ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+f(x)=3x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα.

β)να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την $y=x$.

δ) η εξίσωση $f(f(x))-f(x^2-3x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

ε) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

στ) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ζ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_0=1$.

η) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $2f(\xi)=f(0,1)+f(0,01)$.

θ) Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2)x^3+x^2-1821}{x^4+4x^2-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3f(x)-6x+3}{x-1}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-x-\ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(1)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x+\ln x>1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(1,e)$.

ε) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $\dfrac{9}{4}$.

στ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

ζ) Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+x-2}{x-1}$

3. Εστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta$ για την οποία ισχύει $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\dfrac{(\alpha+\beta)^3}{8}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha+\beta)^3x^3+\eta\mu x}{8f(\alpha)x^3-5x^2+7}=f(\beta)f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)x^4-f(\alpha)x^3-2f(\beta)}{f(\beta)x^3+f(\alpha)x^2-\beta}=+\infty$.

4. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+3f(x)=x-3$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

δ) Αν $f^{-1}\left(f\left(|z-6-8i|\right)-1\right) = 3$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

ε) Να αποδείξετε ότι $3 \le |z| \le 17$.

στ) Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha-6)^2 x^4 + (\beta-8)^2 x - 5 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha-3)^2 x^{2\nu} + (\beta+4)^2 x^{\nu} - 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.Αν η εικόνα του μιγαδικού , ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(3,-4)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στ διάστημα $(0,1)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \le |z-1+2i| \le 3\sqrt{2}$.

γ) Αν $z = 4-5i$, να βρείτε τον $\nu \in \mathbb{N}^*$ για τον οποίο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2-2x+4} = 1$.

6. Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$$|z-1| f(x) + |z+i| f(2-x) = |z-1|,\ z \in \mathbb{C} - \{1\},\ x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z-1| = |z+i|$.

β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < \dfrac{1}{2}$.

δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-4i|$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

7. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1] \to (0,+\infty)$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + (x-1)i$, $w = f(x) + i$, $x \in [0,1]$, με εικόνες τα σημεία Α,Β αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του $x \in (0,1)$, για την οποία το τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο Ο.

β) Αν $|z| = |w|$ και $|z-w| = \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι:

i. $w^{100} = z$ ii. $(z-w)^{100} = (z+w)^{100}$ iii. $(z-kw)^{100} = (kz+w)^{100}$, $k \in \mathbb{R}$

γ) Αν $|z| = |w|$ και $|z-w| \ne \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι:

i. $z^{4\nu} = w^{4\kappa}$, $\nu, \kappa \in \mathbb{N}^*$

ii. οι εικόνες των μιγαδικών u, wu, zu, $u \in \mathbb{C}$ σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

8. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί,
$z=\alpha+f(\beta)i$,$w=f(\alpha)-\beta i$
όπου οι α,β είναι ομόσημοι. Αν $|iz-w|^2=|z|^2+|w|^2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ο $\frac{z}{w}$ είναι πραγματικός.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z , $-iw$ και η αρχή O των αξόνων, σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

9. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και οι μιγαδικοί $z=f(1)+i$ και $w=1+f(2)i$ για τους οποίους ισχύει ότι $|z+w|=|z-w|$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $[1,2]$.

β) Αν $f(2)=1$, τότε:

i. να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του μιγαδικού z.

ii. να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-u|$, όπου $u\in\mathbb{C}$ με $|u+4i|=\sqrt{2}$.

10. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=1+f(1)i$ για τον οποίο ισχύει ότι: $|z+9i|=3|z+i|$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z|=3$ β) $f^2(1)=8$

γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $2x_0f^2(x_0)-5=4x_0$.

δ) Δίνεται μιγαδικός w για τον οποίο ισχύει: $3w=iz+2$. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες του w.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|z^2|x^{2\nu+1}+(|z^2-1|+1)x-7$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, $z\in\mathbb{C}$. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z-1|=4-|z+1|$, τότε:

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.

β) Να αποδείξετε ότι $|z^2|+|z^2-1|=7$.

γ) Αν z_1,z_2 δύο από τους μιγαδικούς z, να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|\le 4$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=|z-x^2i|+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου z μιγαδικός με $|z|=1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)=\sqrt{x^4-2\mathrm{Im}(z)\cdot x^2+1}+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. β) Η f είναι συνεχής.

γ) Αν $|\mathrm{Im}(z)|\le 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=x_0$

δ) Αν $f(2)=6$, να βρείτε τον z.

ε) Έστω μιγαδικός w με $w=iz$.

i. Να βρείτε το γεωμετρικ,ό τόπο του w.

ii. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $|z-w|$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|xz+1|-4$,$z\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$ με $Im(z)\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $f(-2)=f(2)$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $z\in I$

ii. να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iii. να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $|\xi z+1|=14$.

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=f(x)+i\eta\mu x$, τέτοιος ώστε: $|z|^2-2Re(z)Im(z)=x^2+9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $f(0)=3$,

i. να βρείτε τη συνάρτηση f .

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x-3}{x}$.

iii.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\pi$.

15. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύει: $|z+2-2i|=\alpha$ και $|w-1+i|=\beta$, $\alpha,\beta>0$

Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2-\beta x-6}{x^2-4}=\dfrac{7}{4}$, τότε:

α) Να βρεθούν τα α,β.

β) Να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων των μιγαδικών z,w.

γ) Να βρεθεί η ελάχιστή και η μέγιστη τιμή της παράστασης $|z-w|$.

δ) Να αποδείξετε ότι $2(\sqrt{2}-1)\leq|z|\leq 2(\sqrt{2}+1)$

ε) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}-1\leq|w|\leq\sqrt{2}+1$