ΣΥΛΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 21ο.

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0)>0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$F(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$, $x\in[0,1]$, $G(x)=\int_0^x g(t)dt$, $x\in[0,1]$.

α. Να δειχθεί ότι $F(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x)\cdot G(x)>F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

δ. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}$.

(Πανελλαδικές 2007)

Λύση:

α. Η $F(x)=\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ αφού οι f,g είναι συνεχείς στο $[0,1]$, με

$$F'(x)=\left(\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt\right)'\Rightarrow F'(x)=f(x)\cdot g(x)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ άρα για κάθε $x\in[0,1]$ θα ισχύει $f(x)\ge f(0)>0$ και $g(x)>0$ δηλαδή για κάθε $x\in(0,1]$ θα έχουμε $f(x)\cdot g(x)>0$. Οπότε και $f'(x)>0$ δηλαδή F γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ με $F(0)=0$. Έτσι αν $x\in(0,1]$ τότε: $F(x)>F(0)\Rightarrow F(x)>0$.

β. Έστω: $f(x)G(x)>F(x)\Leftrightarrow f(x)G(x)-F(x)>0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow f(x)\cdot\int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt>0\Leftrightarrow\int_0^x f(x)\cdot g(t)dt-\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^x\left(f(x)-f(t)\right)g(t)dt>0$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\left(f(x)-f(t)\right)\cdot g(t)>0$ όταν $t\in[0,x]$

Η f αύξουσα στο $[0,x]$ άρα για κάθε $x>t$ θα έχουμε $f(x)>f(t)\Leftrightarrow f(x)-f(t)>0$ και $g(t)>0$ άρα $\left(f(x)-f(t)\right)\cdot g(t)>0$ όπότε $\int_0^x\left(f(x)-f(t)\right)g(t)dt>0$.

γ. Έστω συνάρτηση h με $h(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1]$ σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{g(x)\cdot(f(x)G(x)-F(x))}{G^2(x)}>0$

διότι $g(x)>0$ και $f(x)\cdot G(x)-F(x)>0$ από το ερώτημα **(β)** και $G^2(x)>0$ στο (0,1]

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και αν $x\le 1$ τότε: $h(x)\le h(1)\Leftrightarrow\frac{F(x)}{G(x)}\le\frac{F(1)}{G(1)}$

δ. Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{(x^5)}=$

$$\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)'}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)'}{(x^5)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\eta\mu x^4}{5x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\eta\mu x^4}{5x^4}=f(0)\cdot\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot\lim_{x\to 0^+}x=f(0)\cdot\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 0=0$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ γιατί f συνεχής στο 0, και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\underset{u\to 0^+}{\overset{x^4\to u}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

Θέμα 22ο.

α. Αν f,g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \ln(1+e^{-x})$

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f και να δείξετε ότι η f είναι θετική για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία ε: $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

iii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} < \ln(1+e^{-x}) < e^{-x}$.

iv. Αν Ε είναι το εμβαδό που περικλείεται από την C_f, την ασύμπτωτη ε: $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$, να δείξετε ότι: $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) < E < 1 - e^{-1}$

Λύση:

A. Είναι $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0$

Άρα $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

B.i. Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x, $\ln(1+e^{-x})$ με

$f'(x) = 1 + \dfrac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} = 1 + \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Άρα $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ με $f(0) = 0 + \ln(1+1) = \ln 2 > 0$

Άρα για $x \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0) = \ln 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = 0$

Είναι $f(x) - x = x + \ln(1+e^{-x}) - x = \ln(1+e^{-x})$ οπότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1+0 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x}) \underset{u\to1}{\overset{1+e^{-x}\to u}{=}} \lim\limits_{u\to1}\ln u = \ln 1 = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$ και επομένως η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

iii. Θέτουμε όπου $e^{-x} = t > 0$

Θα δείξουμε ότι $\frac{t}{t+1} < \ln(1+t) < t \overset{t>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{t+1} < \frac{\ln(1+t)}{t} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t+1} < \frac{\ln(1+t)-\ln 1}{(1+t)-1} < 1$ **(2)**

Θεωρούμε $g(u) = \ln u$, $u \in [1, t+1]$, $t > 0$

Για την g ισχύει το *Θ.Μ.Τ.* στο $[1, t+1]$, άρα υπάρχει $\xi \in (1, t+1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$: g'(\xi) = \frac{\ln(t+1)-\ln 1}{(t+1)-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(t+1)-\ln 1}{(t+1)-1}$. Επομένως η **(2)** ισοδύναμα γίνεται:

$\frac{1}{t+1} < \frac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow t+1 > \xi > 1$ ή $t+1 \rangle \xi \rangle 1$ που ισχύει, αφού $\xi \in (1, t+1)$

iv. Το εμβαδό θα ισούται με $E = \int_0^1 |f(x) - x| dx = \int_0^1 \left|x + \ln\left(1+e^{-x}\right) - x\right| dx = \int_0^1 \ln\left(1+e^{-x}\right) dx$

Από το ερώτημα **(γ)** έχουμε ότι $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} < \ln\left(1+e^{-x}\right) < e^{-x}$ άρα

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx < \int_0^1 \ln\left(1+e^{-x}\right) dx < \int_0^1 e^{-x} dx$ **(3)**

Είναι: $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = \int_0^1 \frac{-\left(e^{-x}+1\right)'}{e^{-x}+1} dx = -\left[\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]_0^1 =$

$= -\ln\left(e^{-1}+1\right) + \ln\left(e^{0}+1\right) = \ln 2 - \ln\left(e^{-1}+1\right) = \ln\frac{2}{1+e^{-1}}$

Επίσης: $\int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + e^{0} = 1 - e^{-1}$ *και* $\int_0^1 \ln\left(1+e^{-x}\right) dx = E$

Άρα **(3)** $\Leftrightarrow \ln\frac{2}{1+e^{-1}} < E < 1 - e^{-1}$

Θέμα 23ο.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

α. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

β. Να δείξετε ότι $0<\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt<\ln 2$.

γ. Να δείξετε ότι $\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2}dt=x,\ x\in\mathbb{R}$.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

(Θέμα 124 Συλλογής Mathematica)

Λύση:

α. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Πρέπει $x+\sqrt{x^2+1}>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$.

Η $\frac{1}{1+t^2}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}$, άρα η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}.$$

Οπότε λύνουμε :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}>0\overset{1+x^2>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{x^2+1}-1>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>1\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$$

Επομένως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έχουμε $f(0)=0$ και

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln\left(\frac{3}{4}+\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}\right)-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt=\ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt=\ln 2-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Ακόμα για κάθε $t\in\mathbb{R}$,έχουμε $\frac{1}{t^2+1}>0\Rightarrow\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt>0$. Έχουμε $f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 2-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$0 = f(0) < f\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2 - \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt < \ln 2$. Επομένως $0 < \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt < \ln 2$.

γ. Θεωρώ $h(x) = \int_0^{εφx} \frac{1}{1+t^2}dt$, η $\frac{1}{t^2+1}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}dt$ παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}$,

άρα η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \frac{1}{1+εφ^2x}(εφx)' = \frac{1}{1+εφ^2x} \cdot \frac{1}{συν^2x} \overset{1+εφ^2x=\frac{1}{συν^2x}}{=} 1$.

Συνεπώς $h'(x) = 1 \Rightarrow h(x) = x + c$. Όμως $h(0) = \int_0^{0} \frac{1}{1+t^2}dt = 0$, οπότε για $x = 0$ έχουμε $c = 0$,άρα $h(x) = x \Leftrightarrow \int_0^{εφx} \frac{1}{1+t^2}dt = x$.

δ. Έχουμε για $x = \frac{\pi}{4}$ ότι $\int_0^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$.

Έχουμε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$, οπότε :

$$E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x)' f(x)dx = \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= f(1) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = f(1) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 =$$

$$f(1) - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

Θέμα 24ο.

Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ και $f(\alpha)<f(\beta)$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}, & \alpha<x\le\beta\\ 0 & , x=\alpha\end{cases}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β. Να δείξετε ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta]$ με $g'(\beta)<0$.

γ.i. Αν $g(x)>g(\beta)>0$, να δείξετε ότι η $g(x)$ παίρνει μέγιστη τιμή σε ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[\alpha,\beta]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$.

δ. Αν $0<\mu<\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$f(\xi)-f(\alpha)=\mu\cdot(\xi-\alpha)$

ε. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα (α,β) να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Λύση:

α. Η g είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ ως πηλίκο των συνεχών : $f(x)-f(\alpha)$ και $x-\alpha$.

Στο $x=\alpha$ εξετάζουμε τη συνέχεια με τον ορισμό.

$\lim\limits_{x\to\alpha+}g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=0=g(\alpha)$. Άρα g συνεχής στο $x=\alpha$.

Επομένως η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων , με

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-\alpha)-f(x)+f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}.$$

Στο $x=\beta$: $$\lim_{x\to\beta^-}\frac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}=\lim_{x\to\beta^-}\frac{\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}-\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}}{x-\beta}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to\beta^-}\frac{\left(\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)'}{(x-\beta)'}=$$

$$= \lim_{x \to \beta^-} \frac{f'(x)(x-\alpha)-f(x)+f(\alpha)}{(x-\alpha)^2} = \frac{f'(\beta)(\beta-\alpha)-f(\beta)+f(\beta)}{(\beta-\alpha)^2} = -\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{(\beta-\alpha)^2} < 0$$

Άρα g παραγωγίσιμη στο $x=\beta$ με $g'(\beta)<0$.

γ. Επειδή g συνεχής στο κλειστό $[\alpha,\beta]$ από *θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής*, θα παίρνει μέγιστο.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Όμως } g(x)>g(\beta)>0 \\ \text{και } g(\alpha)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Άρα } g(x)>g(\beta)>g(\alpha)$$

Επομένως η g παίρνει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$.

Επειδή g παραγωγίσιμη στο (α,β) από το *θεώρημα Fermat* έχουμε ότι

$$g'(\xi)=0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)(\xi-\alpha)-f(\xi)+f(\alpha)}{(\xi-\alpha)^2}=0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{(\xi-\alpha)^2} \Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$$

δ. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *Θ.Μ.Τ.* στο $[\alpha,\beta]$ οπότε θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Από την **(1)** έχουμε $f'(\alpha)<\mu<f'(x_0)$ οπότε $g(\alpha)<\mu<g(x_0)$ οπότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, x_0)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=\mu \Rightarrow \frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\mu$

ε. Θα δείξουμε ότι αν $x_1<x_2$ τότε $g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha}<\frac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha} \Leftrightarrow$

$\underset{x_2-\alpha>0}{\overset{x_1-\alpha>0}{\Leftrightarrow}} (x_2-\alpha)(f(x_1)-f(\alpha))<(x_1-\alpha)(f(x_2)-f(\alpha))$ **(5)**.

Θεωρώ $h(x)=f(x)-f(\alpha)$. Τότε **(5)** $\Leftrightarrow (x_2-\alpha)h(x_1)<(x_1-\alpha)h(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2h(x_1)-\alpha h(x_1)<x_1h(x_2)-\alpha h(x_2)$. Προσθέτουμε και αφαιρούμε το $x_1h(x_1)$ και έχουμε:

$x_2h(x_1)-x_1h(x_1)+x_1h(x_1)+\alpha h(x_2)-\alpha h(x_1)<x_1h(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_2-x_1)h(x_1)+(x_1-\alpha)h(x_1)<(x_1-\alpha)h(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_2-x_1)h(x_1)<(x_1-\alpha)(h(x_2)-h(x_1))$

πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{(x_2-x_1)(x_1-\alpha)}>0$ και επειδή $h(\alpha)=0$ έχω:

$\frac{h(x_1)-h(\alpha)}{x_1-\alpha}<\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}$ **(6)**

Εφαρμόζουμε το *Θ.Μ.Τ.* για την h στα διαστήματα $\left[\alpha, x_1\right]$ και $\left[x_1, x_2\right]$

- Στο $\left[\alpha, x_1\right]$

Υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, x_1\right)$ τέτοιο ώστε $h'\left(\xi_1\right) = \dfrac{h\left(x_1\right) - h\left(\alpha\right)}{x_1 - \alpha}$,

- Στο $\left[x_1, x_2\right]$

Υπάρχει $\xi_2 \in \left(x_1, x_2\right)$ τέτοιο ώστε: $h'\left(\xi_2\right) = \dfrac{h\left(x_2\right) - h\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}$

Έτσι, η **(6)** ισοδύναμα δίνει: $h'\left(\xi_1\right) < h'\left(\xi_2\right)$ που ισχύει διότι $\xi_1 < \xi_2$ και $h'\left(x\right) = f'\left(x\right)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\alpha,\beta\right)$ αφού f κυρτή στο $\left(\alpha,\beta\right)$.

Θέμα 25ο.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός u είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $u=\overline{u}$

ii. Αν $|z|=|w|=1$, τοτε να αποδείξετε ο αριθμός $\dfrac{z+w}{1+z\cdot w}$ είναι πραγματικός.

β. Μεταξύ όλων των μιγαδικών Ζ που ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|\le 1$, να βρείτε:

i. ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο.

ii. για ποιον από όλους η παράσταση $|z+2-2i|$ παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή.

Λύση:

α.i. α) Ευθύ:

Έστω ότι $u=x+yi$

Τότε $u\in\mathbb{R}\Rightarrow u=x+0i\Rightarrow \overline{u}=x-0i\Rightarrow u=\overline{u}$

β) Αντίστροφο

Έστω $u=\overline{u}\Rightarrow x+yi=x-yi\Rightarrow 2yi=0\Rightarrow y=0\Rightarrow u\in\mathbb{R}$

ii. Έστω $u=\dfrac{z+w}{1+z\cdot w}$. Επειδή $|z|=|w|=1$, έχουμε: $|z|=1\Rightarrow |z|^2=1\Rightarrow z\cdot\overline{z}=1\Rightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$ και

$|w|=1\Rightarrow |w|^2=1\Rightarrow w\cdot\overline{w}=1\Rightarrow \overline{w}=\dfrac{1}{w}$

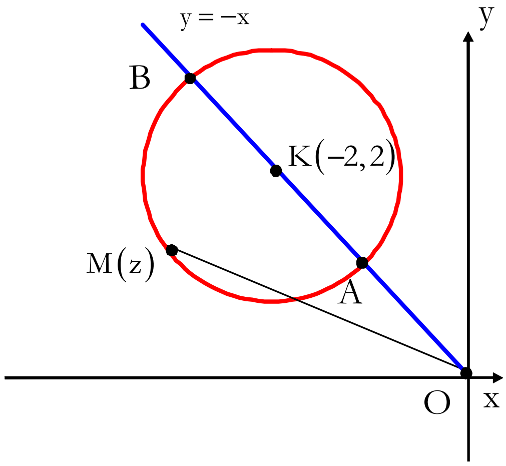
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{u}=u$

$$\overline{u}=\left(\overline{\frac{z+w}{1+z\cdot w}}\right)=\frac{\overline{z}+\overline{w}}{1+\overline{z}\cdot\overline{w}}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{z\cdot w}}=\frac{\frac{w}{z\cdot w}+\frac{z}{z\cdot w}}{\frac{z\cdot w}{z\cdot w}+\frac{1}{z\cdot w}}=\frac{\frac{z+w}{z\cdot w}}{\frac{1+z\cdot w}{z\cdot w}}=\frac{z+w}{1+z\cdot w}=u$$

β.i. Οι μιγαδικοί z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|<1$, ανήκουν σε κυκλικό δίσκο με κέντρο $K(0,2)$ και ακτίνα $\varrho=1$. Οπότε η διάκεντρος (που είναι και φορέας και των ζητούμενων μιγαδικών) είναι ο άξονας yy', και τα σημεία τομής με τους άξονες είναι τα $A(0,1)$ και $B(0,3)$. Οπότε οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι $z_1=0+i$ με μέτρο 1 και ο $z_2=0+3i$ με μέτρο 3.

ii. Η εξίσωση $|z+2-2i|=1\Rightarrow|z-(2+2i)|=1$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από την εικόνα του μιγαδικού $-2+2i$, δηλαδή από το σημείο $K(-2,2)$, απόσταση 1 μονάδα. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\varrho=1$.

Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(z)$ από την αρχή $O(0,0)$, δηλαδή το μήκος OM. Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία K τέμνει τον κύκλο στα A και B, τότε $(OA) \le (OM) \le (OB)$, που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).



Η εξίσωση, όμως, της ευθείας OK είναι η $y = x$. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = -x \end{cases}$ που είναι τα ζεύγη $(-1,1)$ και $(3,-3)$. Άρα, η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $(OB) = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με $(OA) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Θέμα 26ο.

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+5f(x)+x=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης f

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ. Με δεδομένη την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^3+5x$, να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

δ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

ε. Να αποδείξετε ότι η f για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

στ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x-19)=x+1$

ζ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}$

Λύση:

α. Ισχύει ότι $f(x)\left(f^2(x)+5\right)=-x$, $x\in\mathbb{R}$ άρα επειδή $f^2(x)+5>0$ θα είναι και

$f(x)=-\dfrac{x}{f^2(x)+5}$ **(1)** από όπου για $x<0$ έχουμε $f(x)>0$ και για $x>0$ έχουμε $f(x)<0$.

β. Αν για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x_1)=f(x_2)$ τότε θα ισχύουν και $f^3(x_1)=f^3(x_2)$, $5f(x_1)=5f(x_2)$ και με πρόσθεση ότι $f^3(x_1)+5f(x_1)=f^3(x_2)+5f(x_2)$ άρα και $-x_1=-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι '1-1'.

γ. Αν $g(x)=x^3+5x$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν ότι είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα αφού για $x_1<x_2$ ισχύουν ότι $x_1^3<x_2^3$ άρα και $x_1^3+5x_1<x_2^3+5x_2$ άρα και $g(x_1)<g(x_2)$ και έχει επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$ και

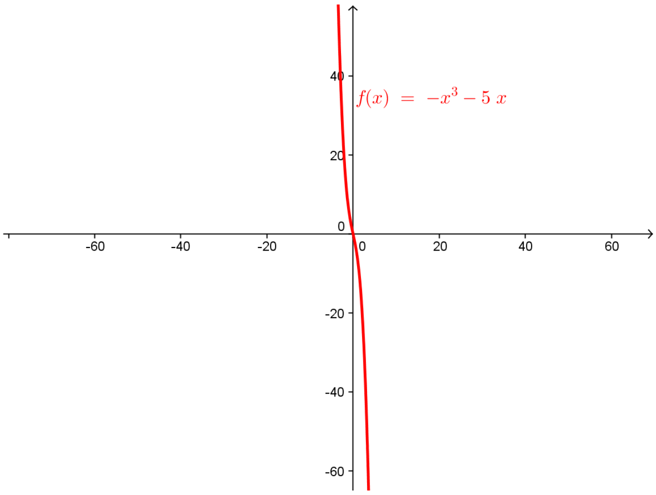
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$

άρα έχει σύνολο τιμών $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και αφού ισχύει $g(f(x))=-x$, $x\in\mathbb{R}$ και g αντιστρέψιμη με $g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ θα ισχύει $f(x)=g^{-1}(-x)$, $x\in\mathbb{R}$ επομένως η f θα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ οπότε θα είναι $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και για x το $f^{-1}(x)$ από την αρχική θα ισχύει

$f^3\left(f^{-1}(x)\right)+5f\left(f^{-1}(x)\right)+f^{-1}(x)=0$ άρα $f^{-1}(x)=-x^3-5x$, $x\in\mathbb{R}$.

Β' Τρόπος: (Για την μονοτονία της g)

Η $g(x)=x^3+5x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική με $g'(x)=(x^3+5x)'=3x^2+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της



δ. Από $g(f(x))=-x$, $x\in\mathbb{R}$ για $x_1<x_2$ ισχύει $-x_1>-x_2$ άρα και $g(f(x_1))>g(f(x_2))$ και επειδή η g γνήσια αύξουσα θα ισχύει ότι $f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ε. Για $x=x_0$ στην αρχική προκύπτει ότι $f^3(x_0)+5f(x_0)=-x_0$ οπότε με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε

ότι $f^3(x)-f^3(x_0)+5(f(x)-f(x_0))=-x+x_0$ ή ακόμη

$(f(x)-f(x_0))(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+5)=-(x-x_0)$ οπότε

και $f(x)-f(x_0)=-\dfrac{x-x_0}{\left(f(x)+\frac{1}{2}f(x_0)\right)^4+\frac{3}{4}f^2(x_0)+5}$ και επειδή

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|-\frac{x-x_0}{\left(f(x)+\frac{1}{2}f(x_0)\right)^4+\frac{3}{4}f^2(x_0)+5}\right|\le\frac{|x-x_0|}{5}$$ άρα θα ισχύει

$-\dfrac{|x-x_0|}{5}\le f(x)-f(x_0)\le\dfrac{|x-x_0|}{5}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|x-x_0|}{5}=0$ από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

στ. Είναι $f(x-19)=x+1\Leftrightarrow x-19=f^{-1}(x+1)$ ισοδύναμα λόγω **(γ.)**

$x-19=-(x+1)^3-5(x+1)\Leftrightarrow(x+1)^3+6(x+1)-20=0$ και με Horner προκύπτει ισοδύναμα ότι

$x+1=2\Leftrightarrow x=1$ ή $(x+1)^2+2(x+1)+10=0$ που είναι αδύνατο.

ζ. Είναι $h(x)=\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}=\dfrac{-x^3-5x}{\eta\mu x}\overset{x\neq 0}{=}\dfrac{-x^2-5}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2-5}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(-x^2-5)}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{0-5}{1}=-5$

Θέμα 27ο.

Δίνεται η συνάρτηση f με f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύουν

$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=2\int_x^0 tf'(t)dt-4\int_0^1 xtf(x)dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $f(0)=0$ και $f'(0)=2$

α. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον xx' και τις ευθείες $x=0$ και $x=\alpha$, $\alpha>0$. Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό $10\,{}^{cm}/_{sec}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του $E(\alpha)$, τη στιγμή κατά την οποία $\alpha=3cm$.

γ. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση g με $|g(x)+x-2|\le|f(x)|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_g, τη πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$, να δείξετε ότι $E\le\ln 5$

Λύση:

α.

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=2\int_x^0 tf'(t)dt-4\int_0^1 xtf(x)dt\Rightarrow$$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)dt-4xf(x)\int_0^1 tdt\Rightarrow$$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)dt-4xf(x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\Rightarrow$$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)dt-4xf(x)\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)dt-2xf(x)$. Παραγωγίζω τη σχέση και έχω:

$$(x^2+1)f''(x)=-2xf'(x)-2f(x)-2xf'(x)\Rightarrow(x^2+1)f''(x)+2xf'(x)=-2(f(x)+xf'(x))\Rightarrow$$

$$(x^2+1)f''(x)+(x^2+1)'f'(x)=-2(x'\cdot f(x)+x\cdot f'(x))\Rightarrow$$

$$\left((x^2+1)f'(x)\right)'=-2(x\cdot f(x))'\Rightarrow(x^2+1)f'(x)=-2x\cdot f(x)+c_1$$

Για $x=0$ έχουμε $\left(0^2+1\right)f'(0)=-2\cdot 0\cdot f(0)+c_1 \Rightarrow c_1=2$. Άρα $\left(x^2+1\right)f'(x)=-2x\cdot f(x)+2$. Οπότε

$\left(x^2+1\right)f'(x)+2x\cdot f(x)=2 \Rightarrow \left(x^2+1\right)f'(x)+\left(x^2+1\right)'\cdot f(x)=2 \Rightarrow \left(\left(x^2+1\right)f(x)\right)'=(2x)' \Rightarrow$
$\left(x^2+1\right)f(x)=2x+c_2$.

Για $x=0$ έχουμε $\left(0^2+1\right)f(0)=2\cdot 0+c_2 \Rightarrow c_2=0$. Άρα $\left(x^2+1\right)f(x)=2x \Rightarrow f(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)}$

β. Έχουμε ότι $E(\alpha)=\int_0^\alpha \left|f(x)\right|dx$. Όμως $f(x)=0$ όταν $x=0$, και για $x>0$, $f(x)>0$. Οπότε

$E(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx \Rightarrow E(\alpha)=\int_0^\alpha \dfrac{2x}{x^2+1}dx \Rightarrow E(\alpha)=\int_0^\alpha \dfrac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx \Rightarrow E(\alpha)=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^\alpha \Rightarrow$
$E(\alpha)=\ln\left(\alpha^2+1\right)$. Όμως το α μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο, συνεπώς είναι συνάρτηση του t, οπότε το εμβαδό γράφεται $E(\alpha(t))=\ln\left(\alpha^2(t)+1\right)$.

Έτσι $\left(E(\alpha(t))\right)'=\left(\ln\left(\alpha^2(t)+1\right)\right)'=\dfrac{1}{\alpha^2(t)+1}\cdot 2\alpha(t)\cdot\alpha'(t)$.

Τη στιγμή t_0, έχουμε $\alpha(t_0)=3cm$ και $\alpha'(t_0)=10\,{}^{cm}\!/_{sec}$. Άρα
$E'(t)=\dfrac{1}{3^2+1}\cdot 2\cdot 3\cdot 10\,{}^{cm^2}\!/_{sec}=6\,{}^{cm^2}\!/_{sec}$.

γ.i. Έχουμε ότι $\left|g(x)+x-2\right|\le\left|f(x)\right| \Rightarrow \left|g(x)-(-x+2)\right|\le\left|f(x)\right| \Rightarrow -\left|f(x)\right|\le g(x)-(-x+2)\le\left|f(x)\right|$.
Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|f(x)\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{2x}{x^2}\right|=0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-(-x+2)\right)=0$. Άρα η ευθεία $y=-x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. $E=\int_0^2\left|g(x)+x-2\right|\le\int_0^2\left|f(x)\right|dx=\int_0^2\dfrac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^2\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2=\ln 5-\ln 1=\ln 5$.
Άρα $E\le\ln 5$

Θέμα 28ο.

Έστω $z \in \mathbb{C}$ και η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|z-1|x^3-|z-2|x}{x-1}$, $x \in (1,+\infty)$, τέτοια ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός.

Να αποδείξετε ότι:

α. i. $|z-1|=|z-2|$.

ii. ο μιγαδικός z, που έχει το ελάχιστο μέτρο είναι ο $\dfrac{3}{2}$.

β. i. η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

ii. η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $2012\cdot|z-1|$.

γ. Αν επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x) & ,x>1 \\ 4 & ,x=1 \\ \dfrac{4\eta\mu(x-1)}{x-1} & ,x<1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 1, να αποδείξετε ότι:

i. το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(4,+\infty)$.

ii. $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$ ή $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$

Λύση:

α.i. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ αν $\lim\limits_{x\to 1^+}|z-1|x^3-|z-2|x \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ (που απορρίπτεται, αφού το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός), οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}|z-1|x^3-|z-2|x=0 \Rightarrow |z-1|=|z-2|$

ii. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου $A(1,0)$, $B(2,0)$.

Άρα η εξίσωση είναι $x=\dfrac{3}{2}$ όπου $z=\dfrac{3}{2}+yi$, $y\in\mathbb{R}$, άρα η εικόνα του μιγαδικού z που έχει ελάχιστο μέτρο, είναι το σημείο $\Gamma\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ που αντιστοιχεί στο μιγαδικό $z=\dfrac{3}{2}$.

Οπότε η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\frac{|z-1|x^3-|z-1|x}{x-1}=\frac{|z-1|(x^3-x)}{x-1}=|z-1|x(x+1),\quad x\in(1,+\infty)$,

όπου όπου $z=\frac{3}{2}+yi$, $y\in\mathbb{R}$.

β.i. Για κάθε $x>1$ έχουμε, $f'(x)=|z-1|\cdot x+|z-1|\cdot(x+1)=|z-1|\cdot(2x+1)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

ii. Αναζητούμε ένα $x_0\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2012\cdot|z-1|$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$f(x_0)=2012\cdot|z-1|\Leftrightarrow|z-1|\cdot x_0\cdot(x_0+1)=2012\cdot|z-1|\Leftrightarrow x_0^2+x_0-2012=0$ με $\Delta=1+4\cdot2012>0$

και επειδή $P=x_1\cdot x_2=-2012<0$, άρα οι λύσεις είναι ετερόσημες, οπότε η αρνητική λύση απορρίπτεται λόγω πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (και η άλλη είναι δεκτή αφού είναι μεγαλύτερη της μονάδας - προκύπτει με πολλούς τρόπους), άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2012\cdot|z-1|$

Β' τρόπος: Προκύπτει εύκολα και από την εύρεση του συνόλου τιμών της f όπως θα δούμε στο παρακάτω ερώτημα.

γ. Για να είναι συνεχής η g στο σημείο $x_0=1$ πρέπει:

$\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=g(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=4\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}\left[|z-1|\cdot x\cdot(x+1)\right]=4\Rightarrow2|z-1|=4\Rightarrow|z-1|=2=|z-2|$

(δεν χρειάζεται να πάρουμε τον κλάδο για $x<1$, αν και το όριο βγαίνει πάλι 4, από συνέχεια - οπότε είναι περιττό)

Άρα η συνάρτηση f γίνεται: $f(x)=2\cdot x\cdot(x+1)=2x^2+2x,\ x\in(1,+\infty)$.

Εύρεση συνόλου τιμών της f.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2)=+\infty$

Σημείωση: Από εδώ φαίνεται ότι το 2012 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και επειδή είναι γνησίως μονότονη, το σημείο αυτό είναι μοναδικό.

Άρα, $f(\Delta)=(4,+\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται με $D_{f^{-1}}=(4,+\infty)$.

ii. Έχουμε: $|z-1|=2\Leftrightarrow\left|\frac{3}{2}+yi-1\right|=2\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+y^2}=2\Leftrightarrow y^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{15}}{2}$ ή $y=-\frac{\sqrt{15}}{2}$

οπότε οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι: $z=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i$ ή or $z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i$.

Θέμα 29ο.

α. Αν οι συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι ¨1-1¨, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι ¨1-1¨.

β. Αν η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, είναι ¨1-1¨, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $h(x) = [f(x)]^3 + 2f(x) - 3$ είναι ¨1-1¨.

γ. Έστω η συνάρτηση $h(x) = e^{3g(x)} + 2e^{g(x)} - 3$, όπου g συνάρτηση ¨1-1¨ ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $g(2) = \ln 2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της h και ότι $h^{-1}(0) = 0$ και $h^{-1}(9) = 2$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $h\left(-2 + h^{-1}\left(x^2 - 8x\right)\right) = 0$.

Λύση:

α. Έστω $x_1, x_2 \in D_{f\circ g}$ με $f\left(g(x_1)\right) = f\left(g(x_2)\right)$. Τότε, αφού η f είναι "1−1" θα έχουμε $g(x_2) = g(x_2) \overset{g "1-1"}{\Rightarrow} x_1 = x_2$. Άρα και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι ¨1-1¨.

β. Θεωρώ τη συνάρτηση g με $g(x) = x^3 + 2x - 3$. Αν αποδείξω ότι η g είναι "1−1", τότε και αφού η f είναι "1−1", από το **(α)** ερώτημα, και η σύνθεση τους $(g \circ f)(x)$ θα είναι "1−1".

Έστω $x_1, x_2 \in D_g$ με $x_1 < x_2$.

Τότε $x_1^3 < x_2^3$, οπότε αν προσθέσω κατά μέλη έχουμε

$\oplus\begin{cases} x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \overset{-3}{\Leftrightarrow} x_1^3 + x_1 - 3 < x_2^3 + x_2 - 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$. Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "1−1". Αν θεωρήσω σαν $h(x) = (g \circ f)(x)$, τότε η συνάρτηση $h(x) = [f(x)]^3 + 2f(x) - 3$ είναι ¨1-1¨.

γ. Η συνάρτηση $h(x) = e^{3g(x)} + 2e^{g(x)} - 3$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x)$, e^x $f(x) = x^3 + 2x - 3$, που κάθε μία είναι "1−1", οπότε από προηγούμενο ερώτημα, και η σύνθεση τους $h(x) = e^{3g(x)} + 2e^{g(x)} - 3$ είναι ¨1-1¨ στο $\mathbb{R}$.

Άρα η $h(x) = e^{3g(x)} + 2e^{g(x)} - 3$ αντιστρέφεται, δηλαδή υπάρχει η η αντίστροφη συνάρτηση της h.

Αφού η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $g(2) = \ln 2$, τότε:

$h(2) = e^{3g(2)} + 2e^{g(2)} - 3 = e^{3\ln 2} + 2e^{\ln 2} - 3 = e^{\ln 2^3} + 2e^{\ln 2} - 3 = 2^3 + 2\cdot 2 - 3 = 9$

Οπότε $h(2) = 9 \Leftrightarrow h^{-1}\left(h(2)\right) = h^{-1}(9) \Leftrightarrow h^{-1}(9) = 2$

Ακόμα η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε $g(0)=0$ και

$h(0)=e^{3g(0)}+2e^{g(0)}-3=e^{3\cdot 0}+2e^{0}-3=1+2-3=0$. Άρα

$h(0)=0 \Leftrightarrow h^{-1}(h(0))=h^{-1}(0) \Leftrightarrow h^{-1}(0)=0$

ii. $h\left(-2+h^{-1}\left(x^2-8x\right)\right)=0 \Leftrightarrow h\left(-2+h^{-1}\left(x^2-8x\right)\right)=h(0) \overset{h\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} -2+h^{-1}\left(x^2-8x\right)=0 \Leftrightarrow$

$h^{-1}\left(x^2-8x\right)=2 \Leftrightarrow h^{-1}\left(x^2-8x\right)=h^{-1}(9) \overset{h^{-1}\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} x^2-8x=9 \Leftrightarrow x^2-8x-9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=9 \end{cases}$

Θέμα 30ο.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα με $f(-1)>0$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=\frac{f(-1)\cdot f(0)}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{f(1)}i$, για τον οποίο ισχύει $|z|=\frac{z}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$.Να αποδείξετε ότι ισχύουν:

α. $f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)=8$

β. $2\operatorname{Re}(z)=|z|$

γ. $f(-1)<2<f(1)$

δ. $-1<f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right)<0$

Λύση:

α. Έστω $z=x+yi$,με $x,y\in\mathbb{R}$

$$|z|=\frac{z}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)=\frac{x+yi}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)\Leftrightarrow 2|z|=x-\sqrt{3}xi+yi+\sqrt{3}y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|z|=x+\sqrt{3}y+i\left(y-\sqrt{3}x\right)$$

Δηλαδή $2|z|=x+\sqrt{3}y$ **(1)** και $y-\sqrt{3}x=0\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x$ **(2)** (διότι $|z|$ πραγματικός αριθμός)

Από υπόθεση έχουμε ότι $z=\frac{f(-1)\cdot f(0)}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{f(1)}i$, δηλαδή $x=\frac{f(-1)f(0)}{2}$ και $y=\frac{4\sqrt{3}}{f(1)}$,με αντικατάσταση στη σχέση 2 προκύπτει $\frac{4\sqrt{3}}{f(1)}=\sqrt{3}\frac{f(-1)f(0)}{2}\Leftrightarrow 8=f(1)f(-1)f(0)$

β. Η **(1)** με βάση **(2)** γίνεται $2|z|=x+\sqrt{3}\sqrt{3}x=x+3x=4x\Leftrightarrow|z|=2x\Leftrightarrow|z|=2\operatorname{Re}(z)$

γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(-1)>0$ οπότε για $-1<0<1$ θα έχουμε $0<f(-1)<f(0)<f(1)$

Πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη της ανίσωσης με $f(-1)f(1)$ (θετικοί αριθμοί) και έχουμε:

$$f^2(-1)f(1)<f(-1)f(0)f(1)<f^2(1)f(-1)\Leftrightarrow f^2(-1)f(1)<8<f^2(1)f(-1)\quad \textbf{(3)}$$

Όμως $f(-1)<f(1)\Leftrightarrow f^3(-1)<f^2(-1)f(1)$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον θετικό αριθμό $f^2(-1)$) , οπότε ο αριθμός $f^3(-1)$ είναι ένα κάτω φράγμα.

Όμοια $f(-1)<f(1) \Leftrightarrow f(-1)f^2(1)<f^3(1)$ (πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη με τον θετικό αριθμό $f^2(1)$),οπότε ο αριθμός $f^3(1)$ είναι ένα άνω φράγμα.

Επομένως έχουμε $f^3(-1)<f^2(-1)f(1)<8<f(-1)f^2(1)<f^3(1)$ δηλαδή $f^3(-1)<\ 8\ <f^3(1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(-1)<2<f(1)$

δ. $-1<f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right)<0 \Leftrightarrow f(-1)<\sqrt{|z|}<f(0) \Leftrightarrow f^2(-1)<|z|<f^2(1)$

Όμως $|z|=2\mathrm{Re}(z)$ ή $|z|=2\dfrac{f(-1)\cdot f(0)}{2}$ ή $|z|=f(0)\cdot f(-1)$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι: $f^2(-1)<f(0)f(-1)<f^2(0)$, το οποίο ισχύει, διότι

$f(-1)<f(0) \Leftrightarrow f^2(-1)<f(-1)\cdot f(0)$ και $f(-1)<f(0) \Leftrightarrow f(-1)\cdot f(0)<f^2(0)$

Θέμα 31ο.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $|z-4-4i| = \sqrt{2}$ και $\mathrm{Im}(z) \geq 4$.

α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αυτών..

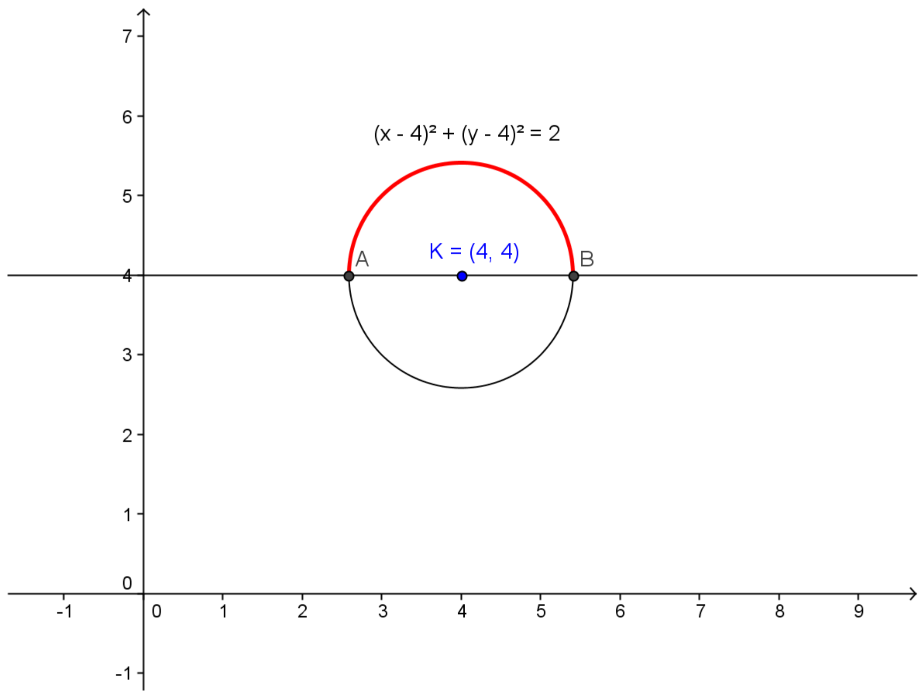
β. Να δείξετε ότι οι εικόνες των παραπάνω μιγαδικών ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4 + \sqrt{-x^2 + 8x - 14}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

γ. Να βρεθεί ο μιγαδικός του παραπάνω γεωμετρικού τόπου με το μέγιστο μέτρο.

δ. Να γράψετε την εξίσωση εφαπτομένης της παραπάνω συνάρτησης στο σημείο το οποίο είναι η εικόνα του μιγαδικού που βρήκατε στο τρίτο ερώτημα.

Λύση:

α. Η σχέση $|z-4-4i| = \sqrt{2}$ περιγράφει κύκλο κέντρου $K(4,4)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{2}$, με εξίσωση $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$. Όμως η σχέση $\mathrm{Im}(z) \geq 4$ περιγράφει τα σημεία του κύκλου με τεταγμένη $y \geq 4$. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ημικύκλιο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 4$, καθώς και τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία αυτή. (Βλέπε σχήμα 1)



β. Αφού ισχύει ότι $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ και $y \geq 4$, θα έχουμε:

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2 \Leftrightarrow (y-4)^2 = 2 - (x-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4 = \sqrt{2-(x-4)^2} \\ y - 4 = -\sqrt{2-(x-4)^2} \end{cases}$$

Άρα $\begin{cases} y-4=\sqrt{2-(x-4)^2} \\ y-4=-\sqrt{2-(x-4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-4=\sqrt{2-x^2+8x-16} \\ y-4=-\sqrt{2-x^2+8x-16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4+\sqrt{-x^2+8x-14} \\ y=4-\sqrt{-x^2+8x-14} \end{cases}$.

Όμως , άρα θα πρέπει να ισχύει $y=4+\sqrt{-x^2+8x-14}$, οπότε αν θέσουμε σαν $y \to f(x)$, θα έχουμε $f(x)=4+\sqrt{-x^2+8x-14}$. Είναι εύκολο να δούμε, είτε αλγεβρικά, είτε από το σχήμα, ότι η f ορίζεται όταν $x \in \left(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\right)$, δηλαδή όταν $x \in (x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, όπου (x_0, y_0) οι συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου, και ϱ η ακτίνα του.

γ. Φέρνουμε την διάκεντρο (θα είναι η ευθεία $y=x$, διότι διέρχεται από το $O(0,0)$ και $K(4,4)$, οπότε ο ζητούμενος μιγαδικός θα είναι το σημείο τομής M του ημικυκλίου με την ευθεία αυτή.

Λύνουμε λοιπόν το σύστημα της ευθείας και του ημικυκλίου:

$$\begin{cases} y=4+\sqrt{-x^2+8x-14} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4+\sqrt{-y^2+8y-14} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-4=\sqrt{-y^2+8y-14} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)^2=\left(\sqrt{-y^2+8y-14}\right)^2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-8y+16=-y^2+8y-14 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-16y+30=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow$$

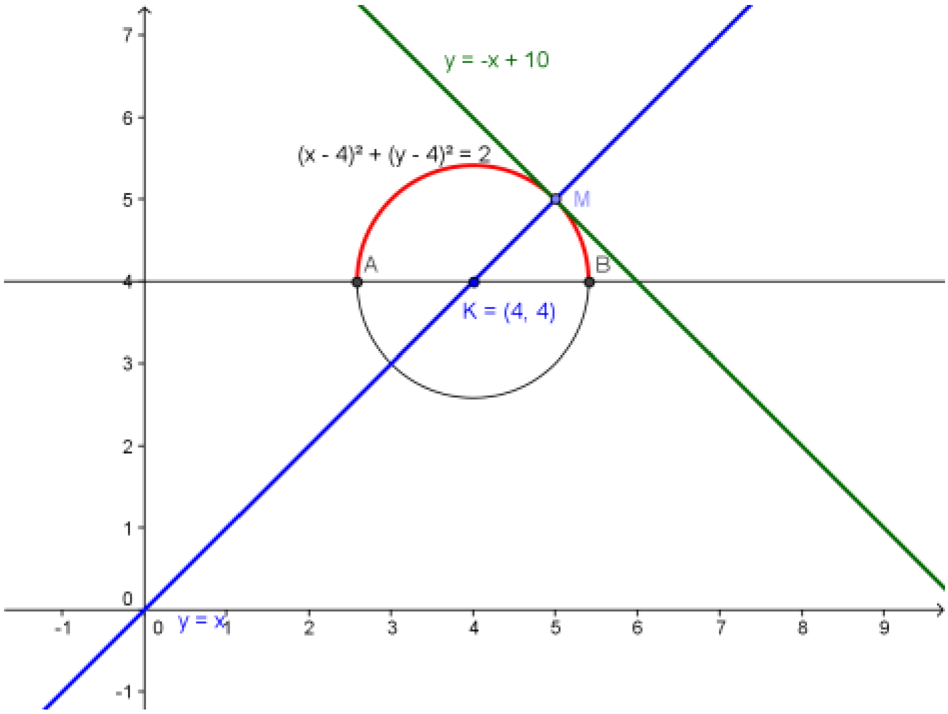
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=3 \\ y=x \end{cases} \overset{y\geq 4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=5 \\ x=5 \end{cases}$. Οπότε ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $M=5+5i$

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(5,5)$ θα έχει τύπο $y-f(5)=f'(5)(x-5)$.

Όμως $f'(x)=\left(4+\sqrt{-x^2+8x-14}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+8x-14}}\cdot\left(-x^2+8x-14\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+8x-14}}\cdot(-2x+8)$

Οπότε $f'(5)=\dfrac{1}{2\sqrt{-5^2+8\cdot 5-14}}\cdot(-2\cdot 5+8)=\dfrac{-2}{2\cdot 1}=-1$

Οπότε η **(ε)** θα έχει τύπο $y-5=-1(x-5) \Leftrightarrow y=-x+10$


y = -x + 10
(x - 4)² + (y - 4)² = 2
M
A
B
K = (4, 4)
y = x
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Θέμα 32ο.

Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$, με $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1,x_2\in(1,e)$, με $x_1\neq x_2$, τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

γ. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)\left[f'(x_0)-4f^4(x_0)\right]=x_0$

δ. Η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη να ανήκει στο διάστημα $(1,e)$

ε. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$, με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοια ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

Λύση:

α. Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$, από *θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής* θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[1,e]$ τέτοια ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$ όπου m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα. Η f έχει σύνολο τιμών το $[-1,4]$ και $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ οπότε $f(x_1)<f(1)<f(e)<f(x_2)$, επομένως x_1,x_2 δεν είναι άκρα του διαστήματος $[1,e]$. Άρα $x_1,x_2\in(1,e)$ και επειδή η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτά, από *θεώρημα Fermat* έχουμε ότι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β. Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subset[1,e]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1,x_2)\subset[1,e]$ και από α. $f'(x_1)=f'(x_2)$. Από *Θ.Rolle* θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\left[f'(x)-4f^4(x)\right]-x$ συνεχή στο $[1,e]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα και στο $(x_1,x_2)\subset[1,e]$. Επίσης,

$$g(x_1)=f(x_1)\left[f'(x_1)-4f^4(x_1)\right]-x_1=4\left[0-4\cdot4^4\right]-x_1=-4^6-x_1<0$$
$$g(x_2)=f(x_2)\left[f'(x_2)-4f^4(x_2)\right]-x_2=(-1)\left[0-4(-1)^4\right]-x_2=4-x_2>0$$

Από *Θ. Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)\left[f'(x_0)-4f^4(x_0)\right]-x_0\Rightarrow f(x_0)\left[f'(x_0)-4f^4(x_0)\right]=x_0$$

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-(-x+e+2)=f(x)+x-e-2$ συνεχή στο $[1,e]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επίσης,

$$h(1)=f(1)+1-e-2=2+1-e-2=-e+1<0 \text{ και } h(e)=f(e)+e-e-2=e+1-2=e-1>0$$

Από *Θ. Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_3 \in (1,e)$, τέτοιο ώστε

$h(x_3)=0 \Rightarrow f(x_3)+x_3-e-2 \Rightarrow f(x_3)=-x_3+e+2$, δηλαδή η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη να ανήκει στο διάστημα $(1,e)$

ε. Αφού η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ (όπως στο α.) και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$. Άρα θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *Θ.Μ.Τ.* στο $[1,e]$, συνεπώς και στα υποδιαστήματα αυτού $[1,x_3],[x_3,e]$, όπου x_3 από το δ. Από το πρώτο διάστημα συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει $\xi_1 \in (1,x_3) \subseteq (1,e)$ με

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_3)-f(1)}{x_3-1}=\dfrac{-x_3+e+2-2}{x_3-1}=\dfrac{-x_3+e}{x_3-1}$ και από το δεύτερο ότι θα υπάρχει

$\xi_2 \in (x_3,e) \subseteq (1,e)$ με

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(e)-f(x_3)}{e-x_3}=\dfrac{e+1+x_3-e-2}{e-x_3}=\dfrac{x_3-1}{-x_3+e}$.

Άρα $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{-x_3+e}{x_3-1}\cdot\dfrac{x_3-1}{-x_3+e}=1$ με $\xi_1,\xi_2 \in (1,e)$ και $\xi_1 \neq \xi_2$ (αφού $(1,x_3)\cap(x_3,e)=\varnothing$)

Θέμα 33ο.

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν: $|z| = 1$ και $z = x + i \cdot f(x)$, $x \in A$.

α. Να δείξετε ότι $A \subseteq [-1, 1]$ και $f(A) \subseteq [-1, 1]$.

β. Αν $A = [0, 1]$ ή $A = [-1, 0]$ να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$.

γ. Αν $A = [-1, 0]$ και ο αριθμός $\dfrac{z^2 - 1}{2iz}$ είναι <u>**μη αρνητικός**</u> πραγματικός τότε:

i. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

ii. Να ορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Λύση:

α. Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$, τότε

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \overset{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow} 4x_1 + 9 = 4x_2 + 9 \Leftrightarrow 4x_1 = 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η g είναι $1-1$.

β. Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = y$ **(1)**

Έστω $y \in \mathbb{R}$. Τότε από την υπόθεση $f(g(x)) = 4x + 9$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $4x + 9 = y \Rightarrow x = \dfrac{y-9}{4}$,

οπότε: $f\left(g\left(\dfrac{y-9}{4}\right)\right) = y$ **(2)**

Από τη σχέση **(2)**, θεωρούμε σαν x_0 το $x_0 = g\left(\dfrac{y-9}{4}\right)$ και έτσι η σχέση **(2)** μας δίνει την **(1)**.

γ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ **(3)**.

Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $g(x_1) > g(x_2)$

Υποθέτουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$g(x_1) \le g(x_2) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(g(x_1)) \ge f(g(x_2)) \overset{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow} 4x_1 + 9 \ge 4x_2 + 9 \Leftrightarrow 4x_1 \ge 4x_2 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2$ άτοπο από την **(3)**

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

δ. Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες, τότε η υπόθεση γράφεται:

$f(f(x)) = 4x + 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **(4)**

Επειδή όμως η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ (ερώτημα **(α)**, αφού f = g) και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ (ερώτημα **(β)**), η f έχει αντίστροφη, την $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Έτσι, αν $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας στην **(4)** όπου x το $f^{-1}(x)$ βρίσκουμε διαδοχικά:

$$f\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right) = 4f^{-1}(x) + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4f^{-1}(x) + 9 \Leftrightarrow \quad (\text{αφού } f\left(f^{-1}(x)\right) = x)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{f(x) - 9}{4}$$

Θέμα 34ο.

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_2^0 -x|z_1xt+z_2|dt$ και για την οποία ισχύει $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x)=\int_0^{2x}|z_1t+z_2|dt$

β. $|z_2|=\frac{1}{2}$

γ. Η εξίσωση $f(x)=2013$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

δ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\int_0^x\left|z_1t+\frac{z_2}{2}\right|dt\geq\frac{x}{4}$

Λύση:

α. Έχουμε ότι $f(x)=\int_2^0 -x|z_1tx+z_2|dt$.

Θέτουμε $xt=u\Rightarrow xdt=du\Rightarrow dt=\frac{du}{x}$ και τα άκρα γίνονται: $\begin{cases}t=2\Rightarrow u=2x\\ t=0\Rightarrow u=0\end{cases}$

και έτσι

$$f(x)=\int_{2x}^0 -x|z_1u+z_2|\frac{du}{x}=\int_{2x}^0 -|z_1u+z_2|du=\int_0^{2x}|z_1u+z_2|du\overset{u\to t}{=}\int_0^{2x}|z_1t+z_2|dt$$

β. Για $x=0$ έχουμε ότι $f(0)=\int_0^0|z_1t+z_2|dt=0$

Θεωρώ $h(x)=f(x)-x$, οπότε $h(x)\geq 0$ για κάθε x, συνεπώς $h(x)\geq h(0)$ διότι $h(0)=f(0)-0=0$. Άρα από *θεώρημα Fermat*, το $h'(0)=0$, δηλαδή $f'(0)-1=0$.

Όμως $f'(x)=\left(\int_0^{2x}|z_1t+z_2|dt\right)'=|z_1 2x+z_2|\cdot(2x)'=2|z_1 2x+z_2|$, οπότε

$f'(0)=2|z_1 2\cdot 0+z_2|=2|z_2|$. Άρα $f'(0)-1=0\Rightarrow 2|z_2|-1=0\Rightarrow|z_2|=\frac{1}{2}$

γ. Έχουμε $f'(x)=2|z_1 2x+z_2|\geq 0$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Έχουμε ότι : $f(x)\geq x$, οπότε:

- $f(x) \geq x \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $f(x) \geq x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \underset{D.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0^+} 2|z_1 2x + z_2| = 2|z_2| = 2\cdot\frac{1}{2} = 1, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\cdot 1) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $(0,+\infty)$, που περιέχει το 2013, οπότε αφού η f είναι συνεχής, από *θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών*, θα υπάρχει ένα $x_0 \in (0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2013$. Όμως στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "$1-1$", οπότε το x_0 αυτό είναι μοναδικό.

δ. Έχουμε ότι : $f(x) \geq x \Rightarrow \int_0^{2x} |z_1 t + z_2| dt \geq x$

Θέτουμε $\dfrac{t}{2} = u \Rightarrow dt = 2du$ και τα άκρα γίνονται: $\begin{cases} t = 2x \Rightarrow u = x \\ t = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$

και έτσι

$$\int_0^{2x} |z_1 t + z_2| dt \geq x \Rightarrow \int_0^{x} |z_1 2u + z_2| 2du \geq x \Rightarrow 4\int_0^{x} \left|z_1 u + \frac{z_2}{2}\right| du \geq x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{x} \left|z_1 u + \frac{z_2}{2}\right| du \geq \frac{x}{4} \overset{u\to t}{\Rightarrow} \int_0^{x} \left|z_1 t + \frac{z_2}{2}\right| dt \geq \frac{x}{4}$$

Θέμα 35ο.

i. Να αποδείξετε την ανισότητα: $x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)$.

Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, τότε να δείξετε ότι $\frac{7}{30}<E<\frac{1}{3}$

(Stydy4exams)

Λύση:

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln(1+x)-x$ με $x>-1$.

Έχουμε $h'(x)=(\ln(1+x))'-(x)'=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$ οπότε σχηματίζουμε τον εξής πίνακα προσήμου:

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	+	0	-	

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για $x>0$ έπεται

$h(x)=\ln(1+x)-x<h(0)=0\Leftrightarrow \ln(1+x)<x$.

Άρα $\ln(1+x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.

Ομοίως θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$, $x>-1$. Η παράγωγός της είναι:

$g'(x)=(\ln(1+x))'-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{1}{x+1}-1+x=\frac{x^2}{x+1}$, $x>-1$, οπότε

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	+	

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για $x>0$ έπεται

$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>g(0)=0$.

Άρα $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x\ge 0$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.

ii. Με βάση το προηγούμενο ερώτημα ισχύει:

$x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x \overset{x\to x^2}{\Leftrightarrow} x^2-\frac{x^4}{2}\le \ln\left(1+x^2\right)\le x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (αφού $x^2\ge 0$)

άρα $x^2-\frac{x^4}{2}\le f(x)\le x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης $1+x^2\ge 1$ άρα $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)\ge \ln 1=0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ε που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, ισούται με $E=\int_0^1 f(x)dx$.

Ολοκληρώνουμε τη σχέση $x^2-f(x)\ge 0$ και παίρνουμε:

$$\int_0^1\left(x^2-f(x)\right)dx>0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 x^2dx\Leftrightarrow E<\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\Leftrightarrow E<\frac{1}{3}$$

Η ανισότητα είναι γνήσια, γιατί η συνεχής συνάρτηση $x^2-f(x)$ δεν είναι παντού μηδέν.

Ομοίως ολοκληρώνοντας την ανισότητα $f(x)-x^2+\frac{x^4}{4}$ παίρνουμε:

$$\int_0^1\left(f(x)-x^2+\frac{x^4}{4}\right)dx>0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left(x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx\Leftrightarrow E>\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1\Leftrightarrow E>\frac{7}{30}$$

Η ανισότητα και πάλι είναι γνήσια, γιατί η συνεχής συνάρτηση $f(x)-x^2+\frac{x^4}{4}$ δεν είναι παντού μηδέν.

Άρα $\frac{7}{30}<E<\frac{1}{3}$.

Θέμα 36ο.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

ii. $f'(0)=1$.

β. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3$.

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i. $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

ii. $\int_0^1 f(x)dx<f(1)$.

(Επαναληπτικές 2005)

Λύση:

α.i. : Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-x}{x^2}=g(x)$ **(1)** , οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2005$.

Λύνοντας τη σχέση ως προς f , έχουμε $f(x)=x^2g(x)+x$.

Το όριο στο δεύτερο μέλος υπάρχει, άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2f(x)+x\right)=0\cdot 2005+0=0$.

ii. Από τη σχέση **(1)** για $x\neq 0$ προκύπτει $\dfrac{f(x)}{x}=xg(x)+1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)+1\right)=1$. Άρα $f'(0)=1$.

β. Εκμεταλλευόμαστε το προηγούμενο όριο, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1+\lambda\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}=3\Rightarrow\frac{1+\lambda}{2+1}=3\Rightarrow\lambda=8$$

γ.i. Η σχέση που μας δίνεται γράφεται ισοδύναμα:

$f'(x) > f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) > 0 \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)' > 0$.

Επομένως η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα για $x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) = 0 \Rightarrow e^{-x}f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$. Επομένως $xf(x) > 0$.

Ομοίως για $x < 0 \Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow e^{-x}f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$, άρα $xf(x) > 0$.

ii. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) > f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(f'(x) - f(x)\right)dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f(x)dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(x)dx > \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \left[f(x)\right]_0^1 > \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < f(1)$$

Θέμα 37ο.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ και ισχύει :

- $f(1)=g(1)=f'(1)=g'(1)=0$
- $f'(x)=e^{g(x)}+1$ **(1)**
- $g'(x)=e^{f(x)}+1$ **(2)**

για κάθε $x>0$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x>0$.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση $h(x)=e^{-f(x)}+x$, $x>0$.

γ. Αν $\alpha>0$ και για κάθε $x>-1$ ισχύει : $h(x+1)\geq 3-\alpha^x$ **(*)** , να δείξετε ότι $\alpha=e^3$.

Λύση:

α. Η g είναι παραγωγίσιμη και η $e^{g(x)}$ παραγωγίσιμη επομένως και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $e^{g(x)}$ και της σταθερής συνάρτησης 1, με $f''(x)=e^{g(x)}g'(x)$ **(3)**.

Ομοίως g'(x) είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $e^{f(x)}$ και της σταθερής συνάρτησης 1 με $g''(x)=e^{f(x)}f'(x)$ **(4)**

(3) $\overset{(1)}{\Rightarrow} f''(x)=(f'(x)-1)g'(x)=f'(x)g'(x)-g'(x)\Rightarrow f'(x)g'(x)=f''(x)+g'(x)$ **(5)**

(4) $\overset{(2)}{\Rightarrow} g''(x)=(g'(x)-1)f'(x)=f'(x)g'(x)-f'(x)\Rightarrow f'(x)g'(x)=g''(x)+f'(x)$ **(6)**

Από τις **(5)** και **(6)** έχουμε : $f''(x)+g''(x)=g''(x)+f'(x)\Rightarrow (f''(x)+g'(x))=(g''(x)+f'(x))'\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)+g(x)=g'(x)+f(x)+c_1$.

Για $x=1$ προκύπτει $f'(1)+g(1)=g'(1)+f(1)+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$

Άρα $f'(x)+g(x)=g'(x)+f(x)\Rightarrow f'(x)-g'(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow (f(x)-g(x))'=f(x)-g(x)$

Άρα $f(x)-g(x)=c\cdot e^x$.

Για x=1 προκύπτει $f(1)-g(1)=c\cdot e^1 \Leftrightarrow c=0$. Επομένως $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ για κάθε $x>0$.

β. $h(x)=e^{-f(x)}+x$. Η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$h'(x)=e^{-f(x)}(-f(x))'+1=e^{-f(x)}(-f'(x))+1=-e^{-f(x)}f'(x)+1=-e^{-f(x)}\left(e^{g(x)}+1\right)+1=$$

$$\overset{f(x)=g(x)}{=} -e^{-f(x)}\left(e^{f(x)}+1\right)+1=-1-e^{-f(x)}+1=-e^{-f(x)}=x-h(x)$$

Άρα $h'(x)=x-h(x)\Leftrightarrow h'(x)+h(x)=x\Leftrightarrow e^x\cdot h'(x)+e^x\cdot h(x)=x\cdot e^x\Leftrightarrow$

$\Rightarrow\left(e^x\cdot h(x)\right)'=x\cdot e^x\Rightarrow\int\left(e^x\cdot h(x)\right)'dx=\int\left(x\cdot e^x\right)dx$ **(7)**

Αν θεωρήσω σαν $I=\int\left(x\cdot e^x\right)dx=x\cdot e^x-\int e^x dx=x\cdot e^x-e^x+c$

(7)$\Rightarrow$ $e^x\cdot h(x)=x\cdot e^x-e^x+c$

Για $x=1$ έχουμε $h(1)=e^{-f(1)}+1=e^0+1=2$ και $e^1\cdot h(1)=1\cdot e-e+c\Leftrightarrow c=2e$

Άρα $e^x\cdot h(x)=x\cdot e^x-e^x+2e\Rightarrow h(x)=x-1+2e\cdot e^{-x}\Rightarrow h(x)=x-1+2e^{1-x},\ \ x>0$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\alpha^x-3+h(x+1)=\alpha^x-3+x+2e^{-x}$.

Τότε λόγω της **(*)** έχουμε ότι $\alpha^x-3-x+2e^{-x}\geq 0$ για κάθε $x>-1$ ή $\varphi(x)\geq 0$ για κάθε $x>-1$.

Είναι $\varphi(0)=\alpha^0-3-0+2e^0=0$

Άρα $\varphi(x)\geq\varphi(0)$ για κάθε $x>-1$ οπότε η φ παρουσιάζει στο $x_0=0$ ελάχιστο.

Επειδή η φ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ από το *θεώρημα Fermat* θα ισχύει $\varphi'(0)=0$

Επειδή $\varphi'(x)=\alpha^x\ln\alpha-1-2e^{-x}$ θα έχουμε ότι

$\varphi'(0)=0\Rightarrow\alpha^0\ln\alpha-1-2e^0=0\Rightarrow\ln\alpha-1-2=0\Rightarrow\ln\alpha=3\Rightarrow\alpha=e^3$

Θέμα 38ο.

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)\,dt+x^3}{\eta\mu^3 x}=+\infty$

Αν **επιπλέον** δίνεται ότι $f'(x)+2x=2x\cdot\left(f(x)+x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$

δ. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x)=\int_x^{x+2} f(t)\,dt$, $x\geq 0$ και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)\,dt+\int_6^4 f(t)\,dt<0$

(Επαναληπτικές 2010)

Λύση

α. Εφόσον η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα για $x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$ και

για $x<0\Rightarrow f'(x)<f'(0)\Rightarrow f'(x)<0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Επειδή η f είναι και συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Συνεπώς για $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>1$ και

για $x<0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>1$.

Επιπλέον ισχύει $f(0)=1$, άρα $f(x)\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Έστω $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$. Θέτουμε $xt=u$, οπότε $x\,dt=du\Leftrightarrow dt=\dfrac{du}{x}$ και για

$t=0$ έχουμε $u=0$, ενώ για $t=1$ έχουμε $u=x$.

Έτσι η συνάρτηση g γράφεται: $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$ και το ζητούμενο όριο

γίνεται $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du+x^3}{\eta\mu^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du+x^3}{\eta\mu^3 x}$

Επειδή η συνάρτηση $p(x)=\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη, θα είναι και συνεχής, άρα

$\lim\limits_{x\to 0}p(x)=p(0)=0$. Έτσι το ζητούμενο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_0^x f(u)du+x^3\right)'=\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+3x^2\right)=f(0)=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu^3 x\right)'=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=0$, με $3\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x>0$ κοντά στο 0,

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du+x^3}{\eta\mu^3 x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3x^2}{3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+3x^2\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$

γ. Έχουμε $f'(x)+2x=2x\cdot\left(f(x)+x^2\right)\Leftrightarrow\left(f(x)+x^2\right)'=2x\cdot\left(f(x)+x^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left(f(x)+x^2\right)'}{f(x)+x^2}=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow\left(\ln\left(f(x)+x^2\right)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow\ln\left(f(x)+x^2\right)=x^2+c$

Για $x=0$ βρίσκουμε $\ln\left(f(0)+0^2\right)=0^2+c\Leftrightarrow\ln 1=c\Leftrightarrow c=0$,

άρα $\ln\left(f(x)+x^2\right)=x^2\Leftrightarrow f(x)+x^2=e^{x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2$.

δ. Έχουμε $h(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt+\int_1^{x+2}f(t)dt=\int_1^{x+2}f(t)dt-\int_1^x f(t)dt$

Επειδή η f είναι συνεχής, η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=-f(x)+f(x+2)=f(x+2)-f(x)$.

Όμως $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)>0$, για κάθε $x>0$ και f συνεχής, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Συνεπώς για $x<x+2\Rightarrow f(x)<f(x+2)$, άρα $h'(x)>0$ και h συνεχής, άρα γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η ανίσωση τώρα γράφεται:

$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3}f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0\Leftrightarrow\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3}f(t)dt<-\int_6^4 f(t)dt\Leftrightarrow\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3}f(t)dt<\int_4^6 f(t)dt\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_{x^2+2x+1}^{(x^2+2x+1)+2}f(t)dt<\int_4^{4+2}f(t)dt\Leftrightarrow h\left(x^2+2x+1\right)<h(4)\Leftrightarrow x^2+2x+1<4\Leftrightarrow -3<x<1$.

Επειδή όμως η h ορίζεται για $x\geq 0$, έχουμε τελικά $0\leq x<1$.

Θέμα 39ο.

α. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να δείξετε ότι :

i. Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{2(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$

β. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha+x\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, η οποία έχει τοπικό ακρότατο το $\dfrac{1}{2}$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

ii. Για $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$, μία στο $\left(\dfrac{1}{e^2},1\right)$ και μία στο διάστημα $(1,e^2)$.

Λύση

α.i. Αφού f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ άρα και συνεχής σε αυτό και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας $f(\alpha)<f(\beta)$. Επίσης $f(\alpha)<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}<f(\beta)$. Σύμφωνα με το *Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών* υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

ii. Εφαρμόζουμε το *Θεώρημα Μέσης Τιμής* στα διαστήματα $[\alpha,\xi]$ και $[\xi,\beta]$ αντίστοιχα, για την f.

- Στο διάστημα $[\alpha,\xi]$ ισχύουν προφανώς οι προϋποθέσεις του θεωρήματος άρα υπάρχει ένα

$\xi_1\in(\alpha,\xi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\dfrac{\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}-f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{2(\xi-\alpha)}$

- Όμοια, στο διάστημα $[\xi,\beta]$ υπάρχει ένα

$\xi_2\in(\xi,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi}=\dfrac{f(\beta)-\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}}{\beta-\xi}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{2(\beta-\xi)}$.

Επομένως $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{2\xi-2\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}+\dfrac{2\beta-2\xi}{f(\beta)-f(\alpha)}=\dfrac{2(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$

β.i. Η $f(x)=\alpha+x\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη σ'αυτό με

$$f'(x)=\ln\left(\frac{e}{x}\right)+x\frac{1}{\frac{e}{x}}\left(-\frac{e}{x^2}\right)=\ln\left(\frac{e}{x}\right)+\frac{x^2}{e}\left(-\frac{e}{x^2}\right)=\ln\left(\frac{e}{x}\right)-1,\ x>0.$$

Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο υπάρχει ένα $x_0>0$ εσωτερικό του $(0,+\infty)$ που σύμφωνα με *θεώρημα Fermat* θα έχουμε $f'(x_0)=0$ και $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

- $f'(x_0)=0\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{e}{x_0}\right)-1=0\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{e}{x_0}\right)=\ln e\overset{\ln x''1-1'''}{\Leftrightarrow}\dfrac{e}{x_0}=e\Leftrightarrow x_0=1$
- $f(x_0)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f(1)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha+1\cdot\ln e=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{2}$

ii. Εξετάζοντας την μονοτονία της f βρίσκουμε

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

(Ολικό) μέγιστο το $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Εφαρμόζοντας *θεώρημα Bolzano* για την συνεχή f στα διαστήματα $\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$, $\left[1,e^2\right]$, έχουμε:

- $f(1)=\dfrac{1}{2}>0$
- $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^2}\ln\left(\dfrac{e}{\frac{1}{e^2}}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^2}\ln e^3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{e^2}=\dfrac{6-e^2}{2e^2}<0$

Δηλ $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)\cdot f(1)<0$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in\left(\dfrac{1}{e^2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ και αφού f γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ (άρα και στο $\left(\dfrac{1}{e^2},1\right)$) η ρίζα x_1 είναι μοναδική στο $(0,1)$.

Επίσης $f(e^2)=-\dfrac{1}{2}+e^2\ln\left(\dfrac{e}{e^2}\right)=-\dfrac{1}{2}-e^2<0$ και $f(1)=\dfrac{1}{2}>0$

Άρα $f(e^2)\cdot f(1)<0$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(1,e^2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$ και αφού η f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ $(0,1)$ (άρα και στο $(1,e^2)$) οπότε η ρίζα x_2 είναι μοναδική στο $(1,+\infty)$

Τελικά η $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Θέμα 40ο.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left|\frac{z}{\alpha^2}-i\right|=\frac{1}{\alpha}|z-i|$ **(1)**
- $w(z-i)-2zi-2\alpha^2=0$ **(2)** , όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $0<\alpha\neq 1$

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $v=\frac{2z-w}{2z+w}$ με $w\neq -2z$, είναι φανταστικός

δ. Αν z_1,z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες αντίστοιχα στο επίπεδο τα σημεία Α,Β, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση **(1)** και w είναι ένας μιγαδικός αριθμός με εικόνα στο επίπεδο το σημείο Γ , ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση **(2)**, τότε να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{3}\leq\frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)}\leq 3$

(ΕΜΕ 2012)

Λύση

α. Είναι:

$$\left|\frac{z}{\alpha^2}-i\right|=\frac{1}{\alpha}|z-i|\Leftrightarrow|z-\alpha^2 i|=\alpha|z-i|\Leftrightarrow|z-\alpha^2 i|^2=\alpha^2|z-i|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z-\alpha^2 i)\left(\overline{z-\alpha^2 i}\right)=\alpha^2(z-i)\left(\overline{z-i}\right)\Leftrightarrow(z-\alpha^2 i)(\bar{z}+\alpha^2 i)=\alpha^2(z-i)(\bar{z}+i)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}+\alpha^2 zi-\alpha^2\bar{z}i-\alpha^4 i^2=\alpha^2 z\bar{z}+\alpha^2 zi-\alpha^2\bar{z}i-\alpha^2 i^2\Leftrightarrow|z|^2-\alpha^4 i^2=\alpha^2|z|^2-\alpha^2 i^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|z|^2-\alpha^2|z|^2=\alpha^2-\alpha^4\Leftrightarrow(1-\alpha^2)|z|^2=(1-\alpha^2)\alpha^2\overset{0<\alpha\neq 1}{\Leftrightarrow}|z|^2=\alpha^2\Leftrightarrow|z|=\alpha\quad\textbf{(3)}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\alpha$.

β. Έχουμε: $w(z-i)-2zi-2\alpha^2=0\Leftrightarrow w(z-i)=2zi+2\alpha^2\overset{z\neq i}{\Leftrightarrow}w=\frac{2zi+2\alpha^2}{z-i}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow w=\frac{2zi+2|z|^2}{z-i}\Leftrightarrow w=\frac{2zi+2z\bar{z}}{z-i}\Leftrightarrow w=\frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i}\quad\textbf{(4)}$$

Είναι $z\neq i$, γιατί αν $z=i$ από τη σχέση **(2)** προκύπτει $\alpha^2=1$ άτοπο.

Από τη σχέση **(4)** έχουμε:

$$|w|=\left|\frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i}\right|\Leftrightarrow|w|=\frac{|2z(\bar{z}+i)|}{|z-i|}\Leftrightarrow|w|=\frac{2|z|\cdot|(\bar{z}+i)|}{|z-i|}\Leftrightarrow|w|=\frac{2|z|\cdot|\overline{z-i}|}{|z-i|}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w| = \frac{2|z|\cdot|z-i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = 2|z| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |w| = 2\alpha \quad \textbf{(5)}$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν στον κύκλο, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2\alpha$

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{v} = -v$. Από τις σχέσεις **(3)** και **(5)** έχουμε:

- $|z| = \alpha^2 \Leftrightarrow z\overline{z} = \alpha^2 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{\alpha^2}{z}$
- $|w| = 2\alpha \Leftrightarrow |w|^2 = 4\alpha^2 \Leftrightarrow w\overline{w} = 4\alpha^2 \Leftrightarrow \overline{w} = \dfrac{4\alpha^2}{w}$

Είναι

$$\overline{v} = \overline{\left(\frac{2z-w}{2z+w}\right)} = \frac{\overline{2z-w}}{\overline{2z+w}} = \frac{2\overline{z}-\overline{w}}{2\overline{z}+\overline{w}} = \frac{2\dfrac{\alpha^2}{z}-\dfrac{4\alpha^2}{w}}{2\dfrac{\alpha^2}{z}+\dfrac{4\alpha^2}{w}} = \frac{2\alpha^2\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{2}{w}\right)}{2\alpha^2\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{w}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{z}-\dfrac{2}{w}}{\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{w}} = \frac{\dfrac{w-2z}{zw}}{\dfrac{w+2z}{zw}} = \frac{w-2z}{w+2z} = -\frac{2z-w}{2z+w} = -v$$

Άρα ο αριθμός $v = \dfrac{2z-w}{2z+w}$ είναι φανταστικός

δ. Είναι $(\Gamma A) = |w - z_1|$ και $(\Gamma B) = |w - z_2|$

Για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_1 από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||w| - |z_1|\big| \le |w + z_1| \le |w| + |z_1| \quad \textbf{(6)}$$

Αν στη σχέση **(6)** θέσουμε, όπου z_1 το $-z_1$ έχουμε:

$$\big||w| - |-z_1|\big| \le |w + (-z_1)| \le |w| + |-z_1| \overset{|z_1|=|-z_1|}{\Leftrightarrow} \big||w| - |z_1|\big| \le |w - z_1| \le |w| + |z_1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2\alpha - \alpha| \le |w - z_1| \le 2\alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha \le (\Gamma A) \le 3\alpha \quad \textbf{(7)}$$

Ομοίως για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_2 έχουμε:

$\alpha \le |w - z_2| \le 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \le (\Gamma B) \le 3\alpha$, οπότε $\dfrac{1}{3\alpha} \le \dfrac{1}{(\Gamma B)} \le \dfrac{1}{\alpha}$ (8)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις **(7)** και **(8)** έχουμε: $\dfrac{\alpha}{3\alpha} \le \dfrac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \le \dfrac{3\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le \dfrac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \le 3$