το $ΒΕΔΖ$ είναι $\#$ γιατί

Το $ΒΕΔΖ$ είναι ρόμβος απ το κριτήριο



Για το σπίτι απ το σχολικό: 2 και 4 εμπέδωσης, 3 Αποδεικτικές.

Θέμα 1557 (ΤΘΔΔ 2022-επίπεδο 2 – ΟΜΟΙΑ ΜΕ 1538)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB .
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
β) Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 15)

Θέμα 1538 (ΤΘΔΔ 2022-επίπεδο 2)

Δίνεται $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AB=2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

Θέμα 1539 (ΤΘΔΔ 2022-επίπεδο 2)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE=OZ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $DE=BZ$ (Μονάδες 12)
β) το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Θέμα 1559 (ΤΘΔΔ 2022-επίπεδο 2)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου MA του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $MA=AE$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)
β) Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM . (Μονάδες 13)

Θέμα 1570 (ΤΘΔΔ 2022-επίπεδο 2)

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AD . Προεκτείνουμε το AD (προς το Δ) κατά τμήμα $DE=AD$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
β) Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

Θέμα 1564 (ΤΘΔΔ 2022-επίπεδο 2) – το σχήμα θα δίνεται ! (καλύτερα στην 5.6)

ΝΑ ΜΗΝ ΓΙΝΕΙ!

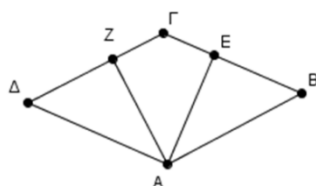
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$), το ύψος του AD και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα BDE και ΓDZ είναι ίσα. (Μονάδες 15)
β) Το τετράπλευρο $AZDE$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

Θέμα 1575 (ΤΘΔΔ 2022-επίπεδο 2) Το σχήμα δίνεται.

Το $AB\Gamma\Delta$ στο σχήμα είναι #. Η AE κάθετη στη $B\Gamma$ και η AZ κάθετη στη $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



- α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ=AE$. (Μονάδες 12)
β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ=AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

Θέμα 1740 (ΤΘΔΔ 2022-επίπεδο 4)

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. **(Μονάδες 20)**

β) Στην περίπτωση που και οι δυο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 14887 (ΤΘΔΔ 2022 επίπεδο 4)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν $A\Delta$ και AH τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta\hat{A}H} = 90^\circ$.

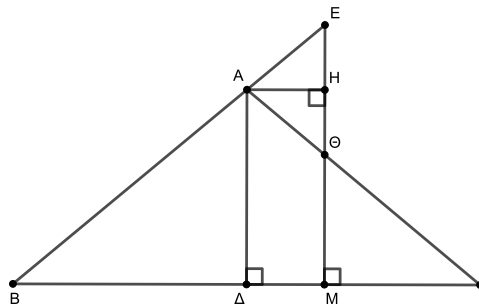
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

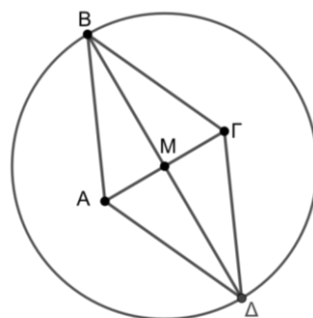
γ) $M\Theta + ME = 2A\Delta$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 13857 (ΤΘΔΔ 2022 επίπεδο 4)

α) Στο σχήμα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο M . Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. **(Μονάδες 8)**



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

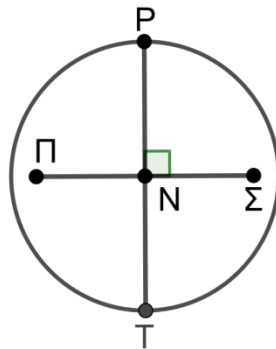
Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

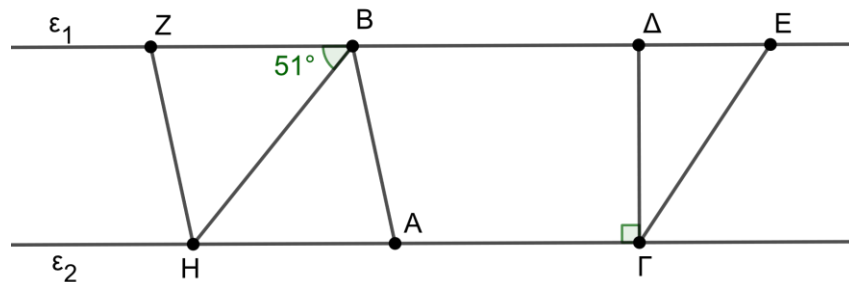
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $ΠΣ$ τέμνονται κάθετα στο N και $ΠN = NΣ$. Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N .

Να αποδείξετε ότι $ΠP = PΣ = ΣT = TΠ$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 13842 (ΤΘΔΔ 2022 επίπεδο 2)



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο $ABZH$ είναι ρόμβος.

Επίσης δίνεται ότι $\widehat{ZBH} = 51^\circ$ και ότι η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{H}B$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η γωνία \hat{E} του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 10)