ΘΕΜΑ Α'

Ενδεικτικές Απαντήσεις
Μαθηματικά Γενικής Παιδείας 2015

Α1. 6ος β.β/ιο 6ος 31

Α2. >> >> 6ος 22

Α3. $\bar{x} = \dfrac{x_1 w_1 + \dots + x_v w_v}{\sum_{i=1}^{v} w_i}$

Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ.

ΘΕΜΑ Β'

Β1. $(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0 \iff x_1=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=\frac{1}{2}$

$9x^2-3x-2=0 \iff x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-\frac{1}{3}.$

$A\cap B\subseteq A \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)$ $\Rightarrow P(A)=\frac{1}{3},\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A)\le P(A\cup B)$ $P(A\cup B)=\frac{1}{2}.$

Β2. Ισχύει $A'\cap B' = (A\cup B)'$

$P(A'-B') = P(A') - P(A'\cap B') =$

$= 1 - P(A) - P[(A\cup B)'] =$

$= 1 - P(A) - P(A) - P(B) + P(A\cap B)$

$= 1 - 2P(A) - P(B) + P(A\cap B)$ (1)

▶ Θυμίζω το $P(B)$.

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = P(B) \iff$

$$\boxed{P(B)=\frac{5}{12}} \quad (2)$$

Από (2) και (1) βγαίνει: $P(A'-B') = 1 - \frac{2}{3} - \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \dots = \frac{12-8-5+3}{12} =$

$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$

Το πρώτο είναι: $P(\Delta)=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
$\Delta=(A\cap B)'$

B_3] $P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=$

$=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}-\frac{6}{12}=\frac{4+5-6}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

B_4] Έστω ότι είναι ασυμβίβαστα τότε: $\circledast\ 9x^2-3x-2=0\iff x=2/3$ ή $x=-\frac{1}{3}$

$P(B\cup\Gamma)\le 1\iff P(B)+P(\Gamma)\overset{\circledast}{\le}1\iff\frac{5}{12}+\frac{4}{3}\le 1\iff$

$\frac{5+8}{12}\le 1\iff\frac{13}{12}\le 1$ ΑΤΟΠΟ. Άρα όχι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1]

[-)	$f_i\%$	x_i	f_i	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$
[8-10)	10	9	0.1	25	2.5
[10-12)	10	11	0.1	9	0.9
[12,-14)	30	13	0.3	1	0.3
[14-16)	20	15	0.2	1	0.2
[16-18)	30	17	0.3	9	2.7
Σύνολο	100	×	1	×	$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 f_i$

$=6.6$

$a_3=\frac{v_3}{v}\cdot 360^\circ\iff$

$a_3=f_3\cdot 360^\circ\iff$

$\frac{108^\circ}{360^\circ}=f_3\iff\boxed{f_3=0.3}$

$$\begin{cases} f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1 \\ 0.9+11f_2+13\cdot 0{,}3+15\cdot f_4+5.1=14 \end{cases}\iff \begin{cases} f_2+f_4=0.3 \\ 11f_2+15f_4=14-9.9 \end{cases}\iff$$

(3.9)

$$\begin{cases} f_2+f_4=0.3 \\ 11f_2+15f_4=4.1 \end{cases}\iff \begin{cases} f_2=0.3-f_4 \\ 11(0.3-f_4)+15f_4=4.1 \end{cases}\iff \begin{cases} f_2=0.3-f_4 \\ 3.3-11f_4+15f_4=4.1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_2 = 0.1 \\ f_4 = 0.2 \end{cases}$$

Γ2| $s^2 = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 f_i = \ldots = 6.6$, $CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{6.6}}{14} \cdot 100\% =$

$= \ldots = 0.18 > 0.1$, οχι ομοιογενής

Γ3| $\bar{x}$ μέσο όρο των 5 κλάσεων. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i + x_5 \cdot v_5}{v} \Longleftrightarrow$

$$14 = \frac{1780 + 17.0 \cdot 3 \cdot v}{v} \Longleftrightarrow v = \frac{1780}{8.9} = \ldots = 200.$$

Γ4| $\bar{b} = \frac{b_1 + \ldots + b_5}{5} = \frac{\frac{1}{s_a} \cdot \sum_{i=1}^{5} (a_i - \bar{a})}{5} = \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i - \sum_{i=1}^{5} \bar{a}}{5 \cdot s_a} \overset{(*)}{=} \frac{5\bar{a} - 5\bar{a}}{5 s_a} = 0.$

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i}{5} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{5} a_i = 5 \cdot \bar{a} \ (*)$$

$$s_B = \frac{\sum_{i=1}^{5} (b_i - \bar{b})^2}{v} = \frac{\sum b_i^2}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{a_i - \bar{a}}{s_a} \right)^2}{5} = \ldots = \frac{1}{s_a} \cdot s_a = 1.$$

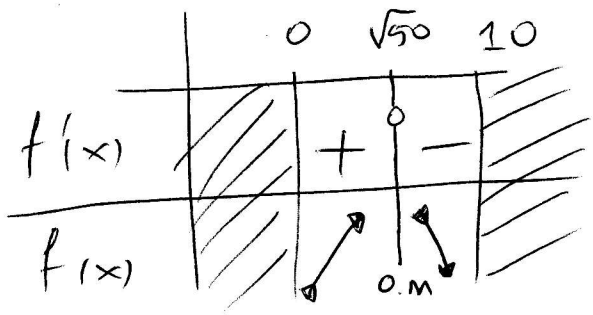
ΘΕΜΑ Δ|

Δ1| $\Delta B^2 = B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 \Longleftrightarrow B\Gamma = \pm \sqrt{100 - x^2} \Longrightarrow B\Gamma = \sqrt{100 - x^2}$

$(AB\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = f(x).$

Δ2] f παραγωγίσιμη στο $(0,10)$

$f'(x) = \dots = \dfrac{200-4x^2}{2\cdot\sqrt{100-x^2}}$, $f'(x)=0 \iff x^2=50 \iff x=\pm\sqrt{50}$



f: ↑ στο $(0,\sqrt{50}]$

f: ↓ στο $[\sqrt{50},10)$

για $x=\sqrt{50}$ έχω ολικό μέγιστο με $x=\Delta\Gamma=\sqrt{50}$

$B\Gamma=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{50}$

Αραιτετράγωνο.

Δ3] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{98x} = \dfrac{1}{98}\cdot f'(1) = \dfrac{\sqrt{99}}{99}$

από Δ2 είναι $\left(f'(1)=\dfrac{196}{2\sqrt{99}}\right)$ Άρα: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \dfrac{\sqrt{99}}{99}$

Δ4] $0\le P(A), P(A-B)\le 1$ και $(A-B)\subseteq A$, f ↑ στο $(0,1]$

$P(A-B)\le P(A) \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(P(A-B)) \le f(P(A)) \iff$

$P(A-B)\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)} \le P(A)\cdot\sqrt{100-P^2(A)} \iff$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \quad (1)$$

$P(A) \leq 1$ ② και $\sqrt{100 - P^2(A-B)} > \sqrt{99} \iff$ ⑤

$$\frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < \frac{1}{\sqrt{99}} \quad ③$$

Από ②, ③ (πολ/ζω θετικούς) $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < \dfrac{1}{\sqrt{99}}$ και λόγω της ①

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$ γιατί $f \uparrow$

άρα $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{99}}\right) \subseteq (0, 5\sqrt{2})$

Επιμέλεια: Κασόγλου Ιορδάνης
ΠΕ-03 (Μαθηματικός ΓΕΛ Εξαρχείων)

Καλά Αποτελέσματα σε όλους σας.