# ΣΥΛΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

## Θέμα 1ο.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς $z_1=\alpha+if(\alpha)$ και $z_2=\beta+if(\beta)$ να ισχύει $w=\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

**α.** Να αποδείξετε ότι $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$

**β.** Να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

**δ.** Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to\alpha}\int_\alpha^x \dfrac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει λύση στο $(\alpha,\beta)$

## Λύση:

**α.** $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\overline{w}\Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}=\overline{z_1}z_2\Leftrightarrow(\alpha+if(\alpha))(\beta-if(\beta))=(\alpha-if(\alpha))(\beta+if(\beta))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$

Ακόμα:

$|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|\Leftrightarrow|\alpha+if(\alpha)+i(\beta+if(\beta))|=|\alpha+if(\alpha)-i(\beta+if(\beta))|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\alpha+if(\alpha)+i\beta-f(\beta)|=|\alpha+if(\alpha)-i\beta+f(\beta)|\Leftrightarrow$

$|(\alpha-f(\beta))+i(f(\alpha)+\beta)|=|(f(\beta)+\alpha)+i(f(\alpha)-\beta)|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{(\alpha-f(\beta))^2+(f(\alpha)+\beta)^2}=\sqrt{(f(\beta)+\alpha)^2+(f(\alpha)-\beta)^2}\Leftrightarrow$

$(\alpha-f(\beta))^2+(f(\alpha)+\beta)^2=(f(\beta)+\alpha)^2+(f(\alpha)-\beta)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\alpha f(\beta)+2\beta f(\alpha)=2\alpha f(\beta)-2\beta f(\alpha)\Leftrightarrow \alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$

Επομένως $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$ .

**β.** Η $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta$, είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $x\in(\alpha,\beta)$ και $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ ενώ $g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$ .

Όμως $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)\overset{0<\alpha<\beta}{\Leftrightarrow}\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}\Leftrightarrow g(\alpha)=g(\beta)$. Συνεπώς η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος *Rolle* στο $[\alpha,\beta]$ .

**γ.** Έχουμε ότι $g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$ . Από το ερώτημα **β.** θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$, $\xi\in(\alpha,\beta)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο ξ είναι η:

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow y-f(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}(x-\xi)\Leftrightarrow y=\frac{xf(\xi)}{\xi}$$

Επειδή οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, έχουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**δ.** Θέτω $x+\alpha-t=u$ , έχουμε $dt=-du$. Για $t=\alpha\Rightarrow u=x$ ενώ για $t=x\Rightarrow u=\alpha$ .

Επομένως $\int_{\alpha}^{x}\frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=\int_{x}^{\alpha}-\frac{f(u)}{(x-\alpha)u}du=\int_{\alpha}^{x}\frac{f(u)}{(x-\alpha)u}du=\frac{1}{(x-\alpha)}\int_{\alpha}^{x}\frac{f(u)}{u}du$.

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\alpha}\int_{\alpha}^{x}\frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{(x-\alpha)}\int_{\alpha}^{x}\frac{f(u)}{u}du=\lim_{x\to\alpha}\frac{\int_{\alpha}^{x}g(u)du}{(x-\alpha)}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to\alpha}g(x)=g(\alpha)\quad.$$

Συνεπώς $g(\alpha)=1\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)}{\alpha}=1\Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$.

Οπότε $\beta f(\alpha)=\alpha f(\beta)\Leftrightarrow f(\beta)=\beta$.

Θεωρώ $h(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ και $h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=0$, $h(\beta)=f(\beta)-\beta=0$ .

Συνεπώς από θεώρημα *Rolle*, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$h'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-1=0\Leftrightarrow f'(x_0)=1$ . Επομένως η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha,\beta)$.

**Θέμα 2ο.**

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_0^x \frac{4}{1+f^2(t)}dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**α.** Να δείξετε ότι η $f$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

**β.** Να δείξετε ότι η $C_f$ έχει ένα σημείο καμπής του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

**γ.** Να δείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f$, $C_{f^{-1}}$

**δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις $C_f$, $C_{f^{-1}}$

**Λύση:**

**α.** Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $\frac{4}{1+f^2(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Άρα το $\int_0^x \frac{4}{1+f^2(t)}dt$ παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}$,συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{4}{1+f^2(x)}$.

Έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\frac{4}{1+f^2(x)}>0$, οπότε έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)>0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και "$1-1$", οπότε αντιστρέφεται.

Επίσης $f(0)=0$, άρα η $x=0$ μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

Επίσης για $x<0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$.

Ενώ για $x>0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $\frac{4}{1+f^2(t)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=-\frac{8f(x)f'(x)}{\left(1+f^2(x)\right)^2}$.

**β.** $f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{8f(x)f'(x)}{\left(1+f^2(x)\right)^2}=0 \overset{f'(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{8f(x)f'(x)}{\left(1+f^2(x)\right)^2}>0 \overset{f'(x)>0}{\Leftrightarrow} -8f(x)>0 \Leftrightarrow x<0$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει στο σημείο $M(0,f(0))=(0,0)$ σημείο καμπής.

**γ.** $f'(x)=\dfrac{4}{1+f^2(x)} \Leftrightarrow f'(x)+f'(x)f^2(x)=4 \Rightarrow \left(f(x)+\dfrac{1}{3}f^3(x)\right)=(4x)' \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)+\dfrac{1}{3}f^3(x)=4x+c$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)+\dfrac{1}{3}f^3(0)=4\cdot 0+c \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c=0$ . Οπότε $f(x)+\dfrac{1}{3}f^3(x)=4x$.

Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι ισοδύναμες. (Η απόδειξη βρίσκεται στην Σελ. 76 – Τόμος Α' «Εισαγωγή στην Θεωρία Συναρτήσεων – Νικολάου Ε. Καντιδάκη»).

Έτσι:

$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)+\dfrac{1}{3}f^3(x)=x+\dfrac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow 4x=x+\dfrac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow 12x=3x+x^3 \Leftrightarrow x^3-9x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-3)(x+3)=0$

Άρα $x=0$ ή $x=3$ ή $x=-3$. Οπότε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι τα $A(3,3)$ , $O(0,0)$ , $B(-3,-3)$.

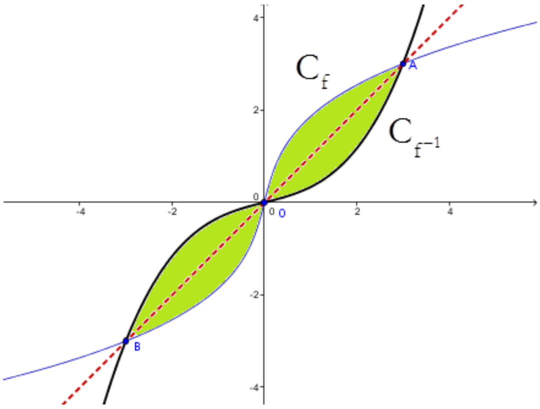
**δ.** Θα δείξουμε, ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε η $f^{-1}$ θα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Θεωρώ $g(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^3}{12}$ , $x\in\mathbb{R}$ , η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε και "$1-1$". Έχουμε ότι η g έχει σύνολο τιμών το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ .

Επίσης επειδή $\dfrac{f(x)}{4}+\dfrac{f^3(x)}{12}=x$ , έχουμε οτι $g(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(x)$ . Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το $\mathbb{R}$.

Έχουμε $\dfrac{f(x)}{4}+\dfrac{f^3(x)}{12}=x \Leftrightarrow \dfrac{f\left(f^{-1}(x)\right)}{4}+\dfrac{f^3\left(f^{-1}(x)\right)}{12}=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^3}{12}$ , $x\in\mathbb{R}$.

Προσδιορίζουμε τη σχετική θέση των $C_f, C_{f^{-1}}$. Επειδή η f κοίλη στο $[0,+\infty)$ ,έχουμε ότι η $C_f$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$ στο $[0,+\infty)$,ενώ η $f^{-1}$ θα βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$ στο $[0,+\infty)$.




Έτσι από τη συμμετρία έχουμε:

$$E = 4\int_0^3 \left|f^{-1}(x) - x\right| dx = 4\int_0^3 \left(x - f^{-1}(x)\right) dx = 4\int_0^3 \left(x - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{12}\right) dx = 4\int_0^3 \left(\frac{3x}{4} - \frac{x^3}{12}\right) dx =$$

$$4\left[\frac{3x^2}{8} - \frac{x^4}{48}\right]_0^3 = 4\left(\frac{3^3}{8} - \frac{3^4}{48}\right) = 4\left(\frac{27}{8} - \frac{27}{16}\right) = \frac{4 \cdot 27}{16} = \frac{27}{4}$$ τετραγωνικές μονάδες.

## Θέμα 3ο.

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $g^2(x)=g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(2)**
- $f(1)=2$
- $g(1)=-1$

**α.** Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g

**β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις $C_f, C_g$ και τις ευθείες με $x=1$ και $x=2$

**γ.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{g(x)}}$

**δ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2e^{x-1}}{f'(x)-1}+\dfrac{2\ln x+3}{g'(x)+1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

*(Θέμα ΕΜΕ 2012)*

## Λύση:

**α.** Η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η σχέση **(1)** ισοδύναμα γράφεται: $\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **(3)**.

Από τη σχέση **(2)** προκύπτει ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$**,** οπότε:

$$g^2(x)=g'(x)\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g^2(x)}=1\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{g(x)}\right)'=(x)'\Leftrightarrow-\frac{1}{g(x)}=x+c_1$$

Για $x=1$ (και αφού $g(1)=-1$) : $-\dfrac{1}{g(1)}=1+c_1\Rightarrow 1=1+c_1\Rightarrow c_1=0$

Άρα: $-\dfrac{1}{g(x)}=x\Leftrightarrow g(x)=-\dfrac{1}{x}$ , $x\in(0,+\infty)$ **(4)**

Η σχέση **(3)** λόγω των σχέσεων **(2)** και **(4)** γράφεται:

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=f'(x)\Rightarrow f'(x)\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}f(x)=f'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=-\frac{1}{x^2}f(x)\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'f(x)\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)'=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=c_2\Rightarrow f(x)=c_2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

Για $x=1$ (και αφού $f(1)=2$) είναι: $f(2)=c_2\left(1+\frac{1}{1}\right)\Leftrightarrow 2=2c_2\Leftrightarrow c_2=1$

Άρα $f(x)=1+\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$.

**β.** Στο διάστημα $[1,2]$ ισχύει: $f(x)-g(x)=1+\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}>0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^2|f(x)-g(x)|dx=\int_1^2(f(x)-g(x))dx=\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=[x+2\ln x]_1^2=1+2\ln 2$ τ.μ.

**γ.** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι: $f(x)=1+\frac{1}{x}$ και $g(x)=-\frac{1}{x}$ οπότε το ζητούμενο όριο λαμβάνει τη μορφή: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ και επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, αρκεί να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

Είναι: $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\overset{0\cdot(+\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=1$$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}=e^1=e$$

**δ.** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ και $g'(x)=\frac{1}{x^2}$ οπότε

$f'(x)-1=-(g'(x)+1)=-\frac{1}{x^2}-1\neq 0$ και η δοθείσα εξίσωση στο διάστημα $[1,e]$ είναι ισοδύναμη με την $2e^{x-1}-2\ln x-3=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2e^{x-1}-2\ln x-3$, $x\in[1,e]$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,e]$, ως άθροισμα συνεχών
- $h(1)=2e^{1-1}-2\ln 1-3=2-3=-1<0$ *και* $h(e)=2e^{e-1}-2\ln e-3=2e^{e-1}-5=2\left(e^{e-1}-\frac{5}{2}\right)>0$ διότι $e>\frac{5}{2}$ *και* $e-1>1$. Οπότε $h(1)\cdot h(e)<0$.

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *Θεωρήματος Bolzano*, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

Για κάθε $x\in(1,e)$ έχουμε:

$h'(x)=\left(2e^{x-1}-2\ln x-3\right)'\Rightarrow h'(x)=2\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)>0$ αφού για $1<x<e$ είναι:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \frac{1}{x}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1}>1 \\ -\frac{1}{x}>-1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x-1}-\frac{1}{x}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$

## Θέμα 4ο.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $2\sigma\upsilon\nu x+\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du-x\eta\mu x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $f(0)=0$ **(2)**
- $f'(0)=\alpha$ **(3)**

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

**β.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$

**γ.** Να βρείτε:

**i.** Την εξίσωση της εφαπτομένης **(ε)** της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$

**ii.** Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης f, από την εφαπτομένη **(ε)** της $C_f$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{2\pi}{3}$ και $x=\frac{4\pi}{3}$

*(Θέμα ΕΜΕ 2012)*

## Λύση:

**α.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $g(u)=\int_0^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\int_0^x g(u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και η συνάρτηση $\int_0^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης οι συναρτήσεις $2\sigma\upsilon\nu x$ και $-x\eta\mu x+2$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης **(1)** έχουμε:

$$(2\sigma\upsilon\nu x)'+\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'=\left(\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right)'-(x\eta\mu x)'+(2)'\Rightarrow$$

$$-2\eta\mu x+xf(x)=\int_0^x f(t)dt-\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow xf(x)=\int_0^x f(t)dt+\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}\ . \ \textbf{(4)}$$

Από τη σχέση **(4)** για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ έχουμε: $f(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt+\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x}$ **(5)**.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, γιατί ο τύπος της f προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Από τη σχέση **(3)** έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Προσδιορισμός του πραγματικού αριθμού α:

Για $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ έχουμε:

$$\alpha = f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \quad \textbf{(6)}$$

Είναι: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) + x\eta\mu x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2x} + \lim_{x \to 0} \frac{x\eta\mu x}{2x} =$

$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \to 0} \eta\mu x\right) = \frac{1}{2}\alpha$, οπότε, λόγω της σχέσης **(6)** είναι: $\alpha = \frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ .

**β)** Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης **(4)** έχουμε:

$(xf(x))' = \left(\int_0^x f(t)dt\right)' + (\eta\mu x)' - (x\sigma\upsilon\nu x)' \Rightarrow f(x) + xf'(x) = f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x \Rightarrow$

$\Rightarrow xf'(x) = x\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(x) = \eta\mu x = (-\sigma\upsilon\nu x)'$ οπότε:

$f(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x + c_1, & x < 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + c_2, & x > 0 \end{cases}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ , οπότε έχουμε: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow$

$\lim_{x \to 0^-}(-\sigma\upsilon\nu x + c_1) = \lim_{x \to 0^+}(-\sigma\upsilon\nu x + c_2) = 0 \Rightarrow -\sigma\upsilon\nu 0 + c_1 = -\sigma\upsilon\nu 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$

Επομένως: $f(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + 1, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

**γ. i.** Είναι:

- $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$
- $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης **(ε)** της $C_f$ στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$ είναι:

$\varepsilon: y - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

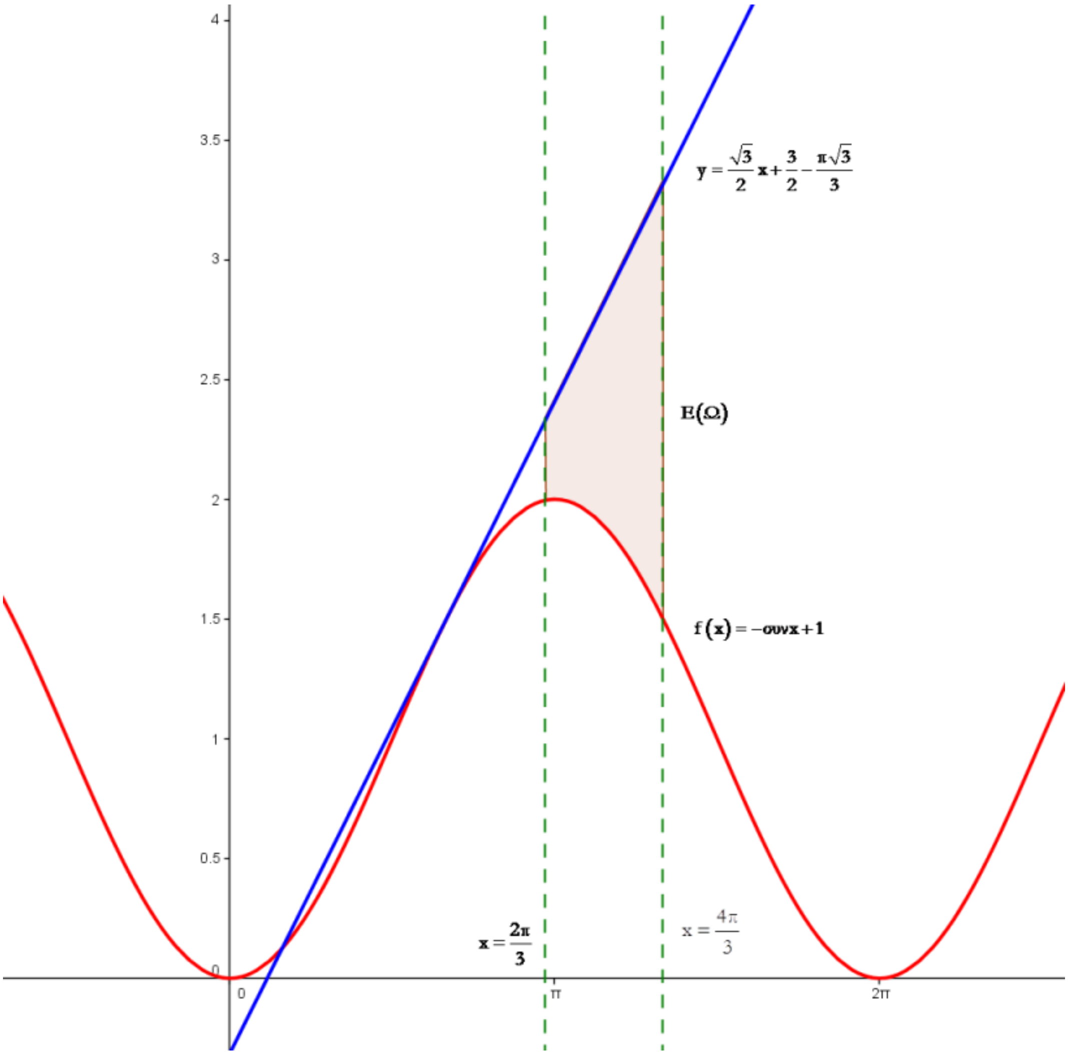
**ii.** Στο διάστημα $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f'(x)=\eta\mu x$ και $f''(x)=\sigma\upsilon\nu x<0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εφαπτομένη **(ε)** της $C_f$ στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$, βρίσκεται πάνω από την $C_f$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης f, από την εφαπτομένη **(ε)** της $C_f$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{2\pi}{3}$ και $x=\frac{4\pi}{3}$ είναι:

$$E=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left|\varepsilon(x)-f(x)\right|dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(\varepsilon(x)-f(x)\right)dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-1+\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$\left[\eta\mu x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}x-x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=\eta\mu\frac{4\pi}{3}-\eta\mu\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{16\pi^2}{9}-\frac{4\pi^2}{9}\right)+\frac{3-2\sqrt{3}\pi}{6}\cdot\frac{2\pi}{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi^2}{9}+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\ \tau.\mu$$



**Θέμα 5ο.**

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f[1,2] \to \mathbb{R}$ για την οποία δίνονται $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ και $f(1)=0$, $f(2)=2$, $f'(2)=1$.

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**β.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) < -1$.

**δ.** Να αποδείξετε ότι :

**i.** $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > \dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$ για κάθε $x \in (1,2)$.

**ii.** $f(x) \geq 2(x-1)$ για κάθε $x \in (1,2)$.

**iii.** $\int_1^2 f(x)dx \geq 1$.

**ε.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $ex + y = 2$ τέμνει ακριβώς σε ένα μόνο σημείο την γραφική παράσταση της f.

**στ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \epsilon (1,2)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = f'(\xi_1) + 2$.

*(Θέμα 128 Συλλογής)*

**Λύση:**

**α.** Έχουμε $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ και συνεπώς η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ αφού επιπλέον είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη. Η $f'$ στο $[1,2]$ παρουσιάζει ως συνεχής ελάχιστη

τιμή στο $x_0 = 2$ και άρα $f'(x) \geq f'(2) = 1 > 0$. Η f λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ με σύνολο τιμών $f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [0,2]$.

**β.** Η εφαπτομένη της $C_f$ στο $(2, f(2)) = (2,2)$ έχει εξίσωση $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y = x$

**γ.** Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[1,2]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = 2$. Από Θ.Μ.Τ για την $f'$ στο $[\xi, 2]$ έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\xi, 2) \subset (1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_o) = \dfrac{f'(2)-f'(\xi)}{2-\xi} = \dfrac{-1}{2-\xi} < -1$.

**δ1.** Από Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[1,x]$ και $[x,2]$ παίρνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1,x)$ και $\xi_2 \in (x,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$. Τότε για $\xi_1 < \xi_2$ παίρνουμε $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > \dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$ αφού η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

**δ2.** Η σχέση $f(x)\ge 2(x-1)$ ισχύει ως ισότητα για $x=1$ και $x=2$. Για $x\in(1,2)$ από το **δ1.** έχουμε $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}>\frac{f(2)-f(x)}{2-x}\Rightarrow f(x)>2(x-1)$.

**δ3.** Από το **δ2.** έχουμε $f(x)\ge 2(x-1)\Rightarrow f(x)-2(x-1)\ge 0$.

Επιπλέον η $f(x)-2(x-1)$ συνεχής και συνεπώς :

$$\int_1^2\big(f(x)-2(x-1)\big)dx\ge 0\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx\ge\int_1^2 2(x-1)dx=1$$

**ε.** Έστω η συνάρτηση $h(x)=2-x$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-h(x)=f(x)-2+x, x\in[1,2]$. Η $\varphi(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ αφού η fσυνεχής και επιπλέον $\varphi(1)=-1<0$ και $\varphi(2)=2>0$. Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)-h(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)=h(x_1)$.

Επιπλέον η $\varphi(x)$ γνησίως αύξουσα αφού $\varphi'(x)=f'(x)+1>0$.

**στ.** Από Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[1,x_1]$ και $[x_1,2]$ έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(1,x_1)$ και $\xi_2\in(x_1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}=\frac{2-x_1}{x_1-1}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x_1)}{2-x_1}=\frac{x_1}{2-x_1}$. Τότε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{2-x_1}{x_1-1}\frac{x_1}{2-x_1}=\frac{x_1}{x_1-1}$ και $f'(\xi_1)+2=\frac{2-x_1}{x_1-1}+2=\frac{x_1}{x_1-1}$.

**Θέμα 6ο.**

Έστω η συνάρτηση f ,συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Αν $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνάρτηση με $g(x)\int_0^1 f(xt)dt$, $t,x \in \mathbb{R}$ και ο μιγαδικός $z:|z-2+i| = |z+2-i|$ (1), τότε:

**α.** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού, ανήκουν στην ευθεία (ε) $y = 2x$.

**β.** Αν η ευθεία ε, είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right) - 5x^2 ημ\left(\frac{1}{x}\right) + κ}{f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} + 2} = 10$.

**γ.** Να αποδείξετε ότι: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)du & αν\ x \neq 0 \\ f(0) & αν\ x = 0 \end{cases}$.

**δ.** Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

**ε.** Αν ο μιγαδικός $z = \int_1^2 f(t)dt + i\int_0^2 f(t)dt$ ικανοποιεί την σχέση (1) να δειχθεί ότι υπάρχει $ξ \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(ξ) = g(ξ)$.

*(Θέμα 126 Συλλογής)*

**Λύση:**

**α.** Έστω $z = x + yi$, $x,y \in \mathbb{R}$.

έχουμε

$$|z-2+i| = |z+2-i| \Leftrightarrow |x+yi-2+i| = |x+yi+2-i| \Leftrightarrow |(x-2)+(y+1)i| = |(x+2)+(y-1)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1 = x^2+4x+4+y^2-2y+1 \Leftrightarrow 4y = 8x \Leftrightarrow y = 2x$$

Συνεπώς οι εικόνες του μιγαδικού, ανήκουν στην ευθεία (ε) $y = 2x$.

**β.** Επειδή η ευθεία (ε) $y = 2x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$.

Αρχικά έχουμε $\left|\dfrac{5ημu}{u^2}\right| \leq \dfrac{1}{u^2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{u^2} \leq \dfrac{5ημu}{u^2} \leq \dfrac{1}{u^2}$ και $\lim\limits_{u \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{u^2}\right) = \lim\limits_{u \to +\infty}\left(\dfrac{1}{u^2}\right) = 0$.

Άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{u \to +\infty}\left(\dfrac{5ημu}{u^2}\right) = 0$.

Οπότε $10=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right)-5x^2\eta\mu\frac{1}{x}+\varkappa}{f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}+2}\overset{\substack{\frac{1}{x}=u\\ x\to 0^+\\ u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\frac{f(u)}{u}-\frac{5\eta\mu u}{u^2}+\varkappa}{f(u)-2u+2}=\dfrac{2-0+\varkappa}{0+2}=\dfrac{\varkappa+2}{2}$.

Άρα $\dfrac{\varkappa+2}{2}=10\Leftrightarrow \varkappa=18$.

**γ.** Έχουμε $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, οπότε για $x=0$ έχουμε:

$$g(0)=\int_0^1 f(0)dt=f(0)\int_0^1 1\cdot dt=f(0)[t]_0^1=f(0)(1-0)=f(0)$$

Για $x\neq 0$ θέτουμε $xt=u$, οπότε $dt=\dfrac{du}{x}$.

Για $t=0$ έχουμε $u=0$, ενώ για $t=1$ έχουμε $u=x$.

Συνεπώς για $x\neq 0$ έχουμε $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^x \dfrac{f(u)du}{x}=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$.

Τελικά, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du & \text{αν } x\neq 0\\ f(0) & \text{αν } x=0\end{cases}$.

**δ.** Έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\int_0^x f(u)du$ παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}$. Η $\dfrac{1}{x}$ παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, άρα η g παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du-xf(0)}{x^2}\underset{D.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{2x}=\dfrac{f'(0)}{2}$.

Επομένως η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du+\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{f'(0)}{2}, & x=0\end{cases}$.

**ε.** Έχουμε :

$$z=\int_1^2 f(t)dt+i\int_0^2 f(t)dt\overset{z=\alpha+2\alpha i}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\int_1^2 f(t)dt=\alpha\\ \int_0^2 f(t)dt=2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_1^2 f(t)dt=\alpha\\ \int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt=2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_1^2 f(t)dt=\alpha\\ \int_0^1 f(t)dt=\alpha\end{cases}.$$

Η g συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, από *Θεώρημα Μέσης Τιμής* έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi)=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}=g(2)-g(1)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt=\alpha-\alpha=0 .$$

Δηλαδή

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2}\int_0^\xi f(u)du+\frac{f(\xi)}{\xi}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{\xi}\int_0^\xi f(u)du+f(\xi)=0\Leftrightarrow \frac{1}{\xi}\int_0^\xi f(u)du=f(\xi)\Leftrightarrow g(\xi)=f(\xi)$$

.

### Θέμα 7ο.

**Α.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{x+1}+1$, $x\in\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+i$ και $w=e^{x+1}-i$.

**α.** Να μελετηθεί η $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

**β.** Να βρεθεί ο $x\in\mathbb{R}$ ώστε το γινόμενο των μιγαδικών z και w να είναι φανταστικός.

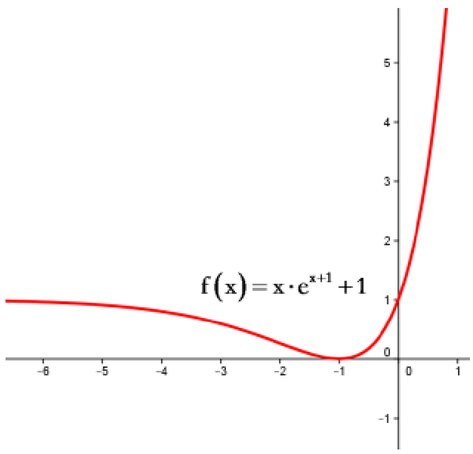
**Β.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2-2}{x^2+1}$. Αν η $C_f$ έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon: y=(2-\alpha)x+4-\beta$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

### Λύση:

**Α.α.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}=(x+1)\cdot e^{x+1}$.

| x | $-\infty$ | | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | Ο.Ε | $\nearrow$ | |

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=-1$ το $f(-1)=0$. Το τοπικό ελάχιστο είναι και ολικό αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{x+1}+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{\dfrac{1}{e^{x+1}}}\right)+1\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DHL}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-\dfrac{1}{e^{x+1}}}\right)+1=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{x+1}+1\right)=+\infty$.




**β.** $z\cdot w=(x+i)\left(e^{x+1}-i\right)=x\cdot e^{x+1}-x\cdot i+i\cdot e^{x+1}-i^2=x\cdot e^{x+1}-x\cdot i+i\cdot e^{x+1}+1=$

$= x\cdot e^{x+1}+1+i\left(e^{x+1}-x\right)$ άρα πρέπει $x\cdot e^{x+1}+1=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

**B.** Αν η $C_f$ έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon: y=(2-\alpha)x+4-\beta$ έχουμε:

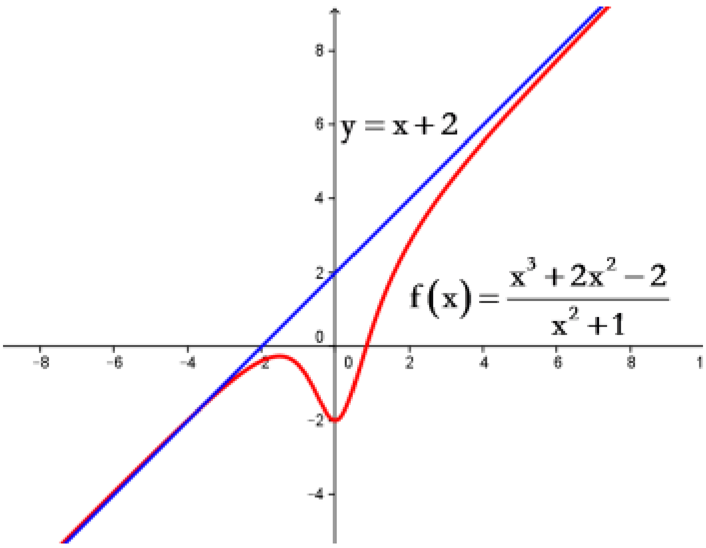
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2-\alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-\alpha)\cdot x\right]=4-\beta$. Επειδή

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2-2}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^3}{x^3}=\alpha$ πρέπει $\alpha=2-\alpha \Leftrightarrow \alpha=1$ και

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-\alpha)\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+\beta x^2-2}{x^2+1}-x\right)=$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+\beta x^2-2}{x^2+1}-\dfrac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\beta x^2-x-2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta x^2}{x^2}=\beta$

πρέπει $\beta=4-\beta \Leftrightarrow \beta=2$



## Θέμα 8ο.

Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

- $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}$, $0\le x\le 2$
- $f'(0)=2f(0)$,
- $f'(2)=2f(2)+12e^4$,
- $f(1)=e^2$ όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$, $0\le x\le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

**β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$

**γ.** Να αποδείξετε ότι $k=6$ και ότι ισχύει $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

**δ.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x}$, $0\le x\le 2$

**ε.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2\dfrac{f(x)}{x^2}dx$

*(Επαναληπτικές 2009)*

## Λύση:

**α.** Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$.

Επιπλέον $g(0)=-(f'(0)-2f(0))=0$ και

$$g(2)=12-\frac{f'(2)-2f(2)}{e^4}=12-\frac{2f(2)+12e^4-2f(2)}{e^4}=0.$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του *θεωρήματος του Rolle* για την $g$ στο διάστημα $[0,2]$.

**β.** Εφαρμόζουμε το *θεώρημα του Rolle*. Υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$.

Όμως

$$g'(x)=6x-\frac{(f''(x)-2f'(x))e^{2x}-2e^{2x}(f'(x)-2f(x))}{e^{4x}}=$$

$$=6x-\frac{(f''(x)-2f'(x))-2(f'(x)-2f(x))}{e^{2x}}=6x-\frac{f''(x)-4f'(x)+4f(x)}{e^{2x}}$$

Συνεπώς $g'(\xi)=0\Leftrightarrow 6\xi-\dfrac{f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)}{e^{2\xi}}=0\Leftrightarrow f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$ **(1)**

**γ.** Αφού $\xi \in (0,2)$, από υπόθεση έχουμε $f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi) = \kappa \xi e^{2\xi}$ **(2)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει $\kappa = 6$, επομένως $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 6xe^{2x}$, οπότε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$ και επειδή $g(0) = 0$,

θα είναι $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,2]$.

**δ.** Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = 3x^2 e^{2x} \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 3x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(e^{-2x} f(x)\right)' = \left(x^3\right)' \Leftrightarrow e^{-2x} f(x) = x^3 + c$

Για $x = 1$ βρίσκουμε $c = 0$, άρα $f(x) = x^3 e^{2x}$.

**ε.** Έχουμε

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{x^3 e^{2x}}{x^2} dx = \int_1^2 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x \left(e^{2x}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ x e^{2x} \right]_1^2 - \frac{1}{4} \left[ e^{2x} \right]_1^2 = \frac{1}{4} \left(3e^4 - e^2\right)$$

**Θέμα 9ο.**

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + (x-1)i$, $x \in \mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι: $\text{Re}(z) > \text{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός $w = z^2 + z + 2i$ να είναι πραγματικός.

**γ)** Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

*(ΟΕΦΕ 2005)*

**Λύση:**

**α.** $\text{Re}(z) > \text{Im}(z) \Leftrightarrow e^x > x-1 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$

Έστω $f(x) = e^x - x + 1$. Τότε $f'(x) = e^x - 1$.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | Ο.Ε | $\nearrow$ |

Η f για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = e^0 - 0 + 1 = 2$. Άρα $f(x) \geq f(0) = 2 > 0$ δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**β.** $w = \left[e^x + (x-1)i\right]^2 + e^x + (x-1)i + 2i =$

$= e^{2x} + 2i(x-1)\cdot e^x - (x-1)^2 + e^x + (x-1)i + 2i =$

$= e^{2x} + e^x - (x-1)^2 + i\left[2(x-1)e^x + x + 1\right]$

Έστω $g(x) = 2(x-1)e^x + x + 1$ , $x \in [0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ με:

$g(0) = 2(0-1)e^0 + 0 + 1 = -1 < 0$

$g(1) = 2(1-1)e^1 + 1 + 1 = 2 > 0$

Άρα $g(0)g(1) < 0$. Σύμφωνα με το *θεώρημα Bolzano* υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε ο w να είναι πραγματικός.

**γ.** $|z| = \sqrt{e^{2x} + (x-1)^2}$ το οποίο γίνεται ελάχιστο όταν η συνάρτηση $h(x) = e^{2x} + (x-1)^2$ έχει ελάχιστο διότι η συνάρτηση $F(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

$h'(x)=2e^{2x}+2(x-1)$. Προφανής λύση είναι η $x=0$ διότι $h'(0)=2e^{0}+2(0-1)=2-2=0$. Είναι $h''(x)=4e^{2x}+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ . Άρα η $h'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | $\nearrow$ $-$ | $0$ | $+$ $\nearrow$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | Ο.Ε | $\nearrow$ |

Για κάθε $x<0$ ισχύει $h'(x)<h'(0)=0$ και για κάθε $x>0$ ισχύει $h'(x)>h'(0)=0$. Επομένως η $h(x)$ έχει ελάχιστο στο $x_0=0$.

Συνεπώς ο μιγαδικός $z=e^{0}+(0-1)i=1-i$ έχει το μικρότερο μέτρο.

**Θέμα 10ο.**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x)\neq x$,

$f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$

**α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}$, $x\in\mathbb{R}$

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x), x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

**γ.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$

**δ.** Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$.

*(Πανελλαδικές 2010)*

**Λύση:**

**α.** Έχουμε $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$, $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\frac{t}{f(t)-t}$, $t\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων οπότε η $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη.

Έτσι, η συνάρτηση $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=1+0+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

**β.** Η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x)=\left((f(x))^2\right)'-(2xf(x))'=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=$$

$$=2f'(x)(f(x)-x)-2f(x)=0$$

Για το τελευταίο = χρησιμοποιήσαμε την ισότητα του **α.**

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι σταθερή.

Ακόμα είναι $g(0)=(f(0))^2-2\cdot 0\cdot f(0)=3^2=9$ και έτσι $g(x)=9$, $x\in\mathbb{R}$.

**γ.** Από το **β.** έχουμε: $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)=9$, $x\in\mathbb{R}$. Άρα

$\left(f(x)\right)^2 - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow \left(\left(f(x)\right) - x\right)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|f(x) - x\right| = \sqrt{x^2 + 9}$ , $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(x) - x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) - x$ είναι συνεχής οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και εφόσον $f(0) - 0 = 3 > 0$ θα είναι $f(x) - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

**δ. 1ος τρόπος :** Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(u) = \int_0^u f(t)dt$, $u \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$F'(u) = f(u)$ και $F''(u) = f'(u) = 1 + \dfrac{u}{\sqrt{u^2+9}} = \dfrac{\sqrt{u^2+9} + u}{\sqrt{u^2+9}} > 0$ , $u \in \mathbb{R}$ **(1)**

Έτσι η $F'$ είναι γνησίως αύξουσα.

Από *Θεώρημα Μέσης Τιμής* υπάρχει $x_1 \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε:

$$.F'(x_1) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1-x} = F(x+1) - F(x),\ x \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(2)}$$

Ακόμα από *Θεώρημα Μέσης Τιμής* υπάρχει $x_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(x_2) = \frac{F(x+2) - F(x+1)}{x+2-x-1} = F(x+2) - F(x+1),\ x \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(3)}$$

Από **(2),(3)** και με τη βοήθεια της μονοτονίας της $F'$ είναι:

$x_1 < x_2 \Rightarrow F'(x_1) < F'(x_2) \Rightarrow F(x+1) - F(x) < F(x+2) - F(x+1)$

Άρα $\int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^{x} f(t)dt < \int_0^{x+2} f(t)dt - \int_0^{x+1} f(t)dt \Leftrightarrow$

$\int_0^{x+1} f(t)dt + \int_x^{0} f(t)dt < \int_0^{x+2} f(t)dt + \int_{x+1}^{0} f(t)dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

**(1)** Αιτιολόγηση: $\sqrt{u^2+9} > \sqrt{u^2} = |u| > -u$ .

**2ος τρόπος :** $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9}} > 0$, $x \in \mathbb{R}$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(u) = \int_u^{u+1} f(t)dt = \int_0^{u+1} f(t)dt - \int_0^{u} f(t)dt$, $u \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $F'(u) = f(u+1) - f(u) > 0$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε: $F(x) < F(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή

$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

**3ος τρόπος :** $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

$f(t) < f(t+1)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άρα $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_x^{x+1} f(t+1)dt$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Όμως

$\int_x^{x+1} f(t+1)dt \overset{t+1=u}{=} \int_{x+1}^{x+2} f(u)du = \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$. Έτσι, $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

**Θέμα 11ο.**

Δίνεται η $f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\int_1^{|z|} f(x)dx = 0$ και $f(1)=1$.

**α.** Να δειχτεί ότι $f(x)>0$

**β.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των $z$.

**γ.** Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(|z+\bar{z}|-3\right)x^3+x}{\left(|z-\bar{z}|-3\right)x^2+x}$

**δ.** Αν το εμβαδόν της $f$ με $x'x$ από τη $x=0$ μέχρι τη $x=1$ είναι μικρότερο του $|z+2\bar{z}|$, να δειχτεί ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt = 3x^2+6x-6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

*(Θέμα 35 Συλλογής)*

**Λύση:**

**α.** Η $f$ και διάφορη του μηδενός για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αφού $f(1)=1>0$, έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**β.** Η σχέση $\int_1^{|z|} f(x)dx = 0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε $|z|=1$. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

**γ.** Για $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχουμε $|z+\bar{z}|=2|\alpha|$ και $|z-\bar{z}|=2|\beta|$. Οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(|z+\bar{z}|-3\right)x^3+x}{\left(|z-\bar{z}|-3\right)x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2|\alpha|-3\right)x^3+x}{\left(2|\beta|-3\right)x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2|\alpha|-3\right)x^3}{\left(2|\beta|-3\right)x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2|\alpha|-3}{2|\beta|-3}x\right)=-\infty$$

διότι Η εικόνα του z κινείται στον μοναδιαίο κύκλο και συνεπώς $|\alpha|\le 1<\frac{3}{2}$, άρα $2|\alpha|-3<0$. Ομοίως $2|\beta|-3<0$.

**δ.** Το εμβαδόν που περικλείεται από τη $C_f$, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι $\int_0^1 f(x)dx$ αφού λόγω του **(α)** έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $\int_0^1 f(x)dx<|z+2\bar{z}|\le|z|+2|\bar{z}|=|z|+2|z|=3|z|=3$. Άρα $\int_0^1 f(x)dx-3<0$ **(1)**.

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt-3x^2-6x+6$ με $x\in[0,1]$. Η $h(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις των συνεχών $\int_0^x f(t)dt$ (η $f(x)$ συνεχής και άρα η $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη) και $-3x^2-6x+6$ (συνεχής ως πολυωνυμική)..

Επιπλέον $h(0)=6>0$ και $h(1)=\int_0^1 f(x)dx-3<0$ από τη σχέση **(1)**. Από *Θεώρημα Bolzano*, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} f(t)dt-3t^2-6t+6=0$ .

**Θέμα 12ο.**

**α.** Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1, z_2$ για τους οποίους ισχύει $|z_1+\overline{z_2}| \le |\overline{z_1}-z_2|$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $w = z_1 \cdot z_2$.

**β.** Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 1 + i\alpha^{f(x)}$ και $z_2 = (1+f(x)) + i$ που ικανοποιούν τη σχέση του ερωτήματος **(α)** και $f$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f'(0) \neq 0$. Να δειχθεί ότι $2 < \alpha < 3$

**γ.** Αν για τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \text{Im}(z_1 \cdot z_2)$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[\gamma, \delta]$ να δείξετε ότι

$$\frac{e^{f(\gamma)}}{e^{f(\delta)}} = \frac{1+f(\delta)}{1+f(\gamma)},\ \ f(\gamma) \neq -1$$

*(Θέμα 37 Συλλογής)*

**Λύση:**

**α.** $|z_1+\overline{z_2}| \le |\overline{z_1}-z_2| \Leftrightarrow |z_1+\overline{z_2}|^2 \le |\overline{z_1}-z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1+\overline{z_2})\left(\overline{z_1+\overline{z_2}}\right) \le (\overline{z_1}-z_2)\left(\overline{\overline{z_1}-z_2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1+\overline{z_2})(\overline{z_1}+z_2) \le (\overline{z_1}-z_2)(z_1-\overline{z_2}) \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}+z_1z_2+\overline{z_2}\,\overline{z_1}+\overline{z_2}z_2 \le \overline{z_1}z_1-\overline{z_1}\,\overline{z_2}-z_2z_1+z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z_1z_2+2\overline{z_1}\,\overline{z_2} \le 0 \Leftrightarrow 2(z_1z_2+\overline{z_1}\,\overline{z_2}) \le 0 \Leftrightarrow 4\text{Re}(z_1z_2) \le 0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z_1z_2$ είναι το ημιεπίπεδο για τα $x \le 0$ .

**β.** Αφού οι $z_1 = 1+i\alpha^{f(x)}$ και $z_2 = 1+f(x)+i$ ικανοποιούν τη σχέση του ερωτήματος **α.** θα ισχύει για αυτούς $\text{Re}(z_1z_2) \le 0$ .

Όμως $z_1z_2 = \left(1+i\alpha^{f(x)}\right)\left(1+f(x)+i\right) = 1+f(x)+i+i\alpha^{f(x)}+i\alpha^{f(x)}f(x)-\alpha^{f(x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1z_2 = \left(1+f(x)-\alpha^{f(x)}\right)+\left(1+\alpha^{f(x)}+\alpha^{f(x)}f(x)\right)i$ .

Οπότε $\text{Re}(z_1z_2) \le 0 \Leftrightarrow 1+f(x)-\alpha^{f(x)} \le 0$ .

Θεωρώ $h(x) = 1+f(x)-\alpha^{f(x)}$ με $x \in \mathbb{R}$ . Τότε έχουμε $h(x) \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le h(0)$. Δηλαδή η $h(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$. Επιπλέον η $h(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$h'(x) = f'(x) - \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x) \Leftrightarrow h'(x) = f'(x)\left(1-\alpha^{f(x)}\ln\alpha\right)$, άρα παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$. Από *Θεώρημα Fermat* λοιπόν θα ισχύει : $h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0)\left(1-\alpha^{f(0)}\ln\alpha\right) = 0$.

Όμως $f'(0) \neq 0$, οπότε $1-\alpha^{f(0)}\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow 1-\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = e$. Συνεπώς ισχύει $2 < \alpha < 3$ .

**γ.** Για την $g(x)$ έχουμε: $g(x) = \text{Im}(z_1z_2) \Leftrightarrow g(x) = 1+e^{f(x)}+e^{f(x)}f(x)$. Η $g(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *θεωρήματος Rolle* στο $\left[\gamma,\delta\right]$ και συνεπώς η $g\left(x\right)$ συνεχής στο $\left[\gamma,\delta\right]$, παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα $\left(\gamma,\delta\right)$ και $g\left(\gamma\right)=g\left(\delta\right)$ .

Οπότε $g\left(\gamma\right)=g\left(\delta\right)\Leftrightarrow 1+e^{f(\gamma)}+e^{f(\gamma)}f\left(\gamma\right)=1+e^{f(\delta)}+e^{f(\delta)}f\left(\delta\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(\gamma)}\left(1+f\left(\gamma\right)\right)=e^{f(\delta)}\left(1+f\left(\delta\right)\right)\Leftrightarrow \dfrac{e^{f(\gamma)}}{e^{f(\delta)}}=\dfrac{1+f\left(\delta\right)}{1+f\left(\gamma\right)}$ με $f\left(\gamma\right)\neq -1$.

## Θέμα 13ο.

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2 - \overline{z_1}}{2 + \overline{z_1}}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

**α.** Να αποδείξετε ότι $z_2 - z_1 = 1$

**β.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z_1$, στο μιγαδικό επίπεδο.

**γ.** Αν ο αριθμός $z_1^2$ είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογιστεί ο $z_1$ και να δειχθεί ότι $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z_1} + 1 - i)^{20} = 0$

*(Επαναληπτικές 2007)*

## Λύση:

**α.** Έχουμε $z_2 = \dfrac{2 - (\alpha - \beta i)}{2 + \alpha - \beta i} = \dfrac{(2 - \alpha + \beta i)(2 + \alpha + \beta i)}{(2+\alpha)^2 + \beta^2} = \dfrac{4 - \alpha^2 - \beta^2 + 4\beta i}{(2+\alpha)^2 + \beta^2}$

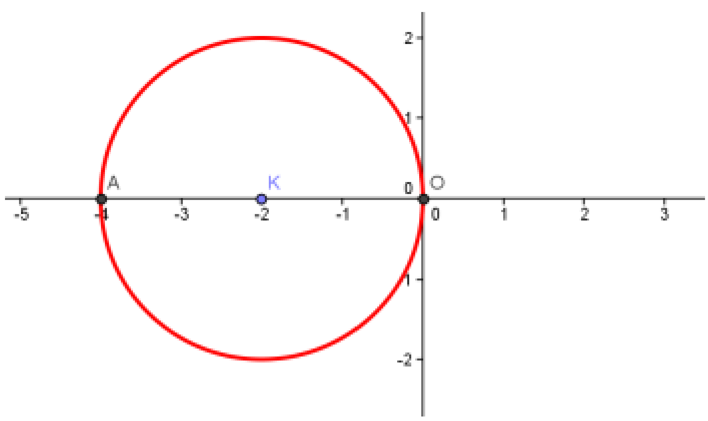
Επομένως $z_2 - z_1 = \left( \dfrac{4 - \alpha^2 - \beta^2}{(2+\alpha)^2 + \beta^2} - \alpha \right) + \left( \dfrac{4\beta}{(2+\alpha)^2 + \beta^2} - \beta \right) i$ **(1)**

Επειδή $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$, θα ισχύει $\dfrac{4\beta}{(2+\alpha)^2 + \beta^2} = \beta \Leftrightarrow (2+\alpha)^2 + \beta^2 = 4$ **(2)** και μετά τις πράξεις $\alpha^2 + \beta^2 = -4\alpha$ **(3)**

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει $z_2 - z_1 = \dfrac{4 - \alpha^2 - \beta^2 - 4\alpha}{4} = 1$, λόγω της **(3)**.

**β.** Από την σχέση **(2)** έχουμε ότι ο $z_1 = \alpha + \beta i$ ικανοποιεί τη συνθήκη $(2+\alpha)^2 + \beta^2 = 4$ οπότε προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $z_1$ είναι κύκλος με κέντρο $K(-2,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Αν $\beta = 0$, τότε από την **(2)** προκύπτει $\alpha = 0$ ή $\alpha = 4$. Επειδή δίνεται ότι $\beta \neq 0$, εξαιρούνται από τον παραπάνω γεωμετρικό τόπο τα σημεία $A(-4,0)$ και $O(0,0)$.



**γ.** Είναι $z_1^2=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i$. Επειδή ο $z_1^2$ είναι φανταστικός, θα είναι $\alpha^2-\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$. Όμως $\alpha\beta>0$, άρα $\alpha=\beta$.

Επομένως $z_1=\alpha+\alpha i$.

Έστω $w=z_1+1+i=\alpha+\alpha i+1+i=(\alpha+1)(1+i)$, οπότε $\overline{w}=\overline{z_1}+1-i=\alpha-\alpha i+1-i=(\alpha+1)(1-i)$.

Επειδή $w^2=(\alpha+1)^2(1+i)^2=2i(\alpha+1)^2$ *και* $\overline{w}^2=(\alpha+1)^2(1-i)^2=-2i(\alpha+1)^2$,

Θα έχουμε $w^{20}-\overline{w}^{20}=(2i)^{10}(\alpha+1)^{20}-(-2i)^{10}(\alpha+1)^{20}=-2^{10}(\alpha+1)^{20}+2^{10}(\alpha+1)^{20}=0$

**Θέμα 14ο.**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει: $2f'(x)-f^2(x)ημx=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=\frac{1}{2}$

**α.** Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι ο $f(x)=\dfrac{2}{3+συνx}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**β.** Να δείξετε ότι $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**γ.** Έστω g μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g'(x)=f(x)\cdot e^{-g(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

**i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=e^{g(x)}$ είναι κοίλη στο $(\pi,2\pi)$ .

**ii.** Να δείξετε ότι: $1\leq e^{g(x+1)}-e^{g(x-1)}\leq 2$ , για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**iii.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{g(x)}-2x+2012=0$, έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

**Λύση:**

**α.** $2f'(x)-f^2(x)\cdot ημx=0\Leftrightarrow 2f'(x)=f^2(x)\cdot ημx \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{ημx}{2}$, άρα $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\left(\dfrac{συνx}{2}\right)'$.

Επομένως $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{συνx}{2}+c$. Για $x=0$ έχουμε $2=\dfrac{1}{2}+c\Rightarrow c=\dfrac{3}{2}$ άρα $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{συνx+3}{2}$ οπότε

$f(x)=\dfrac{2}{συνx+3}$, $x\in\mathbb{R}$.

**β.** $\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\leq\dfrac{2}{συνx+3}\leq 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{συνx+3}\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\geq συνx+3\geq 2\Leftrightarrow 2\leq συνx+3\leq 4\Leftrightarrow -1\leq συνx\leq 1$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**γ.i.** Είναι : $h'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)=e^{g(x)}\cdot f(x)\cdot e^{-g(x)}=f(x)$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h''(x)=f'(x)=\dfrac{2ημx}{(1+συνx)^2}<0$ για κάθε $x\in(\pi,2\pi)$. άρα $h(x)$ κοίλη στο $(\pi,2\pi)$.

**γ.ii.** Ισχύουν για την $h(x)$ οι υποθέσεις του *Θ.Μ.Τ.* στο διάστημα $[x-1, x+1]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x-1, x+1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = \dfrac{h(x+1)-h(x-1)}{(x+1)-(x-1)} \Rightarrow f(\xi) = \dfrac{e^{g(x+1)} - e^{g(x-1)}}{2}$.

Όμως $\dfrac{1}{2} \le f(\xi) \le 1$ άρα $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{e^{g(x+1)} - e^{g(x-1)}}{2} \le 1$ οπότε $1 \le e^{g(x+1)} - e^{g(x-1)} \le 2$

**iii.** Έστω $\varphi(x) = e^{g(x)} - 2x + 2012$, $x \in \mathbb{R}$, Παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) - 2 = f(x) - 2 < 0$ οπότε η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η $\varphi(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

**Θέμα 15ο.**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $F(x)=\int_0^1 e^{tx^2}dt$. Να βρεθούν:

**α.** ο τύπος της συνάρτησης.

**β.** η τιμή $F(0)$ και να ελεγχθεί η συνέχεια το σημείο $x_0=0$.

**γ.** η τιμή $F'(0)$.

**δ.** η μονοτονία και η καμπυλότητα της συνάρτησης F.

**ε.** ισχύει ότι $1\le F(x)\le e^{x^2}$ , $x\ne 0$.

**στ.** τα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{\eta\mu x}$ , $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{F(x)}{x}$.

**Λύση:**

**α.** Αν $u=tx^2$ τότε $du=x^2dt$ και $t=0\to u=0$, $t=1\to u=x^2$ οπότε με $x\ne 0$ ή

$$F(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^1 e^{tx^2}x^2dt=\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}e^u du=\frac{1}{x^2}\left[e^u\right]_0^{x^2}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}.$$

**β.** Είναι $F(0)=\int_0^1 e^0dt=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\underset{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=x^2}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=e^0=1=F(0)$ άρα είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

**γ.** Αν θεωρήσουμε την $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$ , $x\ne 0$ και $g(0)=1$ τότε η $F(x)=g(x^2)$ , $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x^2)-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}2xg'(x^2)$ και επειδή είναι $g'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$ , $x\ne 0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}e^x=\frac{1}{2}$ θα είναι και $\lim\limits_{x^2\to 0}g'(x^2)=\frac{1}{2}$ άρα θα έχουμε και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2xg'(x^2)=2\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0$ άρα παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ με $F'(0)=0$ .

**δ.** Είναι $F(x)=g(x^2)$, $x\ne 0$ άρα παραγωγίσιμη με $F'(x)=2xg'(x^2)$, $x\ne 0$ και για την $g'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$ , $x\ne 0$ έχουμε ότι αν $h(x)=xe^x-e^x+1$, $x\ge 0$ επειδή $h'(x)=xe^x>0$, $x>0$ άρα η h είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ επομένως για $x>0$ ισχύει ότι $h(x)>h(0)=0$ επομένως

$g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}>0$ , $x>0$, άρα και $g'(x^2)>0$, $x\neq 0$ επομένως για την $F'(x)=2xg'(x^2)$ θα είναι $F'(x)>0$, $x>0$ άρα γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και $F'(x)<0$, $x<0$, άρα γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ .

Τώρα είναι $F''(x)=2g'(x^2)+4x^2g''(x^2)$, $x\neq 0$ με $g''(x)=\frac{xe^x x^2-2x(xe^x-e^x+1)}{x^4}$ , $x>0$ ή $g''(x)=\frac{xe^x x^2-2x^2e^x+2xe^x-2x}{x^4}=\frac{x^2e^x-2xe^x+2e^x-2}{x^3}$

οπότε αν θεωρήσουμε την $\varphi(x)=x^2e^x-2xe^x+2e^x-2$, $x\geq 0$ έχουμε ότι

$\varphi'(x)=2xe^x+x^2e^x-2e^x-2xe^x+2e^x=x^2e^x>0$, $x>0$.

άρα γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως θα ισχύει ότι $\varphi(x)>\varphi(0)=0$, $x>0$ επομένως η $g''(x)=\frac{\varphi(x)}{x^3}>0$, $x>0$ άρα και $g''(x^2)>0$, $x\neq 0$ άρα

$F''(x)=2g'(x^2)+4x^2g''(x^2)>0$, $x\neq 0$ δηλαδή η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

**ε.** Είναι $0\leq t\leq 1$ άρα και $0\leq x^2t\leq x^2$, $x\neq 0$ επομένως και $e^0\leq e^{x^2t}\leq e^{x^2}$ άρα και $\int_0^1 1dt\leq\int_0^1 e^{x^2t}dt\leq\int_0^1 e^{x^2}dt \Leftrightarrow 1\leq\int_0^1 e^{x^2t}dt\leq e^{x^2}$ **(1)**.

**στ.** Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}\frac{x}{\eta\mu x}=F'(0)\cdot 1=0$.

Ακόμη από $F(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$, $x\neq 0$ είναι $\frac{F(x)}{x}=\frac{e^{x^2}-1}{x^3}$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}2xe^{x^2}=+\infty$$

και όμοια στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}\overset{DEL}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{x^2}}{3x}\overset{DEL}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{4xe^{x^2}}{3}=-\infty$$

**Θέμα 16ο.**

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$\int_x^{2x-1}\left(2xf(2x-t)-(t+1)f(2x-t)\right)dt = e^x - ex$ , και ο μιγαδικός $z \in \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει $f(z\bar{z}+4) \le f(4|z|)$ .

**α.** Να βρείτε το τύπο της f.

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

**γ.** Ένα κινητό Μ κινείται στο γεωμετρικό τόπο του z.

**i.** Να βρείτε σε ποιο σημείο του γεωμετρικού τόπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ ως προς το χρόνο t είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y, αν υποτεθεί ότι $y(t) \ge 0$ και $x'(t)<0$ για κάθε $t \ge 0$ .

**ii.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y τη χρονική στιγμή που το κινητό Μ περνάει από το $A(1,-3)$, όπου η τετμημένη x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο.

**Λύση:**

1. Με $2x-t=u$ έχουμε ότι $-dt=du$ και $t=x \to u=x$, $t=2x-1 \to u=1$ άρα από $\int_x^{2x-1}\left(2xf(2x-t)-(t+1)f(2x-t)\right)dt = e^x - ex$ προκύπτει ότι

$\int_x^1\left(2xf(u)-(2x-u+1)f(u)\right)(-du) = e^x - ex$ ή

$\int_1^x\left(2xf(u)-2xf(x)+(u-1)f(u)\right)du = e^x - ex$ ή

$\int_1^x\left((u-1)f(u)\right)du = e^x - ex$ **(1)** και παραγωγίζοντας έχουμε ότι $(x-1)f(x) = e^x - e$ και για $x \ne 1$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x-e}{x-1}$.

Επειδή τώρα η f είναι συνεχής στο $x=1$ θα είναι $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$ και αφού

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{x-1} = \lim_{x\to1}\dfrac{e^x-e^1}{x-1} = e$ (από τον ορισμό του παράγωγου αριθμού) θα είναι $f(1)=e$ άρα είναι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-e}{x-1}, & x \ne 1 \\ e, & x=1 \end{cases}$.

**β.** Είναι η f παραγωγίσιμη για $x \ne 1$ με $f'(x) = \dfrac{(e^x-e)(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \dfrac{xe^x-2e^x+e}{(x-1)^2}$.

Τώρα για την $g(x)=xe^x-2e^x+e$ ισχύει ότι $g'(x)=e^x+xe^x-2e^x=(x-1)e^x$ άρα $g'(x)>0$, $x>1$ επομένως γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και $g'(x)<0$, $x<1$, επομένως γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, άρα έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ δηλαδή ισχύει $g(x)\geq g(1)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως για την $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και αφού είναι συνεχής στο $x_0=1$ θα είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ισχύει ακόμα ότι $(|z|-2)^2\geq 0\Leftrightarrow |z|^2-4|z|+4\geq 0\Leftrightarrow z\overline{z}+4\geq 4|z|$ οπότε θα είναι $f(z\overline{z}+4)\geq f(4|z|)$ και αφού από υπόθεση έχουμε ότι $f(z\overline{z}+4)\leq f(4|z|)$ θα ισχύει ότι $f(z\overline{z}+4)=f(4|z|)\Leftrightarrow z\overline{z}+4=4|z|\Leftrightarrow(|z|-2)^2=0$ άρα $|z|=2$ οπότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$.

**γ.i.** Ισχύει κάθε χρονική στιγμή ότι $x^2(t)+y^2(t)=4$ και θέλουμε σε ποιο σημείο ισχύει ότι $x'(t_0)=y'(t_0)$ οπότε παραγωγίζοντας την ισότητα ως προς το χρόνο έχουμε ότι $2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0\Leftrightarrow x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0$ και για $t=t_0$ ισχύει $x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)=0$ και αφού $x'(t_0)=y'(t_0)<0$ θα ισχύει ότι

$x(t_0)+y(t_0)=0\Leftrightarrow x(t_0)=-y(t_0)$ επομένως από $x^2(t_0)+y^2(t_0)=4\Leftrightarrow 2y^2(t_0)=4\Leftrightarrow y(t_0)=\sqrt{2}$ και τότε $x(t_0)=-\sqrt{2}$ άρα στο σημείο $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M ως προς το χρόνο t είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y.

**ii.** Τώρα όταν $x(t_0)=1$, $y(t_0)=\sqrt{3}$ και $x'(t_0)=-2$ από $x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0$ προκύπτει ότι $1(-2)+\sqrt{3}y'(t_0)=0\Leftrightarrow y'(t_0)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

**Θέμα 17ο.**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύουν $f(x)>0$ , $f'(x)+2xf(x)=0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ .

**α.** Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

**β.** Να δείξετε ότι $\frac{x-1}{2x}f(x)<\int_1^x\frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{x-1}{2}$, $x>1$.

**γ.** Να βρείτε τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt$, $x>1$.

**δ.** Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$, για κάθε $x>1$.

**Λύση:**

**α.** Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-2xf(x)$. Η συνάρτηση $-2x$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0,+\infty)$, συνεπώς η $f'$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων . Ακόμη για κάθε $x>0$ είναι

$f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}f'(x)+e^{x^2}2xf(x)=e^{x^2}\cdot 0\Leftrightarrow\left(e^{x^2}f(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{x^2}\cdot f(x)=c$, όπου c πραγματική σταθερά . Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ θα είναι $f(1)=1$, άρα $e^{1^2}\cdot f(1)=c\Leftrightarrow e\cdot 1=c\Leftrightarrow c=e$ . Συνεπώς για κάθε $x>0$ είναι

$e^{x^2}\cdot f(x)=e\Leftrightarrow f(x)=e^{1-x^2}$.

**β.** Έστω $g(t)=\frac{f(t)}{2t^2}$, $t>0$. Είναι

$$g'(t)=\frac{f'(t)2t^2-f(t)\left(2t^2\right)'}{\left(2t^2\right)^2}=\frac{f'(t)2t^2-4tf(t)}{\left(2t^2\right)^2}\overset{f'(t)=-2tf(t)}{=}\frac{-2tf(t)2t^2-4tf(t)}{\left(2t^2\right)^2}=-f(t)\frac{t^2+1}{t^3}=$$

$=-e^{1-t^2}\frac{t^2+1}{t^3}<0$, για κάθε $t>0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Για κάθε $t\in[1,x]$ έχουμε : $1\le t\le x\Leftrightarrow g(1)\ge g(t)\ge g(x)\Leftrightarrow g(1)-g(t)\ge 0$ και $g(t)-g(x)\ge 0$. Επίσης αν $1<t<x\Leftrightarrow g(1)>g(t)>g(x)\Leftrightarrow g(1)-g(t)>0$ και $g(t)-g(x)>0$. Επειδή λοιπόν οι $g(1)-g(t)$, $g(t)-g(x)$ δεν είναι παντού μηδέν, είναι συνεχείς και μη αρνητικές στο $[1,x]$ θα έχουμε :

$\int_1^x \left(g(1)-g(t)\right)dt > 0$ **(1)** και $\int_1^x \left(g(t)-g(x)\right)dt > 0$ **(2)**.

Από την **(1)** προκύπτει $\int_1^x g(1)dt > \int_1^x g(t)dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{1}{2}dt > \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt < \frac{1}{2}(x-1)$.

Από την **(2)** προκύπτει $\int_1^x g(t)dt > \int_1^x g(x)dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt > g(x)\int_1^x 1dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt > \frac{f(x)}{2x^2}(x-1)$.

Επομένως $\frac{x-1}{2x^2}f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt < \frac{x-1}{2}$, $x > 1$ .

**γ.** Για κάθε $x > 1$ έχουμε $F(x) = \int_1^x \left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt = \int_1^x \left(f(t)+\frac{f(t)}{2t^2}\right)dt = \int_1^x \left(e^{1-t^2}+\frac{e^{1-t^2}}{2t^2}\right)dt =$

$= \int_1^x \left(-\frac{1}{2t}e^{1-t^2}\right)' dt = \left[-\frac{1}{2t}e^{1-t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{2x}e^{1-x^2} + \frac{1}{2\cdot 1}e^{1-1^2} = -\frac{1}{2x}e^{1-x^2} + \frac{1}{2}$ .

**δ.** Η σχέση $2e\int_1^x e^{-t^2}dt < 1$ γράφεται ισοδύναμα

$2\int_1^x e^{1-t^2}dt < 1 \Leftrightarrow 2\int_1^x f(t)dt < 1 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt < \frac{1}{2}$ **(3)**.

Είναι $e^{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2} - 1 > -1 \Leftrightarrow f(x)-f(1) > -1 \Leftrightarrow \int_1^x f'(t)dt > -1 \Leftrightarrow \int_1^x -2tf(t)dt > -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^x tf(t)dt < \frac{1}{2}$ **(4)**.

Για κάθε $t > 1 \overset{f(t)>0}{\Leftrightarrow} tf(t) > f(t) \Leftrightarrow tf(t)-f(t) > 0$. Επειδή η $tf(t)-f(t)$ είναι συνεχής στο $[1,x]$ (με $x > 1$), δεν είναι παντού μηδέν στο $[1,x]$ και για κάθε $t \in [1,x]$ είναι $tf(t)-f(t) \geq 0$ θα ισχύει $\int_1^x \left(tf(t)-f(t)\right)dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^x tf(t)dt > \int_1^x f(t)dt$ **(5)**. Από τις **(4)** και **(5)** παίρνουμε $\int_1^x f(t)dt < \frac{1}{2}$, δηλαδή την **(3)** , οπότε το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

**Θέμα 18ο.**

Έστω συνάρτηση $f$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την $f''$ συνεχή στους πραγματικούς αριθμούς.

Αν η συνάρτηση $f''$ ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x)f(x)+[f'(x)]^2=f(x)f'(x)$, $f(0)=2f'(0)=1$ τότε :

**α.** Να βρείτε τον τύπο της f.

**β.** Να αποδείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^{2004}\ln f(x)dx=0$, $\alpha>0$.

**γ.** Αν $g$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ με σύνολο τιμών το $[0,1]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x-\int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt=1$ έχει μια μόνο λύση στο $[0,1]$.

*(Θέμα 127 Συλλογής)*

**Λύση**

**α.** $f''(x)f(x)+\left[f'(x)\right]^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow\left(2f(x)f'(x)\right)'=\left(f^2(x)\right)'\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=f^2(x)+c$.

Για $x=0$ η τελευταία γίνεται: $1=1+c\Leftrightarrow c=0$. Άρα:

$$f^2(x)=2f(x)f'(x)\Leftrightarrow f^2(x)=\left(f^2(x)\right)'\Leftrightarrow f^2(x)e^{-x}-\left(f^2(x)\right)'e^{-x}=0\Leftrightarrow\left(f^2(x)e^{-x}\right)'=0$$
$$\Leftrightarrow f^2(x)e^{-x}=c_1.$$

Επειδή $f(0)=1$ τότε $c_1=1$ άρα: $f^2(x)=e^x$.

Από την τελευταία σχέση προφανώς η $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο , και αφού $f(0)=1$ τότε $f(x)>0$ για κάθε . Οπότε τελικά: $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$.

**β.** Έστω $h(x)=x^{2004}\ln f(x)=x^{2004}\cdot\frac{x}{2}$. Τότε είναι: $h(-x)=(-x)^{2004}\cdot\frac{-x}{2}=-h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η g είναι περιττή, όποτε $\int_{-\alpha}^{\alpha}h(x)dx=0$.

**γ.** Η g έχει σύνολο τιμών το $[0,1]$οπότε $0\leq g(x)\leq 1$. Όμως $1+f^2(x)>1\Leftrightarrow 0<\frac{1}{1+f^2(x)}<1$. Άρα:

$$0\leq\frac{g(x)}{1+f^2(x)}\leq 1\Leftrightarrow 1-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}\geq 0 \text{ Οπότε: } 1-\int_0^1\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt>0.$$

Έστω τώρα η συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με $\varphi(x)=2x-\int_0^x\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt-1$.

$\varphi(0) = -1 < 0$, $\varphi(1) = 1 - \int_0^1 \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt > 0$, οπότε από Bolzano η $\varphi$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Όμως η συνάρτηση $\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt - 1$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα η συνάρτηση $\varphi$ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = 2 - \frac{g(x)}{1+f^2(x)} \geq 1$ όποτε η $\varphi$ είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

## Θέμα 19ο.

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t)=2t+\mu$, $t\in\mathbb{R}$, όπου η παράμετρος $\mu$ είναι ένας πραγματικός αριθμός . Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές , με τον τύπο $E(t)=(t-1)\varphi(t)$, $t\geq 0$, όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη .

Το κόστος λειτουργίας $K(t)$ της επιχείρησης δίνεται , επίσης σε εκατομμύρια δραχμές ,σύμφωνα με τον τύπο $K(t)=\varphi(t+4)$, $t\geq 0$.

**α.** Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$, για $t\geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές .

**β.** Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη ;

**γ.** Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους ;

**δ.** Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $I=\dfrac{111}{2}\displaystyle\int_0^6 P(t)dt$.

## Λύση

**α.** Για κάθε $t\geq 0$ έχουμε :

$$P(t)=E(t)-K(t)=(t-1)\varphi(t)-\varphi(t+4)=(t-1)(2t+\mu)-\big(2(t+4)+\mu\big)=$$

$$=2t^2+\mu t-2t-\mu-2t-8-\mu=2t^2+(\mu-4)t-2\mu-8.$$

Επειδή κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά 12 εκατομμύρια δραχμές θα είναι $P(1)=-12\Leftrightarrow 2\cdot 1^2+(\mu-4)\cdot 1-2\mu-8=-12\Leftrightarrow \mu=2$. Άρα $P(t)=2t^2+(2-4)t-2\cdot 2-8$, δηλαδή $P(t)=2t^2-2t-12$, $t\geq 0$.

**β.** Η επιχείρηση παρουσιάζει κέρδη όταν $P(t)>0\Leftrightarrow 2t^2-2t-12>0\Leftrightarrow t^2-t-6>0\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t>3$.

Άρα η επιχείρηση θα αρχίσει να παρουσιάζει κέρδη μετά το τέλος του τρίτου έτους.

**γ.** Ζητούμενο είναι το $P'(2)$. Είναι $P'(t)=4t-2$, $t\geq 0$.

Άρα $P'(2)=4\cdot 2-2=6$ εκατομμύρια δραχμές / έτος.

**δ.** $I=\dfrac{111}{2}\displaystyle\int_0^6 P(t)dt=\dfrac{111}{2}\int_0^6 (2t^2-2t-12)dt=\dfrac{111}{2}\left[\dfrac{2t^3}{3}-t^2-12t\right]_0^6=1998$.

## Θέμα 20ο.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$ και $g(x)=\int_1^4 f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, $x>0$.

**α.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 f(t)dt$.

**β.** Να αποδείξετε ότι : $e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$.

**γ.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

## Λύση

**α.** Η $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$ είναι συνεχής στο $[1,4]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων άρα

$$I=\int_1^4 f(t)dt=\int_1^4\frac{2t+3}{t+2}dt=\int_1^4\frac{2(t+2)-1}{t+2}dt=\int_1^4\left(2-\frac{1}{t+2}\right)dt=$$

$$=\left[2t-\ln|t+2|\right]_1^4=(8-\ln6)-(2-\ln3)=6-(\ln6-\ln3)=6-\ln2$$

**β.** Για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$ έχουμε $1\le t\le 4\overset{\cdot\frac{1}{x^2}}{\underset{x^2>0}{\Rightarrow}}\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{t}{x^2}\le\dfrac{4}{x^2}\overset{e^x\nearrow}{\Rightarrow}e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$

**γ.** Για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$ είναι $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}>0$, $\dfrac{x+2}{x+1}>0$ και από την σχέση $e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$

παίρνουμε $e^{\frac{1}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\le e^{\frac{t}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\le e^{\frac{4}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\Rightarrow$

$e^{\frac{t}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}-e^{\frac{1}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\ge0$ **(1)** και $e^{\frac{4}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}-e^{\frac{1}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\ge0$ **(2)** .

Λόγω της **(1)** προκύπτει $\displaystyle\int_1^4\left(f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}-f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}\right)dt\ge0\Rightarrow$

$$\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt\ge\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}dt\Rightarrow\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt\ge\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}\int_1^4 f(t)dt$$

$\Rightarrow\ g(x)\ge\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}(6-\ln2)$ **(3)** .

Λόγω της **(2)** προκύπτει:

$$\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}dt \ge \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt \Rightarrow \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}dt \ge \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}\int_1^4 f(t)dt \ge \frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}\int_1^4 f(t)dt \Rightarrow \frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}(6-\ln 2) \ge g(x) \ \textbf{(4)}.$$

Από τις **(3)** και **(4)** παίρνουμε $\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}(6-\ln 2) \le g(x) \le \frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}(6-\ln 2)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}(6-\ln 2)\right) = (6-\ln 2)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^2}} = (6-\ln 2)\cdot 1\cdot e^0 = 6-\ln 2$,

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}(6-\ln 2)\right) = (6-\ln 2)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{4}{x^2}} = (6-\ln 2)\cdot 1\cdot e^0 = 6-\ln 2$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 6-\ln 2$.