# <u>ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ Επιμελητή I Like Maths για τις Πανελλήνιες 2021!</u>

## <u>ΘΕΜΑ Α</u>

## Α1 . ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Να αποδεχθεί η παρακάτω Πρόταση.

«Έστω δυο συναρτήσεις f ,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f , g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,

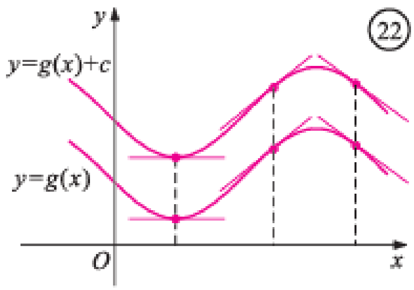
να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x)= g(x)+ c$ . »

*Η απόδειξη βρίσκεται στην σελίδα 133*

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο $\Delta$ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο $\Delta$. Άρα, υπάρχει σταθερά $C$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■




## Α2. ΟΡΙΣΜΟΣ

Πότε η ευθεία y =λx+β , λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο - ∞ ;

*Η σωστή διατύπωση του ορισμού βρίσκεται στην σελίδα 162*

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)] = 0.$$

## A3. Σ – Λ με Αιτιολόγηση

Αν για το σημείο $A(x_o, f(x_o))$ μιας συνάρτησης $f(x)$ ισχύει $f''(x_o) = 0$ , τότε το σημείο Α είναι πάντα Σ.Κ της $C_f$.

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό , γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α) . (μονάδες 3)

α ) Ψ β )αντιπαράδειγμα η ΚΥΡΤΗ $x^4$ στο σημείο της (0,0).

## A4. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ (χωρίς απόδειξη)

Να διατυπωθεί το Θεώρημα Μεγίστης – Ελαχίστης Τιμής (Θ.Μ.Ε.Τ) για κάθε συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό [α, β].

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ

Να διατυπωθεί το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f(x) στο [α, β].

*Η σωστή διατύπωση βρίσκεται στις σελίδες 77 και 128 αντίστοιχα.*

I like maths

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !

**Και μία ΑΣΚΗΣΗ !**

[ Εμπνευσμένη απ τις 3 Α΄ , 1Β΄ και 6Β΄ σχολικού βιβλίου στις σελίδες 69,132 αντίστοιχα , πρόταση μου, για την 3η Διαλυκειακή Δοκιμασία]

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{(\mu+1)x^2+4}$, $\mu > -1$, $x\in R$.

**α)** Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, να βρεθεί ο πραγματικός μ.

**μονάδες 3**

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε $\mu=0$.

**β)** Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$. **μονάδες 4**

**γ)** Να εξεταστεί η συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **μονάδες 5**

**δ)** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)$. **μονάδες 4**

**ε)** Να βρεθεί το Π.Ο της εξίσωσης και να λυθεί:

$$f(e^x-1)+f(\ln x-1)=4$$

**μονάδες 5**

**στ)** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $2\cdot f'(\xi)+2=f(2)$

**μονάδες 4**

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ</u>

**α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\mu+1+\frac{4}{x^2}}}{x}=\sqrt{\mu+1}$ , ……… $\mu=0$

**β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-\lambda\right)]$

- για $1-\lambda>0$ το όριο είναι $+\infty$
- για $1-\lambda<0$ το όριο είναι $-\infty$
- για $\lambda=1$ είναι 0

**γ )** Γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Ο.Ε το σημείο (0,2)

**δ )** Σ.Τ το $[2,+\infty)$

**ε )** $f(e^x-1)>2$ και $f(\ln x-1)\geq 2$ , το «=» για την μεν πρώτη ΔΕΝ ισχύει μιας και το πεδίο ορισμού της εξίσωσης είναι το $(0,+\infty)$ και για την δεύτερη το «=» ισχύει για $x = e$.

- Για $x = e$ , $f(e^x-1) + f(\ln x-1) = f(e^x-1) + 2 > 4$
- Για $x > 0$ και $x \neq e$ , $f(e^x-1)+ f(\ln x-1) > 4$

Άρα Αδύνατη εξίσωση!

**στ )** Θ.Μ.Τ στο [0,2] για την f(x).

I like maths

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !

Ιορδάνης Χ. Κοσόγλου