

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο - Α (απόδειξη θεωρήματος)

- 1) Αν A και B είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε να αποδείξετε ότι : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (§ 1.2 σελ 33)
- 2) Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$. (§ 1.2 σελ 34)
- 3) Αν A και A' είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε να αποδείξετε ότι : $P(A') = 1 - P(A)$. (§ 1.2 σελ 33)
- 4) Αν $\alpha, \beta > 0$ και n θετικός ακέραιος , αποδείξτε ότι : $\alpha^n = \beta^n \Rightarrow \alpha = \beta$
(§ 2.2 σελ 56)
- 5) Να αποδείξετε ότι : $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| |\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in R$. (§ 2.3 σελ 62)
- 6) Για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in R$, να αποδειχθεί ότι : $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
(§ 2.3 σελ 63)
- 7) Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και n θετικός ακέραιος , αποδείξτε ότι : $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$
(§ 2.4 σελ 71)
- 8) Έστω χ_1, χ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $a\chi^2 + b\chi + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Με S συμβολίζουμε το άθροισμα των δυο ριζών $S = \chi_1 + \chi_2$ και με P το γινόμενο των δυο ριζών $P = \chi_1 \cdot \chi_2$.

Να αποδειχθεί ότι : $S = -\frac{b}{a}$ και $P = \frac{\gamma}{a}$. (§ 3.3 σελ 90)

ΘΕΜΑ 1^ο - Β (ερωτήσεις κλειστού τύπου Σ-Λ)

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λάθος.

1. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο. Σ Λ
2. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει ότι : $A - B = A \cap B'$ Σ Λ
3. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Τότε ισχύει : $P(\emptyset) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$. Σ Λ
4. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B. Σ Λ
5. Αν για τα ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει : $P(A) = P(B)$, τότε είναι πάντοτε $N(A) = N(B)$. Σ Λ
6. Δυο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα , όταν : $A \cap B = \emptyset$ Σ Λ
7. Για κάθε $\alpha, \beta \in R$, ισχύει : $|a - \beta| = |\beta - a|$ Σ Λ
8. Για κάθε $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, ισχύει : $\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha + \beta}$ Σ Λ
9. Όταν $a \neq 0$ και $\beta, \gamma \in R$ είναι : $a\chi^2 + b\chi + \gamma \leq 0$ για κάθε $\chi \in R$, τότε $a < 0$ και $\Delta \leq 0$. Σ Λ
10. Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$, με $a, b \in R$ έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που τέμνει τον γγ' στο σημείο (0,β). Σ Λ
11. $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ Σ Λ

ΠΗΓΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ : 1) Ε.Μ.Ε – Παράρτημα Χίου Διαγωνίσματα Μαθηματικών για τις Προαγωγικές τάξεις του Λυκείου. 2) Χρίστος Τριανταφύλλου

12. Για κάθε α, β, γ πραγματικούς αριθμούς ισχύει : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ Σ Λ
13. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει : $|a| = |-a| \geq 0$ Σ Λ
14. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει : $\sqrt{a^2} = a$ Σ Λ
15. $|x| > \rho, \rho > 0 \Leftrightarrow x > \rho$ ή $x < -\rho$ Σ Λ
16. Ισχύει ότι : $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ για κάθε πραγματικό αριθμό α, β . Σ Λ
17. Αν $\alpha^2 > \beta^2$, τότε $\alpha > \beta$. Σ Λ
18. Το σημείο $M(x,y)$ με $x > 0$ και $y < 0$, βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο. Σ Λ
19. Αν $\theta > 0$, ισχύει η ισοδυναμία : $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Πρόοδου , Σ Λ
20. τότε ισχύει : $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Σ Λ
21. Το συμμετρικό του $A(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα xx' είναι $A'(\alpha, -\beta)$. Σ Λ
Αν χ_1, χ_2 είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης : $a\chi^2 + b\chi + \gamma = 0$
22. με $a \neq 0$, τότε ισχύει : $\chi_1 + \chi_2 = \frac{\beta}{a}$. Σ Λ
23. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει : $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$. Σ Λ
24. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει : $|x| \geq x$ Σ Λ
25. Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, τότε η εξίσωση $a\chi + \beta = 0$, είναι αδύνατη. Σ Λ
26. Υπάρχει συνάρτηση που να διέρχεται απ τα σημεία $A(3,2)$ και $B(3,1)$. Σ Λ
27. Αν για τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha\beta > 0$, τότε ισχύει $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Σ Λ
28. Αν για τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε ισχύει πάντα $\alpha\gamma < \beta\gamma$. Σ Λ
29. Η εξίσωση $a\chi + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$ είναι αδύνατη. Σ Λ
Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι
30. Αριθμητικής Πρόοδου αν ισχύει : $\beta^2 = \frac{\alpha \cdot \gamma}{2}$. Σ Λ
31. Αν $|x| = -1$, τότε $\chi = -1$ ή $\chi = -(-1)$. Σ Λ
32. Αν το τριώνυμο $a\chi^2 + b\chi + \gamma = 0$, $a \neq 0$, έχει $\Delta < 0$, τότε δεν έχει ρίζες και δεν γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Σ Λ
33. Η εξίσωση : $\chi^v = \alpha$, είναι αδύνατη, όταν v άρτιος και $\alpha < 0$. Σ Λ
34. Αν $S = \chi_1 + \chi_2$ και $P = \chi_1 \cdot \chi_2$, τότε η εξίσωση με ρίζες τις χ_1, χ_2 είναι η : $\chi^2 - S\chi + P = 0$. Σ Λ
35. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και v φυσικό μη μηδενικό ισχύει : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^v > \beta^v$. Σ Λ
36. Ισχύει ότι : $2 < \chi \leq 5 \Leftrightarrow \chi \in (2,5]$ Σ Λ

ΘΕΜΑ 3^ο

1. Δυο ομάδες Α και Β λαμβάνουν μέρος σε μια διοργάνωση. Νικήτρια ανακηρύσσεται η ομάδα εκείνη, που θα κερδίσει σε δυο αγώνες. Να βρείτε :
 - i) τον δειγματικό χώρο του πειράματος. (μονάδες 9)
 - ii) το ενδεχόμενο να ανακηρυχθεί νικήτρια η ομάδα Α (μονάδες 8)
 - iii) το ενδεχόμενο να ανακηρυχθεί νικήτρια η ομάδα Β. (μονάδες 8)
2. Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στον διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δυο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:
 - α) να συμμετέχει σε έναν τουλάχιστον από τους διαγωνισμούς.
 - β) να συμμετέχει μόνον σε έναν από τους δυο διαγωνισμούς.
 - γ) να μην συμμετέχει σε κανέναν από τους δυο διαγωνισμούς. (μονάδες 7+9+8)
3. Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω Α το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική
 - α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα. (μονάδες 8)
 - β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα. (μονάδες 8)
 - γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές. (μονάδες 9)
4. Γ1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί χ , ώστε οι αριθμοί : $2, \chi^2, 10(1-\chi)$ με τη σειρά που δίνονται , να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
Γ2. Για $\chi = 1$:
 - α) να βρεθεί η διαφορά της παραπάνω προόδου.
 - β) Αν ο αριθμός 2 είναι ο τέταρτος όρος (a_4) , τότε : βρείτε τον πρώτο όρο (a_1) της προόδου καθώς και το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της S_{10} . (μονάδες 8+6+11)
5. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 - \lambda x - 1$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
Γ1. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες για κάθε αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$.
Γ2. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(-1)$ και $f(-2)$ συναρτήσει του λ .
Γ3. Αν ξέρετε ότι οι αριθμοί $f(1)$, $f(-1)$ και $f(-2)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ναδειχθεί ότι $\lambda=3$. (μονάδες 10+6+9)
6. Δίνονται οι αριθμοί : $\alpha = 3\chi+5$, $\beta = \chi-1$ και $\gamma = \chi+3$, $\chi \in \mathbb{R}$, οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με τη σειρά που δίνονται.
Γ1. Να βρείτε την τιμή του χ
Γ2. Αν $\chi = -5$ και ο 3^{ος} όρος της προόδου είναι ίσος με α :

- α)** Να δειχθεί ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 4 και ο πρώτος όρος $a_1 = -18$.
- β)** Να υπολογιστεί το άθροισμα των 37 πρώτων όρων της προόδου. (μονάδες 9+8+8)
- 7.** Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.
Γ1. Να δειχθεί ότι για κάθε τιμή του πραγματικού λ , η παραπάνω εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες.
Γ2. Να υπολογιστεί το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της παραπάνω εξίσωσης , συναρτήσει του λ
Γ3. Αν χ_1 , χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης , να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει : $(\chi_1 - 1) \cdot (\chi_2 - 1) = -4$. (μονάδες 8+7+10)
- 8.** Δίνονται οι συναρτήσεις :
- $$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - 4 \text{ και } g(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$$
- Γ1.** Να υπολογιστούν τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.
Γ2. Να αποδειχθεί ότι : $f(x) = |x - 3| - 4$ και $g(x) = |x| + 2$
Γ3. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = g(x) - 6$. (μονάδες 12+6+7)
- 9.** **Γ1.** Να λυθεί η εξίσωση : $x^5 - 81x = 0$.
Γ2. Αν a είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^5 - 81x = 0$, να αποδειχθεί ότι : $\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a-1}} = \sqrt{a}$. (μονάδες 13+12)
- 10.** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$
Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.
Γ2. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = 2$
Γ3. Να λυθεί η ανίσωση : $f(x) < 2$ (μονάδες 9+7+9)
- 11.** Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + \lambda^2 - 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Γ1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες .
Γ2. Για $\lambda = 1$,
α) να βρείτε τις χ_1 , χ_2 της εξίσωσης.
β) να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $2\chi_1$ και $2\chi_2$, όπου χ_1 , χ_2 οι ρίζες του ερωτήματος (Γ2α). (μονάδες 8+8+9)
- 12.** Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda - 1)x^2 - \lambda x + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι και αντικαθιστούμε το λ με την ένδειξη του ζαριού. Να βρείτε την πιθανότητα :
Γ1. Η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα.
Γ2. Να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
Γ3. Να μην έχει πραγματικές ρίζες. (μονάδες 9+8+8)
- 13.** Δίνεται η παράσταση $A = \frac{2}{\sqrt{5} - 2} + \frac{-2}{2 + \sqrt{5}}$.
Γ1. Να απλοποιηθεί η παράσταση A . (μονάδες 13)

- Γ2.** Να λυθεί η εξίσωση : $||x| + 2| = A$. (μονάδες 12)
- 14.** Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 5\lambda x + 6\lambda^2 = 0$ (1) , $\lambda \in R$.
Γ1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in R$, η (1) έχει πραγματικές ρίζες.
Γ2. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει δυο πραγματικές και θετικές ρίζες.
 (μονάδες 12+13)
- 15.** Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης : $x^{10} + x^5 + \alpha = 0$, $\alpha \in R$, τότε:
Γ1. Να βρεθεί η τιμή του α .
Γ2. Να λυθεί η παραπάνω εξίσωση . (μονάδες 10+15)
- 16.** Δίνεται η εξίσωση : $-x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in R$.
Γ1. Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in R$ η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.
Γ2. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης , να βρεθεί ο λ ώστε :
 $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 \geq 0$ (μονάδες 12+13)
- 17.** Ένα θέατρο έχει 15 καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 60 καθίσματα και η τελευταία 18 καθίσματα. Αν το πλήθος των καθισμάτων ελαττώνεται από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό , τότε :
Γ1. Να βρεθεί το πλήθος των καθισμάτων που ελαττώνεται από σειρά σε σειρά.
Γ2. Να βρεθεί το πλήθος των καθισμάτων όλων των σειρών του θεάτρου.
Γ3. Να βρεθεί το πλήθος των καθισμάτων απ την 5^η έως την 13^η σειρά.
 (μονάδες 9+8+9)
- 18.** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{|x - 1| - 4}$.
Γ1. Να αποδειχθεί ότι : $f(3) = -2$
Γ2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.
Γ3. Να λυθεί η εξίσωση : $x^4 + x^2 + f(3) = 0$.
 (μονάδες 7+10+8)
- 19.** Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$.
Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
Γ2. Να απλοποιήσετε τον τύπο της .
Γ3. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 0$. (μονάδες 7+9+9)
- 20.** Έστω A , B δυο ισοπίθανα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν οι πιθανότητες των A και $A \cap B$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν ρίζες της εξίσωσης : $12x^2 - 7x + 1 = 0$, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων :
Γ1. $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$
Γ2. $P(A - B)$, $P(B - A)$
Γ3. $P[(A - B) \cup (B - A)]$ (μονάδες 10+8+7)
- 21.** Δίνεται η συνάρτηση : $g(x) = 2 - |x - 2|$.

- Γ1.** Να γράψετε τον τύπο της $g(x)$ πιο απλά , χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.
- Γ2.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $g(x)$. (μονάδες 13+12)
- 22.** Δίνεται η ευθεία : (ε) με εξίσωση : $y = ax+3$, η οποία σχηματίζει με τον $xχ'$ αμβλεία γωνία. Να βρεθούν :
- Γ1.** τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες $xχ'$, $y y'$ συναρτήσει του a .
- Γ2.** το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες συναρτήσει του a ..
- Γ3.** η τιμή του a , ώστε το παραπάνω εμβαδόν να είναι ίσο με 3τ.μ.
(μονάδες 9+9+7)
- 23. Γ1.** Να λυθούν οι εξισώσεις :
- i) $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$.
- ii) $|\lambda - 2| - 1 = 0$
- (μονάδες 10)
- Γ2.** Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση : $(|\lambda - 2| - 1) \cdot x = \lambda^2 - \lambda - 6$ είναι :
- i) αόριστη
- ii) αδύνατη.
- (μονάδες 15)