ΘΕΜΑ Α

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Α1 σχ. βιβλίο σελ 194

Α2 >> σελ 188

Α3 >> σελ 259

Α4 α → Λ , β → Σ , γ → Λ , δ → Σ

ε → Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1 $|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$(z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \underset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} (x-4)^2+y^2 =$

$= 4(x-1)^2 + 4y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4 \Leftrightarrow |z|=2.$

Β2 α) $|z_1|=|z_2|=4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \dfrac{4}{z_1}, \quad \bar{z}_2 = \dfrac{4}{z_2}$

• Αν $\bar{w} = w \Leftrightarrow$ - - - - - Καταλήγω σε κάτι που ισχύει.

β) $|w| = \left|\dfrac{2z_1}{z_2} + \dfrac{2z_2}{z_1}\right| \leq \left|\dfrac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\dfrac{2z_2}{z_1}\right| = 4$

Άρα $|w| \leq 4$ και ο w πραγματικός

Άρα $\boxed{-4 \leq w \leq 4}$

B3

$w = -4 \iff 2\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right) = -4 \iff$

$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1} = -2 \iff z_1^2+z_2^2+2z_1z_2 = 0$

$\iff (z_1+z_2)^2 = 0 \iff z_1+z_2=0 \iff z_1 = -z_2$

Αν $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ έχω:

$(A\Gamma) = |z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1|\,|2i-1| =$
$= 2\sqrt{5}$

$(B\Gamma) = |z_3 - z_2| = |z_3 + z_1| = |z_1|\,|2i+1| = 2\sqrt{5}$

Άρα $(A\Gamma) = (B\Gamma)$ οπότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές. ∎

ΘΕΜΑ Γ

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Γ1 $f(x)$: $\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \iff x-1=0 \iff x=1.$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Επειδή η $f(x)$ συνεχής στο 1.

Άρα η $f(x)$ $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

$\Delta_1=(-\infty,1]$, $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ f(1)\right]$

$\Delta_2=[1,+\infty)$, $f(\Delta_2)=\left[f(1),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot\dfrac{1}{x^2+1}=0\cdot0=0.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty.$

Άρα $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(0,+\infty).$

Γ2 $f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right)=\underset{\substack{\| \\ f(2)}}{\dfrac{e^2}{5}}\ \xrightarrow[\text{άρα "1-1"}]{f\ \uparrow}\ e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2 \Longrightarrow$

$\dfrac{e^3}{2}=\dfrac{e^x}{x^2+1}\Longrightarrow\dfrac{e^3}{2}=f(x)$. και το $\dfrac{e^3}{2}\in f(\Delta)$

και η $f\ \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα από Ενδ. τιμών προκύπτει. ∎

Γ3 **Α' Τρόπος** Για κάθε $t\in[2x,4x]$ είναι: ④

$$2x\le t\le 4x \xRightarrow[f\uparrow]{} f(t)\le f(4x)$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)\,dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2x\cdot f(4x)$$

γιατί;

Β' Τρόπος

- Θεωρώ την $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, κάνω ΘΜΤ στο $[2x,4x]$

και μετά $t<4x \Leftrightarrow \ldots$ μονοτονία $f(x)$

- $F'(x)=f(x)$

προκύπτει το ζητούμενο!

Γ4 Η $g(x)$ είναι συνεχής στο 0, γιατί:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim \frac{\int_{2x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{4x} f(t)\,dt}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\int_{0}^{4x} f(t)\,dt - \int_{0}^{2x} f(t)\,dt}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\left[f(4x)\cdot 4 - 2\cdot f(2x)\right] \underset{\text{η } f(x)}{\overset{\text{συνεχής}}{=}}$$

$$= 4f(0) - 2f(0) = 2\cdot f(0) = 2\cdot 1 = 2 = g(0).$$

Η $g(x)$ για κάθε $x>0$, έχει $g'(x) = \dfrac{\left(4f(4x)-2f(2x)\right)x - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\left(4f(4x)-2f(2x)\right)x - 2xf(4x)}{x^2} = \dfrac{2x\left(f(4x)-f(2x)\right)}{x^2} =$

$= \dfrac{2\left(f(4x)-f(2x)\right)}{x} > 0$ γιατί η <u>Απομονοτονία</u> $f(x)$.

Άρα η $g'(x)>0$ για κάθε $x>0 \Longrightarrow$

και $g(x)$ συνεχής στο 0.

$g(x) \uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Η διαφορική εξίσωση που δίνεται: $f'(x)\cdot\left(e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right)=2$

$\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)}+f'(x)\cdot e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'-\left(e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$

$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$ απο Θεώρημα (συνέπειες Θ.ΜΤ)

$\Rightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$, όμως $f(0)=0$ (υπόθεση) θέτω

λοιπόν οπου $x=0$, $e^0-e^0=2\cdot 0+c \Leftrightarrow \boxed{c=0}$

Άρα: $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Rightarrow e^{2f(x)}-1=2xe^{f(x)} \Rightarrow$

$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}=1 \xrightarrow[\text{το } x^2]{\text{προσθαφαιρώ}} e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=1+x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(e^{f(x)}-x\right)^2=1+x^2 \Rightarrow \left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{1+x^2}$ (*)

Όμως $1+x^2>0$ Άρα η συνάρτηση $e^{f(x)}-x=g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. και επειδή

και επειδή είναι συνεχής η $g(x)$ άρα η $e^{f(x)}-x$ διατηρεί πρόσημο

και $e^{f(0)}-0=1$ Άρα $g(0)>0$, συνεπώς $\left|e^{f(x)}-x\right|=e^{f(x)}-x$

Η (*) γίνεται: $e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ∎

Δ2) (α) Παραγωγίζω την $f(x)$ χωρίς. Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)=$

$=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)$ ↑ στο $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ $(0, f(0))$	$\cap$

στο $(-\infty, 0]$ κυρτή

στο $[0, +\infty)$ κοίλη

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η $f(x)$ κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, +\infty)$ κοίλη το $(0, f(0))$ Σ.Κ

Η $y=x$ εφαπτομένη της $f(x)$ στο 0. Άρα

για κάθε $x>0$ είναι $f(x) \leq x$.

β) Ζητείται το $\int_0^1 |f(x)-x|\,dx$ Όμως $f(x) \leq x$.

Άρα $\int_0^1 (x-f(x))\,dx$.

! Εναλλακτικά μπορούσατε να πάρετε την $h(x)=f(x)-x$ και να βρείτε το πρόσημο της με μονοτονία.

Άρα
$$\int_0^1 (x-f(x))\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx = \frac{1}{2} - \Big[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big]_0^1 +$$
$$+ \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \ldots = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2})$$

■

Δ3) Για $x>0 \xRightarrow{f \uparrow} f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$. (7)

Άρα $\ln|f(x)| = \ln f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot \ln(f(x))\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{f(x)}\cdot f(x)\ln f(x)\right]$$

Είναι: $\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)\cdot \ln(f(x))\right] = \lim_{u\to 0^+}(u\cdot \ln u) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = 0.$$

Επίσης $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{f(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)} =$

$$= \frac{0}{f'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$ Άρα το ζητούμενο όριο είναι 0.

Δ4) Θεωρώ την

$$t(x) = (x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right) + (x-3)\cdot\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)$$

- συνεχής στο $[2,3]$

- $t(2) = -8+3\int_0^2 f^2(t)dt < 0$, γιατί:

όμως $f(x)\le x \Rightarrow f^2(t)\le t^2 \Rightarrow 3\cdot\int_0^2 f^2(x)dx < 3\cdot\int_0^2 t^2 dt \Rightarrow$

$$8-3\int_0^2 f^2(t)dt > 0$$

• $t(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)\,dt > 0$ γιατί:

Όμως $f(t) \le t \Rightarrow f(t^2) \le t^2 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)\,dt < \int_0^1 t^2\,dt \Rightarrow$

$$\int_0^1 f(t^2)\,dt < \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \Rightarrow 3\int_0^1 f(t^2)\,dt < 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{1 - 3\int_0^1 f(t^2)\,dt > 0.}$$

Άρα υπάρχει $\xi \in (2,3) : t(\xi) = 0 \Leftrightarrow$ η ζητούμενη σχέση.

Επιμέλεια: Κοσόγλου Ιορδάνης

Καλά αποτελέσματα σε όλους