

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ
ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 23 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε x στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 7

A2. Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α. Πώς ορίζεται η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i για $i=1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 4

β. Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$ για $i=1, 2, \dots, k$.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει ότι $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

γ. Ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta\mu x$.

δ. Οι ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

ε. Πλάτος μίας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - \alpha x + 6$ με $\alpha, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(4) = 12$.

B1. Να βρείτε την $f'(x)$ (μον. 3) και να υπολογίσετε την τιμή του α (μον. 3).

Μονάδες 6

B2. Για $\alpha=4$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της (μον. 5) και να βρείτε τα ακρότατά της (μον. 3).

Μονάδες 8

B3. Για $\alpha=4$ να δείξετε ότι $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

B4. Για $\alpha=4$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 50 μαθητές/μαθήτριες ενός ΕΠΑ.Λ, για να μεταβούν από το σπίτι στο σχολείο τους, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους c , όπου

$$\frac{2}{c} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
[14, ...)	15	30	15
[..., ...)	20	40	...
[..., ...)
[..., ...)	5	...	50
Σύνολο	50	100	

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του πλάτους c .

Μονάδες 8

Γ2. Για $c=8$ να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 12

Γ3. Για $c=8$ να βρείτε το ποσοστό των μαθητών/μαθητριών που χρειάστηκαν τουλάχιστον μισή ώρα για να μεταβούν στο σχολείο τους.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x(3x-2) - 8$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$.

Μονάδες 5

Δ2. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα και η θέση του x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $x(t) = f(t)$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

Ζητούνται:

α. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t=4$ δευτερόλεπτα.

Μονάδες 5

β. Η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο.

Μονάδες 8

γ. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t=10$ δευτερόλεπτα.

Μονάδες 7

ΕΥΔΕΙΧΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 10000 ΚΟΒΟΪΩΝ

Θέμα Α

A1. Σελίδα 28 (δευτέρα + γιτσα)

A2. Σελίδα 65

A3. α) \wedge β) Σ γ) \wedge δ) \wedge
ε) Σ

Θέμα Β

$$f(x) = 2x^2 - ax + 6, \quad a, x \in \mathbb{R}$$
$$f'(4) = 12$$

B1. $f'(x) = (2x^2 - ax + 6)' = 4x - a$

Είχαν $f'(4) = 12$ ή $4 \cdot 4 - a = 12$ ή
 $16 - a = 12$ ή
 $16 - 12 = a$ ή
 $4 = a$.

B2. $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$
 $f'(x) = 4x - 4$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < 1$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		\downarrow	\uparrow

(1, 4)
0. E

$f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$, $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1]$

B3. Το $(1, 4)$ Ο.Ε.Τ.η $f(x)$ άρα
 $f(x) \geq f(1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f(1) = 4$ άρα $f(x) \geq 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B4. Η εφαπτομένης της $f(x)$ στο βημείο
με $x = -1$ έχει βωτρεβτίν $f'(-1)$.

$f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 4 = -8$. άρα είναι η:

$$y = -8x + \beta$$

Διέρχεται από το $(-1, f(-1)) = (-1, 12)$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } 12 &= -8 \cdot (-1) + \beta \quad \eta \\ 12 &= 8 + \beta \\ 4 &= \beta. \end{aligned}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$(ε): y = -8x + 4$$

Θέμα Γ

$$v=50, \quad \frac{q}{c} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$\begin{aligned} \text{Γ1)} \quad & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Αρα $\frac{q}{c} = \frac{1}{4}$ ή $\boxed{8=c}$

Γ2)

Χρονος	V_i	$f_i\%$	N_i
[14, 22)	15	30	15
[22, 30)	20	40	35
[30, 38)	10	20	45
[38, 46)	5	10	50
Σύνολο	50	100	X

[3] Τουλάχιστον για ώρα ή 30 λεπτά

Χρησιμοποιώ 15 προϊόντα στα 50

$$\frac{15}{50} = \frac{30}{100} \text{ ή } 30\%$$

Θέμα Δ

Δ1 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x \cdot (3x - 2) - 8 \text{ ή } (x \geq 0)$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$$

Δ2. $x(t) = f(t)$
 ↓ ↓
 m sec

a. η ταχύτητα για $t=4$ είναι

$$\begin{aligned} v(4) &= x'(4) = f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = \\ &= 48 - 8 - 8 = \\ &= 32 \text{ m/sec.} \end{aligned}$$

β. Ακίνητο $v(t) = 0$ ή

$$x'(t) = 0 \text{ ή}$$

$$f'(t) = 0 \text{ ή}$$

$$3t^2 - 2t - 8 = 0 \quad t \geq 0$$

$$\Delta = 4 + 96 = 100$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{6} \begin{cases} \rightarrow t_1 = 2 \text{ sec} \\ \left(t_2 = -\frac{4}{3} \text{ Απορ.} \right) \end{cases}$$

Για $t = 2$ το σώμα είναι ακίνητο.

γ. $a(10) = v'(10) = x''(10) = f''(10)$

Βρίσκω $f''(t) = 6t - 2$

Άρα $a(10) = 6 \cdot 10 - 2 = 58 \text{ m/sec}^2$

Καλά Αποτελέσματα!