

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 27^ο:

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_1^{f(x)} e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)], \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$
 γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3$
 δ) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$h(f(x) + x - 3) = f(h(x)) + h(x) - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

τότε, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y = x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

- ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2e - 1$

ΛΥΣΗ

- α) Η συνάρτηση $e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις $\frac{1}{t}$ και $f(x)$ (όρια ολοκλήρωσης) ορίζονται στο \mathbb{R} . Επειδή το $1 \in (0, +\infty)$, για να

ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^{f(x)} e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt$ πρέπει και αρκεί $f(x) \in (0, +\infty)$

Δηλαδή:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\int_1^{f(x)} e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(x)} \left(e^t \frac{1}{t} + e^t \ln t \right) dt = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(x)} (e^t \ln t)' dt = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \Leftrightarrow$$

$$[e^t \ln t]_1^{f(x)} = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} \ln f(x) = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \quad e^{f(x)} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = x + \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^x + \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = \ln [e^x (x^2 + 1)] \Leftrightarrow f(x) = e^x (x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) 1^{ος} τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$, $x \in [0, 1]$

♦ Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

♦ $g(0) = f(0) - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$

♦ $g(1) = f(1) - 3 = 2e - 3 > 0$

οπότε $g(0)g(1) < 0$

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x) = (e^x(x^2 + 1))' = e^x(x^2 + 1) + 2xe^x = e^x(x^2 + 1 + 2x) = e^x(x + 1)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x) > 0$, για κάθε $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

2^{ος} τρόπος:

Η συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών, διότι είναι συνεχής σε αυτό ως γινόμενο συνεχών και $f(0) = 1 \neq 2e = f(1)$

Είναι $f(0) = 1 < 3 < 2e = f(1)$, άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x) = (e^x(x^2 + 1))' = e^x(x^2 + 1) + 2xe^x = e^x(x^2 + 1 + 2x) = e^x(x + 1)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x) > 0$, για κάθε $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h(f(x) + x - 3) = f(h(x)) + h(x) - 3$$

Για $x = x_0$ έχουμε:

$$h(f(x_0) + x_0 - 3) = f(h(x_0)) + h(x_0) - 3 \Rightarrow$$

$$h(3 + x_0 - 3) = f(h(x_0)) + h(x_0) - 3 \Rightarrow h(x_0) = f(h(x_0)) + h(x_0) - 3 \Rightarrow$$

$$f(h(x_0)) = 3 \Rightarrow f(h(x_0)) = f(x_0) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} h(x_0) = x_0$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y = x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ε) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, 1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f'(x) = e^x(x+1)^2$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{e^1(1^2 + 1) - e^0(0^2 + 1)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = 2e - 1$$

ΘΕΜΑ 28^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 1 + e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

γ) Αν $h(x) = \int_1^{x^3} f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx = 0$

ii) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = -\frac{h(x_0)}{\sqrt[3]{x_0}}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις $-x$ και x (όρια ολοκλήρωσης) ορίζονται στο \mathbb{R}

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R}

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-x}^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = \int_{-x}^0 \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt + \int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = \\ &= \int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt - \int_0^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως αρχική της συνεχούς

συνάρτησης $\frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}$. Επίσης η συνάρτηση $\varphi(-x) = \int_0^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο

\mathbb{R} , ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt \right)' - \left(\int_0^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt \right)' = \\ &= \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} - \frac{e^{-x} + e^{x^2}}{e^{-x} + 1} (-x)' = \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} + \frac{\frac{1}{e^x} + e^{x^2}}{\frac{1}{e^x} + 1} = \\ &= \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} + \frac{1 + e^x e^{x^2}}{1 + e^x} = \frac{e^x + e^{x^2} + 1 + e^x e^{x^2}}{e^x + 1} = \\ &= \frac{e^x(1 + e^{x^2}) + (1 + e^{x^2})}{e^x + 1} = \frac{(1 + e^{x^2})(e^x + 1)}{e^x + 1} = 1 + e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f''(x) = (1 + e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}$$

Είναι:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)	∩	0	∪

Σ.Κ.

Είναι:

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } (-\infty, 0] \\ f''(x) < 0 \text{ στο } (-\infty, 0) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \\ f''(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$
- $f''(0) = 0$ και εκατέρωθεν του $x_0 = 0$ αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης f , άρα το σημείο $(0, f(0))$, δηλαδή το $O(0, 0)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f

γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$w(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$h(x) = \int_1^{x^3} f(t) dt = w(x^3), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η συνάρτηση w είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f , με παράγωγο:

$$w'(x) = \left(\int_1^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$h'(x) \stackrel{(1)}{=} \left(w(x^3) \right)' \stackrel{(2)}{=} w'(x^3) \cdot (x^3)' = 3x^2 \cdot f(x^3), \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) dx &= \int_0^1 (x)' h(x) dx = [xh(x)]_0^1 - \int_0^1 xh'(x) dx = \\ &= h(1) - \int_0^1 x \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) dx \stackrel{h(1)=0}{=} - \int_0^1 x \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) dx \end{aligned}$$

Θέτουμε:

$$u = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{u}, \quad u \geq 0 \quad \text{και} \quad du = 3x^2 dx$$

Για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = 1$ είναι $u = 1$

Άρα έχουμε:

$$\int_0^1 h(x) dx = - \int_0^1 x \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) dx = - \int_0^1 \sqrt[3]{u} f(u) du = - \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 h(x) dx = - \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx$$

Οπότε:

$$\int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx = 0 \quad (3)$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \int_0^x h(t) dt + \int_0^x \sqrt[3]{t} f(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

Η συνάρτηση $\int_0^x h(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης

h και η συνάρτηση $\int_0^x \sqrt[3]{t} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\sqrt[3]{t} f(t)$, οπότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\int_0^x h(t) dt \right)' + \left(\int_0^x \sqrt[3]{t} f(t) dt \right)' = \\ &= h(x) + \sqrt[3]{x} f(x), \quad x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Είναι:

- $g(0) = 0$ και
- $g(1) = \int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx \stackrel{(\beta)}{=} 0$

οπότε $g(0) = g(1)$

Επομένως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow h(x_0) + \sqrt[3]{x_0} f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -\frac{h(x_0)}{\sqrt[3]{x_0}}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, με παράγωγο:

$$\begin{aligned} g''(x) &= h'(x) + (\sqrt[3]{x})' f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x) = \\ &= h'(x) + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x) = \\ &= 3x^{\frac{1}{3}} f(x^3) + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} f(x) + \sqrt[3]{x} (1 + e^{x^2}) = \\ &= 3x^{\frac{1}{3}} f(x^3) + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f(x) + \sqrt[3]{x} (1 + e^{x^2}) \end{aligned}$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$f'(x) = 1 + e^{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \int_0^0 \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = 0$$

Επομένως:

- για $x < 0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$
- για $x > 0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$

Άρα για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι:

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad f(x^3) > 0$$

Επομένως:

$$g''(x) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (0, 1)$$

Οπότε η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1)$, άρα το $x_0 \in (0, 1)$ είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ 29ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

- $f(x - y) = f(x) - f(y) - 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 2$ (2)
- $|z - i|(f(x) + 1) \leq \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$ (3)

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου με $|z_1 - z_2| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 2$

γ) Να αποδείξετε ότι:

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}
- $f(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt$, $x \in \mathbb{R}$

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt \quad \text{και} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt$$

στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 + 2\rho_2 > 1$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = y = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(0) = f(0) - f(0) - 1 \Leftrightarrow f(0) = -1 \quad (4)$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = |z - i|(f(x) + 1) - \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$|z - i|(f(x) + 1) \leq \eta\mu 2x \Leftrightarrow$$

$$|z - i|(f(x) + 1) - \eta\mu 2x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0)$$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

- Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (-1)}{x} = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \Leftrightarrow f'(0) = 2 \quad (5)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$, οπότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = |z - i|f'(0) - 2\sigma\upsilon\upsilon 0 \stackrel{(5)}{=} 2|z - i| - 2 \quad (6)$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεώρηματος Fermat, οπότε

$$g'(0) = 0 \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} 2|z - i| - 2 = 0 \Leftrightarrow |z - i| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0, 1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

- β)** Έστω A και B οι εικόνες αντίστοιχα των μιγαδικών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε είναι: $(AB) = |z_1 - z_2|$, άρα $(AB) = 2$. Επειδή τα σημεία A, B ανήκουν στον προηγούμενο κύκλο, που έχει ακτίνα $\rho = 1$, συμπεραίνουμε ότι τα A, B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου αυτού.

Αν M είναι η εικόνα του μιγαδικού $z_1 + z_2$, τότε το παραλληλόγραμμο $OAMB$ είναι ορθογώνιο, αφού η γωνία $\widehat{A\hat{O}B}$ βαίνει σε ημικύκλιο.

1ος τρόπος:

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσοι, δηλαδή

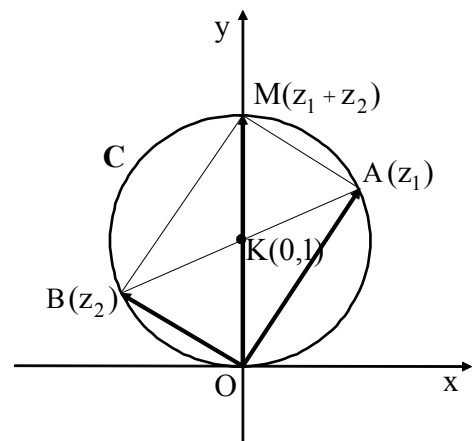
$$(OM) = (AB) \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

Επομένως $|z_1 + z_2| = 2$

2ος τρόπος:

Οι διαγώνιοι OM και AB διχοτομούνται, άρα το κέντρο K του κύκλου, θα είναι το κοινό μέσο των δύο διαγωνίων,

Άρα $|z_1 + z_2| = (OM) = 2(OK) = 2\rho = 2 \cdot 1 = 2$



- γ) i) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq x_0$ θέτουμε $x = x_0 - h$, οπότε όταν το $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow 0$ και έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{x_0 - h - x_0} \stackrel{(1)}{=} \frac{f(x_0) - f(h) - 1 - f(x_0)}{-h} = \frac{-f(h) - 1}{-h} = \frac{f(h) + 1}{h}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1}{h} \stackrel{(2)}{=} 2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 2$. Γενικά η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2$

- ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = (2x)', \text{ οπότε } f(x) = 2x + c, x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + c \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} c = -1$$

Άρα

$$f(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$$

- δ) Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt &= \int_0^x \frac{2t-1}{e^t} dt = \int_0^x (2t-1)e^{-t} dt = - \int_0^x (2t-1)(e^{-t})' dt = \\ &= - \left[(2t-1)e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x (2t-1)e^{-t} dt = - \left((2x-1)e^{-x} - (2 \cdot 0 - 1)e^0 \right) + \int_0^x 2e^{-t} dt = \\ &= - (2x-1)e^{-x} - 1 - 2 \int_0^x e^{-t} (-t)' dt = - (2x-1)e^{-x} - 1 - 2 \left[e^{-t} \right]_0^x = \\ &= - (2x-1)e^{-x} - 1 - 2(e^{-x} - e^0) = -2x e^{-x} + e^{-x} - 1 - 2e^{-x} + 2 = \\ &= -2x e^{-x} - e^{-x} + 1 = \frac{-2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + 1 = \frac{e^x - 2x - 1}{e^x} \end{aligned}$$

- ε) Είναι:

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = 1, \text{ γιατί}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x})^{u=-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} (e^u) = 0 \quad \text{και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x})^{u=-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} (1 - e^u) = 1 - 0 = 1$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 2x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (-2x - 1)e^{-x}] = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty \text{ και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

$$\text{στ) Θεωρούμε τη συνάρτηση } F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt \stackrel{(\delta)}{=} \frac{e^x - 2x - 1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $\frac{f(t)}{e^t}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με

$$F'(x) = \left(\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt \right)' = \frac{f(x)}{e^x} = \frac{2x - 1}{e^x}$$

Είναι:

$$\bullet F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\bullet F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Το πρόσημο της $F'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της F φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$F'(x)$		-	+
$F(x)$	$+\infty$	ελάχιστο	1

Για $x=0$ είναι $F(0) = \int_0^0 \frac{f(t)}{e^t} dt = 0$, άρα η εξίσωση $F(x) = 0$ στο διάστημα $\Delta_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ έχει

ρίζα την $\rho_1 = 0$, που είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

Είναι:

$$\bullet F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{e} - 2}{\sqrt{e}} < 0, \text{ γιατί } e < 4 \Rightarrow \sqrt{e} < 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt \stackrel{(\epsilon), (i)}{=} 1$$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι

$$F(\Delta_2) = \left[F\left(\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right) = \left[\frac{\sqrt{e} - 2}{\sqrt{e}}, 1 \right)$$

Το $0 \in F(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $F(x) = 0$ στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ έχει μια ρίζα ρ_2 , που είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2

Επειδή $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $\rho_2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\rho_2 > 1$, οπότε $\rho_1 + 2\rho_2 = 0 + 2\rho_2 = 2\rho_2 > 1$

Επομένως η εξίσωση $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 + 2\rho_2 > 1$

ΘΕΜΑ 30ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = 4 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + \kappa, \quad x > 0 \quad (1)$$

όπου κ είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 2 \cdot (8 + |z^2 - 9|) \quad (2)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κορτή.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(4-x) + f(x) \geq 2f(2)$, για κάθε $x > 0$ και ότι $\int_1^3 f(x) dx > 2f(2)$

δ) Αν επιπλέον είναι $f'(1) = 0$ και $f(1) = -1$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x$, $x > 0$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 2 \cdot (8 + |z^2 - 9|) \Leftrightarrow |z+3|^2 - 2|z-3||z+3| + |z+3|^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$(|z-3| - |z+3|)^2 = 16 \Leftrightarrow ||z-3| - |z+3|| = 4 \quad (\text{Ορισμός υπερβολής})$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία $E(3, 0)$, $E'(-3, 0)$, κορυφές τα σημεία $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$

και εξίσωση $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

β) Λόγω του ερωτήματος (α) ισχύει $|z| \geq a = 2$ για κάθε μιγαδικό z που η εικόνα του ανήκει στην υπερβολή C , άρα $\kappa = 2$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - (f'(x-h) - f'(x))}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right) = \frac{1}{2} (f''(x) + f''(x)) = f''(x), \end{aligned}$$

γιατί

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \stackrel{-h=\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f'(x+\omega) - f'(x)}{\omega} = f''(x)$$

και η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Από την (1) έχουμε:

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow f''(x) = 2 \cdot \frac{2 - 2 \ln x + x^2}{x^2}, x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 - 2 \ln x + x^2, x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = -\frac{2}{x} + 2x = \frac{2(x^2 - 1)}{x}, x > 0$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$		3	

ελάχιστο

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = 3$

Άρα $g(x) \geq 3$, για κάθε $x > 0$.

Επομένως $f''(x) = 2 \cdot \frac{g(x)}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) 1^{ος} τρόπος: (με τη βοήθεια ακρότατου)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(4-x) + f(x), x > 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = -f'(4-x) + f'(x), x > 0$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -f'(4-x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(4-x) = f'(x) \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} 4-x = x \Leftrightarrow x = 2$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow -f'(4-x) + f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(4-x) < f'(x) \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} 4-x < x \Leftrightarrow x > 2$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	2	$+\infty$
$h'(x)$		0	
$h(x)$		$2f(2)$	

ελάχιστο

- Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$
- Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$
- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$, με ελάχιστη τιμή $h(2) = 2f(2)$

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) \geq 2f(2) \Leftrightarrow f(4-x) + f(x) \geq 2f(2)$ (3)

2^{ος} τρόπος (ανισότητα Jensen)

Υπόδειξη:

Για $x = 2$ ισχύει ως ισότητα

Για $x > 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[4-x, 2]$ και $[2, x]$

Για $0 < x < 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[x, 2]$ και $[2, 4-x]$

και επειδή f' γνησίως αύξουσα γιατί f κυρτή, ... προκύπτει το ζητούμενο.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(4-x) + f(x) - 2f(2)$, $x > 0$

Η Φ είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $\Phi(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1, 3]$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = 2$, λόγω της σχέσης (3), άρα

$$\int_1^3 (f(4-x) + f(x) - 2f(2)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(4-x) dx + \int_1^3 f(x) dx - 2f(2) \int_1^3 dx > 0 \quad (*)$$

$$2 \int_1^3 f(x) dx > 2f(2) \int_1^3 dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx > f(2) \cdot (3-1) \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx > 2f(2)$$

(*) Είναι:

$$\int_1^3 f(4-x) dx = \int_1^3 f(x) dx$$

Πράγματι, αν θέσουμε $4-x = t$, τότε $dt = (4-x)' dx = -dx$

Για $x = 1$ είναι $t = 3$ και $x = 3$ είναι $t = 1$, οπότε έχουμε:

$$\int_1^3 f(4-x) dx = - \int_3^1 f(t) dt = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx$$

δ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow (f'(x))' = 4 \cdot \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2} + (2x)' \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))' = 4 \left(\frac{\ln x}{x} \right)' + (2x)' \Leftrightarrow (f'(x))' = \left(4 \frac{\ln x}{x} + 2x \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 4 \frac{\ln x}{x} + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x > 0$$

Για $x = 1$ είναι $f'(1) = 2 + c \Leftrightarrow c = -2$, γιατί $f'(1) = 0$

Άρα $f'(x) = 4 \frac{\ln x}{x} + 2x - 2, \quad x > 0$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 4 \frac{\ln x}{x} + 2x - 2 \Leftrightarrow f'(x) = 4 \ln x (\ln x)' + (x^2 - 2x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (2 \ln^2 x + x^2 - 2x)' \Leftrightarrow f(x) = 2 \ln^2 x + x^2 - 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}, x > 0$$

Για $x=1$ είναι $f(1) = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$, γιατί $f(1) = -1$

Άρα $f(x) = 2 \ln^2 x + x^2 - 2x, \quad x > 0$

ΘΕΜΑ 31ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z \neq -1$, και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \quad x e^x f'(e^x) = 2x^2 + |(z+1) \cdot x|, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

$$\bullet \quad f(1) = -1 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \ln^2 x - |z+1| \cdot \ln x - 1, & 0 < x < 1 \\ \ln^2 x + |z+1| \cdot \ln x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = e^{|z+1|}$$

δ) Έστω E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , όπου $g(x) = \ln^2 x - 1, x > 0$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=e$ και $x=e^2$. Αν $E=e^2$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$x e^x f'(e^x) = 2x^2 + |(z+1) \cdot x| \Leftrightarrow x e^x f'(e^x) = 2x^2 + |z+1| \cdot |x| \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(e^x) = 2x + |z+1| \cdot \frac{|x|}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x f'(e^x) = 2x - |z+1|, & x < 0 \\ e^x f'(e^x) = 2x + |z+1|, & x > 0 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$e^x f'(e^x) = 2x - |z+1| \Leftrightarrow (f(e^x))' = (x^2 - |z+1| \cdot x)' \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) = x^2 - |z+1| \cdot x + c_1, \quad x < 0$$

Θέτουμε $e^x = u > 0$, άρα $x = \ln u$

Για $x < 0$ είναι $e^x < e^0 = 1$, άρα $0 < u < 1$, οπότε έχουμε:

$$f(u) = \ln^2 u - |z+1| \cdot \ln u + c_1, \quad 0 < u < 1$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$e^x f'(e^x) = 2x + |z+1| \Leftrightarrow (f(e^x))' = (x^2 + |z+1| \cdot x)' \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) = x^2 + |z+1| \cdot x + c_2, \quad x > 0$$

Θέτουμε $e^x = u > 0$, άρα $x = \ln u$

Για $x > 0$ είναι $e^x > e^0 = 1$, άρα $u > 1$, οπότε έχουμε:

$$f(u) = \ln^2 u + |z+1| \cdot \ln u + c_2, \quad u > 1$$

Άρα

$$f(u) = \begin{cases} \ln^2 u - |z+1| \cdot \ln u + c_1, & 0 < u < 1 \\ \ln^2 u + |z+1| \cdot \ln u + c_2, & u > 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, οπότε $\lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1^+} f(u) = f(1)$, δηλαδή $c_1 = c_2 = -1$

Άρα

$$f(u) = \begin{cases} \ln^2 u - |z+1| \cdot \ln u - 1, & 0 < u < 1 \\ \ln^2 u + |z+1| \cdot \ln u - 1, & u \geq 1 \end{cases}$$

Επομένως

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x - |z+1| \cdot \ln x - 1, & 0 < x < 1 \\ \ln^2 x + |z+1| \cdot \ln x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

γ) • Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - |z+1| \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x - |z+1|}{x}$

• Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + |z+1| \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x + |z+1|}{x}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, με:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x - |z+1|}{x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{2 \ln x + |z+1|}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

• Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $\ln x < 0$, οπότε $f'(x) = \frac{2 \ln x - |z+1|}{x} < 0$

• Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $\ln x > 0$, οπότε $f'(x) = \frac{2 \ln x + |z+1|}{x} > 0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		\searrow	\nearrow

ελάχιστο

Έχουμε:

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } (0, 1] \\ f'(x) < 0 \text{ στο } (0, 1) \end{cases}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$
- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [1, +\infty) \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (1, +\infty) \end{cases}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=-1$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x - |z+1| \cdot \ln x - 1) = +\infty$,
γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-|z+1| \cdot \ln x) = +\infty$, αφού $|z+1| > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x + |z+1| \cdot \ln x - 1) = +\infty$,
γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (|z+1| \cdot \ln x) = +\infty$, αφού $|z+1| > 0$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, οπότε είναι:

$$f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = [-1, +\infty)$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι:

$$f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-1, +\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$$

- γ) • Το $0 \in f(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\xi_1 \in (0, 1)$, ($\xi_1 \neq 1$, επειδή $f(1) = -1$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$
- Το $0 \in f(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\xi_2 \in (1, +\infty)$, ($\xi_2 \neq 1$, αφού $f(1) = -1$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Επομένως υπάρχουν δύο ακριβώς $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα τέτοια, ώστε $f(\xi_1) = 0$ και $f(\xi_2) = 0$

Δηλαδή

$$\ln^2 \xi_1 - |z+1| \cdot \ln \xi_1 - 1 = 0, \text{ με } \xi_1 \in (0, 1)$$

$$\ln^2 \xi_2 + |z+1| \cdot \ln \xi_2 - 1 = 0, \text{ με } \xi_2 \in (1, +\infty)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\ln^2 \xi_1 - \ln^2 \xi_2 - |z+1| \cdot \ln \xi_1 - |z+1| \cdot \ln \xi_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln \xi_1 - \ln \xi_2) \cdot (\ln \xi_1 + \ln \xi_2) - |z+1| \cdot (\ln \xi_1 + \ln \xi_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln \xi_1 + \ln \xi_2) \cdot (\ln \xi_1 - \ln \xi_2 - |z+1|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln \xi_1 + \ln \xi_2 = 0 \\ \text{ή} \\ \ln \xi_1 - \ln \xi_2 - |z+1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\xi_1 \xi_2) = 0 \\ \text{ή} \\ \ln \frac{\xi_1}{\xi_2} = |z+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \xi_2 = 1 \\ \text{ή} \\ \frac{\xi_1}{\xi_2} = e^{|z+1|} \end{cases}$$

δ) Για κάθε $x \in [e, e^2]$ έχουμε:

$$f(x) - g(x) = \ln^2 x + |z+1| \cdot \ln x - 1 - \ln^2 x + 1 = |z+1| \cdot \ln x > 0$$

Επίσης η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο $[e, e^2] \subseteq (0, +\infty)$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = e$ και $x = e^2$ είναι:

$$E = \int_e^{e^2} (f(x) - g(x)) dx$$

Από υπόθεση είναι $E = e^2$, οπότε έχουμε:

$$e^2 = \int_e^{e^2} (|z+1| \cdot \ln x) dx \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot \int_e^{e^2} \ln x dx \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx \Leftrightarrow$$

$$e^2 = |z+1| \cdot \left([x \ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x (\ln x)' dx \right) \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot \left(e^2 \ln e^2 - e \ln e - \int_e^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$e^2 = |z+1| \cdot \left(2e^2 - e - \int_e^{e^2} 1 dx \right) \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot (2e^2 - e - (e^2 - e)) \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot e^2 \Leftrightarrow |z+1| = 1$$

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(-1, 0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ΘΕΜΑ 32ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$\left| z + \frac{3}{2}i \right| > \left| 3z + \frac{1}{2}i \right| \quad (1)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|z|^x + 2012^{1-x})$$

γ) Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, που είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο \mathbb{R} και z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, που ικανοποιούν την (1), τότε να αποδείξετε ότι, για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α , με $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω z ένας τυχαίος μιγαδικός που ικανοποιεί την (1). Τότε έχουμε:

$$\left|z + \frac{3}{2}i\right| > \left|3z + \frac{1}{2}i\right| \Leftrightarrow$$

$$|2z + 3i| > |6z + i| \Leftrightarrow$$

$$|2z + 3i|^2 > |6z + i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z + 3i)(2\bar{z} - 3i) > (6z + i)(6\bar{z} - i) \Leftrightarrow$$

$$4z\bar{z} - 6zi + 6\bar{z}i + 9 > 36z\bar{z} - 6zi + 6\bar{z}i + 1 \Leftrightarrow$$

$$32z\bar{z} < 8 \Leftrightarrow z\bar{z} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z|^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

β) Επειδή $|z| < \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$0 < |z|^x + (2012)^{1-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^x + (2012)^{1-x} \quad (2)$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2012)^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2012}{(2012)^x} = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2012)^x = +\infty$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + (2012)^{1-x} \right] = 0 \quad (3)$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ (4)

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|z|^x + (2012)^{1-x} \right] = 0$$

γ) Είναι:

$$\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5} \leq \frac{3|z_1| + 7|z_2|}{5} < \frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2}}{5} = 1$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < 2f(1)$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$2f(1) \leq f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = 0$ τότε η ισχύει η ισότητα.
- Αν $\alpha > 0$ τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f σε καθένα από τα διαστήματα $[1-\alpha, 1]$ και $[1, 1+\alpha]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1-\alpha, 1)$ και $\xi_2 \in (1, 1+\alpha)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(1-\alpha)}{1 - (1-\alpha)} = \frac{f(1) - f(1-\alpha)}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1+\alpha) - f(1)}{1+\alpha - 1} = \frac{f(1+\alpha) - f(1)}{\alpha}$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

$$1-\alpha < \xi_1 < 1 < \xi_2 < 1+\alpha \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

Άρα

$$\frac{f(1) - f(1-\alpha)}{\alpha} < \frac{f(1+\alpha) - f(1)}{\alpha} \Rightarrow$$

$$f(1) - f(1-\alpha) < f(1+\alpha) - f(1) \Rightarrow$$

$$2f(1) < f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει $2f(1) \leq f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$

Άρα για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α , με $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad \text{για κάθε } x, y \in (0, +\infty) \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Να βρείτε το $f(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} f(x) \right]^{x^2}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $x \left(x + \sin \frac{\pi}{x} \right) = x - 1$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

στ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\varepsilon \varphi x} \frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)} dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\sigma \varphi x} \frac{1}{t^2 f(t)} dt = 1$, για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

ζ) Αν g είναι μια συνεχής συνάρτηση στο \mathbf{R} και $a > 0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^a g(f(x)) \frac{\ln x}{x} dx$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι υπάρχει θετικός αριθμός ρ τέτοιος, ώστε $f(\rho) = 0$ (2)

Για $x = \rho$ και $y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\rho) = 0 - \frac{\rho^2 + 1}{\rho} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \rho^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow \rho^2 \neq -1$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Για $x = y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1) = f^2(1) - 2 \Leftrightarrow f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 2 \quad \text{ή} \quad f(1) = -1$$

Το γεγονός ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει θετικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε για οποιοδήποτε $M > 0$ να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x > x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f για κατάλληλο x , παίρνει θετική τιμή. Εξάλλου η f , ως συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x , διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε $f(1) = 2$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x) = 2f(x) - \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}$$

δ) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} f(x) \right]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = e^1 = e, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] \stackrel{+\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x^2} \right)'}{\left(\frac{1}{x^2} \right)'} = 1$$

ε) Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$x \left(x + \operatorname{csc} \frac{\pi}{x} \right) = x - 1 \Leftrightarrow x + \operatorname{csc} \frac{\pi}{x} = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 - \operatorname{csc} \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \operatorname{csc} \frac{\pi}{x} \quad (3)$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=2$

Επίσης για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $1 - \operatorname{csc} \frac{\pi}{x} \leq 2$

Επομένως η εξίσωση (3) θα έχει λύση αν και μόνο αν $\begin{cases} f(x) = 2 \\ 1 - \operatorname{csc} \frac{\pi}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ \operatorname{csc} \frac{\pi}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

στ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{e}^{\varphi x}} \frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)} dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\sigma \varphi x} \frac{1}{t^2 f(t)} dt, \quad x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$

Στο διάστημα αυτό, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{f\left(\frac{1}{\operatorname{e}^{\varphi x}}\right)} \cdot (\operatorname{e}^{\varphi x})' + \frac{1}{\sigma \varphi^2 x \cdot f(\sigma \varphi x)} \cdot (\sigma \varphi x)' = \\ &= \frac{1}{f\left(\frac{1}{\operatorname{e}^{\varphi x}}\right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{csc}^2 x} + \frac{1}{\sigma \varphi^2 x \cdot f(\sigma \varphi x)} \cdot \frac{-1}{\eta \mu^2 x} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{e}^{\varphi x}} + \operatorname{e}^{\varphi x}} \cdot (1 + \operatorname{e}^{\varphi^2 x}) - \frac{1}{\sigma \varphi^2 x \cdot \left(\frac{1}{\sigma \varphi x} + \sigma \varphi x \right)} \cdot (1 + \sigma \varphi^2 x) = \\ &= \frac{\operatorname{e}^{\varphi x}}{1 + \operatorname{e}^{\varphi^2 x}} \cdot (1 + \operatorname{e}^{\varphi^2 x}) - \frac{\sigma \varphi x}{\sigma \varphi^2 x \cdot (1 + \sigma \varphi^2 x)} \cdot (1 + \sigma \varphi^2 x) = \\ &= \operatorname{e}^{\varphi x} - \frac{1}{\sigma \varphi x} = \operatorname{e}^{\varphi x} - \operatorname{e}^{\varphi x} = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή η h είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$

Είναι:

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t + \frac{1}{t}} dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t^2 \left(t + \frac{1}{t}\right)} dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{t}{t^2 + 1} dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t(t^2 + 1)} dt = \\
 &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{t}{t^2 + 1} + \frac{1}{t(t^2 + 1)} \right) dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{t^2 + 1}{t(t^2 + 1)} dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \\
 &= \ln 1 - \ln \frac{1}{e} = \ln 1 - (\ln 1 - \ln e) = \ln e = 1
 \end{aligned}$$

Άρα $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

ζ) Είναι:

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^a g(f(x)) \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\frac{1}{a}}^a g\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx$$

Θέτουμε:

$$u = \frac{1}{x}, \text{ οπότε } x = \frac{1}{u} \text{ και } dx = -\frac{1}{u^2} du$$

Για $x = \frac{1}{a}$ είναι $u = a$ και για $x = a$ είναι $u = \frac{1}{a}$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{1}{a}}^a g\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int_a^{\frac{1}{a}} g\left(\frac{1}{u} + u\right) \ln \frac{1}{u} \cdot u \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \\
 &= \int_a^{\frac{1}{a}} g\left(\frac{1}{u} + u\right) \cdot (-\ln u) \cdot \left(-\frac{1}{u}\right) du = \int_a^{\frac{1}{a}} g\left(\frac{1}{u} + u\right) \frac{\ln u}{u} du =
 \end{aligned}$$

$$= - \int_{\frac{1}{a}}^a g\left(\frac{1}{u} + u\right) \frac{\ln u}{u} du = -I$$

Είναι $I = -I$, δηλαδή $2I = 0$, οπότε $I = 0$

ΘΕΜΑ 34ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \ln f(x) + 2xf'(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)

$$\bullet f(1) = e \quad (3)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι $2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3-x$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx$

ε) Να αποδείξετε ότι $e + \sqrt[3]{e} > 2\sqrt[5]{e}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) \ln f(x) + 2x f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln f(x) + \sqrt{x} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x} \ln f(x))' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln f(x) = c$$

Είναι:

$$f(1) = e, \text{ οπότε } c = 1$$

Άρα:

$$\sqrt{x} \ln f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \in (0, +\infty)$$

β) Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x_1}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f , θέτουμε $f(x) = y$ και λύνουμε ως προς x .

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = y \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ln y \\ y > 0 \\ \ln y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{\ln y} \\ y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\ln^2 y} \\ y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln^2 y} \\ y > 1 \end{cases}$$

Άρα

$$f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f''(x) = -\frac{-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot 2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{4x^3} = \frac{3\sqrt{x} + 1}{4x^3} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} > 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0=1$, είναι:

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Είναι:

$$f(1) = e \quad \text{και} \quad f'(1) = -\frac{e}{2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon) : y - e = -\frac{e}{2}(x - 1) \Rightarrow (\varepsilon) : y = -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2}$$

Η συνάρτηση είναι κυρτή, οπότε η εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής, είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f . Έτσι έχουμε:

$$f(x) \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq \frac{-x+3}{2} \Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3-x$$

δ) Με δεδομένο ότι $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$, έχουμε:

$$I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx$$

Αν θέσουμε $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx$, τότε

$$I_1 = \int_e^{e^2} x' \frac{1}{\ln^2 x} dx = \left[\frac{x}{\ln^2 x}\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \frac{-1}{\ln^3 x} \cdot \frac{2}{x} dx = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx$$

οπότε

$$I = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx = \frac{e^2}{4} - e$$

ε) Σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 25]$ και $[25, 49]$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 25)$ και $\xi_2 \in (25, 49)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(25) - f(1)}{24} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(49) - f(25)}{24}$$

και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(25) - f(1) < f(49) - f(25) \Rightarrow$$

$$2f(25) < f(1) + f(49) \Rightarrow 2e^{\frac{1}{5}} < e + e^{\frac{1}{7}} \Rightarrow e + \sqrt[7]{e} > 2\sqrt[5]{e}$$

ΘΕΜΑ 35ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f'(-x)f(x) = -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\bullet f(0) = 1 \quad (2)$$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} , το οποίο και να προσδιορίσετε.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

ε) Να μελετήσετε ως προς το πρόσημο τη συνάρτηση $h(x) = \int_1^x f(t) dt$

στ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(0) \cdot f(0) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f'(0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

β) Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ (3)

Για $x = x_0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(-x_0) \cdot f(x_0) = -x_0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} f(-x_0) \cdot 0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

δηλαδή $f(0) = 0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f(0) = 1$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \neq 0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο \mathbb{R} , άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} , και επειδή $f(0) = 1 > 0$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = \frac{-f'(-x) \cdot f(x) - f'(-x) \cdot f(-x)}{f^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Αν στη σχέση (1), όπου x θέσουμε το $-x$ έχουμε:

$$f'(x) \cdot f(-x) = x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Η σχέση (4) με βάση τις σχέσεις (1) και (5) γράφεται:

$$g'(x) = \frac{-(-x) - x}{f^2(x)} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο \mathbb{R} , οπότε $g(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι:

$$g(0) = c \Leftrightarrow \frac{f(0)}{f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1$$

οπότε:

$$g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)f'(x) = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \Rightarrow f^2(x) = x^2 + c$$

και επειδή $f(x) > 0$ θα είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + c}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι:

$$f(0) = \sqrt{0 + c} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{c} \quad \text{άρα} \quad c = 1$$

οπότε ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ε) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f με $h'(x) = f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Είναι:

$$h(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0 \quad (8)$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση

h

είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1» στο \mathbb{R} .

Επομένως:

- Για $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow h(x) < h(1) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- Για $x \in (1, +\infty) \Rightarrow h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0$

στ) Η συνάρτηση h είναι συνεχής και $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, είναι:

$$E = -\int_0^1 h(x) dx = -\int_0^1 x' h(x) dx = -[x h(x)]_0^1 + \int_0^1 x h'(x) dx =$$

$$= -h(1) + \int_0^1 x f(x) dx \stackrel{(8)}{=} \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx$$

Θέτουμε:

$$x^2+1 = u, \text{ οπότε } 2x dx = du$$

Όταν $x=0$ το $u=1$ και όταν $x=1$ το $u=2$

Επομένως έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 2x \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

ΘΕΜΑ 36ο :

Δίνεται η συνάρτηση $G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t+x} dt$, $x > 0$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης G

β) Αν $G(x) = \ln \frac{2x}{1+x}$, $x > 0$, τότε:

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση G ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το πρόσημο της G , για τις διάφορες τιμές του x

iii) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης G , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$

iv) Να αποδείξετε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \ln 2$

v) Να αποδείξετε ότι $\int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{x-e}{G(x)}$, για κάθε $x > e$

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} τρόπος:

Θέτουμε:

$$e^t+x = u, \text{ οπότε } e^t dt = du$$

Όταν $t=0$ το $u=x+1$ και όταν $t=\ln x$ το $u=2x$

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t+x} dt = \int_{x+1}^{2x} \frac{1}{u} du = [\ln u]_{x+1}^{2x} = \ln(2x) - \ln(x+1) = \ln \frac{2x}{x+1} \quad (1)$$

2^{ος} τρόπος:

$$G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t+x} dt = \int_0^{\ln x} \frac{(e^t+x)'}{e^t+x} dt = \int_0^{\ln x} [\ln(e^t+x)]' dt =$$

$$= \left[\ln(e^t + x) \right]_0^{\ln x} = \ln(e^{\ln x} + x) - \ln(e^0 + x) =$$

$$= \ln(2x) - \ln(x+1) = \ln \frac{2x}{x+1}, \quad x > 0$$

β) i) Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = \frac{1}{\frac{2x}{x+1}} \cdot \left(\frac{2x}{x+1} \right)' = \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} > 0 \quad (2)$$

Επομένως η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

ii) Είναι:

$$G(1) = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + x} dt = 0$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $G(x) = 0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1 - 1» στο $(0, +\infty)$

Επομένως:

- Για $0 < x < 1 \Rightarrow G(x) < G(1) \Leftrightarrow G(x) < 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow G(x) > G(1) \Leftrightarrow G(x) > 0$
- Για $x = 1 \Rightarrow G(x) = G(1) \Leftrightarrow G(x) = 0$

iii) Η συνάρτηση G είναι συνεχής και $G(x) < 0$ για κάθε $x \in [\lambda, 1] \subseteq [0, 1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_G , τον άξονα x και την ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$ είναι:

$$E = - \int_{\lambda}^1 G(x) dx = \int_{\lambda}^1 G(x) dx = \int_{\lambda}^1 x' G(x) dx = [x G(x)]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 x G'(x) dx \stackrel{(1),(2)}{=}$$

$$= \left[x \ln \frac{2x}{x+1} \right]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 x \frac{1}{x(x+1)} dx = \lambda \ln \frac{2\lambda}{\lambda+1} - \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \lambda \ln \frac{2\lambda}{\lambda+1} - [\ln|x+1|]_{\lambda}^1 = \lambda \ln \frac{2\lambda}{\lambda+1} - \ln(\lambda+1) + \ln 2, \quad 0 < \lambda < 1$$

iv) Είναι:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [\lambda \ln 2\lambda - \lambda \ln(\lambda+1) - \ln(\lambda+1) + \ln 2] =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [\lambda \ln 2\lambda - (\lambda+1) \ln(\lambda+1) + \ln 2] = \ln 2$$

διότι:

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\lambda \ln 2\lambda) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2\lambda}{\frac{1}{\lambda}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (-\lambda) = 0$

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [(\lambda+1) \ln(\lambda+1)] = 0$

v) Για $e < t \leq x \Rightarrow 0 < G(t) \leq G(x) \Rightarrow \frac{1}{G(t)} \geq \frac{1}{G(x)} \Rightarrow \frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \geq 0$, οπότε

$$\int_e^x \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \right) dt > 0 \quad (3), \text{ αφού } \frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \text{ δεν είναι παντού μηδέν.}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \int_e^x \frac{1}{G(x)} dt \Rightarrow \int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{1}{G(x)} (x - e) \Rightarrow \int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{x - e}{G(x)}, \quad x > e$$

ΘΕΜΑ 37ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ (1)
- $f(0) = 1$ (2)

Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = u$, με $u > 0$ είναι

$E(u) = u \int_0^u f(t) dt + \frac{1}{2} f(u)$ (3), τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \geq 0$

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^v}$ για τις διάφορες τιμές του $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 1$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx > \frac{1}{2^{\frac{4}{\sqrt{e}}}}$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$f(t) > 0 \text{ για κάθε } t \in [0, x], \text{ με } x > 0$$

οπότε

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = u$, με $u > 0$ είναι:

$$E(u) = \int_0^u \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\int_0^u \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx = u \int_0^u f(t) dt + \frac{1}{2} f(u) \quad (5)$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (5) έχουμε:

$$\int_0^u f(t) dt = \int_0^u f(t) dt + u f(u) + \frac{1}{2} f'(u) \Leftrightarrow$$

$$u f(u) + \frac{1}{2} f'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) = -2u f(u) \quad (1)$$

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = -2u \Leftrightarrow (\ln f(u))' = (-u^2)' \Leftrightarrow \ln f(u) = -u^2 + c \quad (6)$$

Είναι:

$$f(0) = 1, \text{ οπότε } c = 0$$

Άρα η σχέση (6) γράφεται:

$$\ln f(u) = -u^2 \Leftrightarrow f(u) = e^{-u^2}, \quad u > 0 \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (2) και (7) συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \geq 0$$

β) i) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $v=1$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^v} \stackrel{v=1}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0} (*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x f(t) dt = 0$$

(*) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, οπότε είναι και συνεχής, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) = 0$

- Αν $v \geq 2$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^v} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{v x^{v-1}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x)}{v(v-1)x^{v-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{v(v-1)x^{v-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2}}{v(v-1)x^{v-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x^2}}{v(v-1)} \cdot \frac{1}{x^{v-2}} \right) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2}}{v(v-1)} = \frac{1}{v(v-1)} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{v-2}} = \begin{cases} 1, & \text{αν } v=2 \\ +\infty, & \text{αν } v>2 \end{cases}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^v} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } v = 1 \\ \frac{1}{2} & , \text{αν } v = 2 \\ +\infty & , \text{αν } v > 2 \end{cases}$$

ii) Για $x > 0$ έχουμε:

$$x \leq t \leq x+1 \Rightarrow x^2 \leq t^2 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow -(x+1)^2 \leq -t^2 \leq -x^2 \Leftrightarrow e^{-(x+1)^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$$

οπότε:

$$\int_x^{x+1} e^{-(x+1)^2} dt \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{x+1} e^{-x^2} dt \Leftrightarrow$$

$$e^{-(x+1)^2} (x+1-x) \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \leq e^{-x^2} (x+1-x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e^{(x+1)^2}} \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \frac{1}{e^{x^2}}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{(x+1)^2}} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$

γ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

- $f'(x) = -2xe^{-x^2}$
- $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

Είναι:

$$\begin{aligned} \circ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \circ f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩	Σ.Κ.	∪

Είναι:

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ f''(x) < 0 \text{ στο } \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \\ f''(x) > 0 \text{ στο } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
- $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ και εκατέρωθεν του $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης f , άρα το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, δηλαδή το $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f

δ) Στο (γ) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$
 Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα και στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$,
 οπότε έχουμε:

$$0 < x < \frac{1}{2} \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(0) > f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

Άρα:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx > \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx > e^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} - 0\right) \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx > \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

ΘΕΜΑ 38ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_x^{x^2} e^{x-t} dt$, $x \in \mathbf{R}$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - e^{-x^2+x}$, $x \in \mathbf{R}$
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- Να αποδείξετε ότι:
 - $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
 - $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$
- Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu(2012x) \right)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2012 \cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right)$$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = (2x-1)f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x^2} e^{x-t} dt = - \int_x^{x^2} e^{x-t} (x-t)' dt = - \left[e^{x-t} \right]_x^{x^2} = \\ &= - \left(e^{x-x^2} - e^{x-x} \right) = -e^{-x^2+x} + 1 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{x-t} dt = \int_x^{x^2} e^x e^{-t} dt = e^x \int_x^{x^2} e^{-t} dt = e^x \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt - \int_0^x e^{-t} dt \right)$$

Η συνάρτηση e^{-t} είναι συνεχής στο \mathbb{R} , επομένως οι συναρτήσεις $\int_0^{x^2} e^{-t} dt$ και $\int_0^x e^{-t} dt$ είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} . Επίσης η e^x είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , άρα και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt - \int_0^x e^{-t} dt \right) + e^x \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt - \int_0^x e^{-t} dt \right)' = \\ &= e^x \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt - \int_0^x e^{-t} dt \right) + e^x \left(e^{-x^2} (x^2)' - e^{-x} \right) = \\ &= f(x) + e^x (2xe^{-x^2} - e^{-x}) = f(x) + 2xe^{-x^2+x} - 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) + 2xe^{-x^2+x} - 1 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 2xe^{-x^2+x} - 1 \Leftrightarrow \\ f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} &= 2xe^{-x^2+x} e^{-x} - e^{-x} \Leftrightarrow \\ f'(x)e^{-x} + (e^{-x})'f(x) &= 2xe^{-x^2} - e^{-x} \Leftrightarrow \\ (f(x)e^{-x})' &= (-e^{-x^2} + e^{-x})' \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x)e^{-x} = -e^{-x^2} + e^{-x} + c \quad (1)$$

Για $x = 0$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε $f(0) = \int_0^0 e^{0-t} dt = 0$ και από τη σχέση (1) έχουμε $c = 0$,
 οπότε:

$$f(x)e^{-x} = -e^{-x^2} + e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = -e^{-x^2+x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο:

$$f'(x) = -e^{-x^2+x}(-x^2+x)' = (2x-1)e^{-x^2+x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x^2+x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x^2+x} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$1 - \sqrt[4]{e}$	

ελάχιστο

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, +\infty)$. Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$ με ελάχιστη

$$\text{τιμή } f\left(\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} + 1 = -e^{\frac{1}{4}} + 1 = 1 - \sqrt[4]{e}$$

γ) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2+x}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x^2+x} + 1) = 0 + 1 = 1 \quad (2)$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $+\infty$

• Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2+x}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x^2+x} + 1) = 0 + 1 = 1$ (3)

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

δ) Το πρόσημο της συνάρτησης $-x^2 + x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x^2 + x$	-	+	0	-

i) Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι:

$$-x^2 + x < 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} < e^0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} < 1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x} > -1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x} + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

ii) Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι:

$$-x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} \geq 1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x} \leq -1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

ε) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\left| \frac{\eta\mu(2012x)}{x} \right| = \frac{|\eta\mu(2012x)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left| \frac{\eta\mu(2012x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu(2012x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(2012x)}{x} = 0$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu(2012x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \frac{\eta\mu(2012x)}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

ii) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq -\frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Από τη σχέση (3) έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2012 \cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2012 \cdot 1 + 0 = 2012$$

στ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Επίσης για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subseteq [0, 1]$ είναι $2x - 1 \geq 0$ και $f(x) \leq 0$, οπότε $g(x) = (2x - 1)f(x) \leq 0$. Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\frac{1}{2}}^1 -g(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 -(2x - 1)f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - 2x)(-e^{-x^2+x} + 1) dx = \\ &= -\int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - 2x) \cdot e^{-x^2+x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - 2x) dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{-x^2+x})' dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2)' dx = \\ &= -\left[e^{-x^2+x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[x - x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\left(1 - e^{\frac{1}{4}} \right) + \left(0 - \frac{1}{4} \right) = e^{\frac{1}{4}} - \frac{5}{4} = \sqrt[4]{e} - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 39ο :

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet (f''(x) + 1) \sigma\upsilon\upsilon x - f'(x) \int_{-x}^x \frac{\sigma\upsilon\upsilon u}{1 + e^u} du = 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$\bullet f''(0) + 1 = f'(0) = f(0) = 0 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\int_{-x}^x \frac{\sigma\upsilon\upsilon u}{1 + e^u} du = \eta\mu x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ε) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\int_{-x}^x \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du = \int_{-x}^0 \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du + \int_0^x \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du \quad (3)$$

Είναι:

$$I_1 = \int_{-x}^0 \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du$$

Θέτουμε:

$$u = -t, \text{ οπότε } du = -dt$$

Για $u = -x$ είναι $t = x$ και για $u = 0$ είναι $t = 0$

Έχουμε:

$$I_1 = \int_x^0 \frac{\sigma\upsilon\nu(-t)}{1+e^{-t}} (-dt) = - \int_x^0 \frac{e^t \sigma\upsilon\nu t}{e^t(1+e^{-t})} dt = \int_0^x \frac{e^t \sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt = \int_0^x \frac{e^u \sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du &= \int_0^x \frac{e^u \sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du + \int_{-x}^0 \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du = \int_0^x \left(\frac{e^u \sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} + \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} \right) du = \\ &= \int_0^x \frac{(e^u + 1) \sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du = \int_0^x \sigma\upsilon\nu u du = [\eta\mu u]_0^x = \eta\mu x - \eta\mu 0 = \eta\mu x \quad (5) \end{aligned}$$

β) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$(f''(x)+1)\sigma\upsilon\nu x - f'(x) \int_{-x}^x \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du = 0 \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} (f''(x)+1)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (f'(x)\sigma\upsilon\nu x)' = (-\eta\mu x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x + c_1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f'(0)\sigma\upsilon\nu 0 = -\eta\mu 0 + c_1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 \cdot 1 = 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x)\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} (\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (\ln(\sigma\upsilon\nu x))' \Leftrightarrow f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x) + c_2, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \ln(\sigma\upsilon\nu 0) + c_2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 = \ln 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Άρα:

$$f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

γ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ln(\sigma\upsilon\nu x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} (\sigma\upsilon\nu x)' = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\epsilon\phi x$$

$$f''(x) = (-\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

δ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = \beta$, τότε ισχύει η ισότητα.
- Αν $\alpha < \beta$, τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, οπότε θα υπάρχουν:

$$\bullet \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\bullet \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, οπότε ισχύει:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta < \frac{\pi}{2} \stackrel{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \stackrel{\beta-\alpha > 0}{\Rightarrow}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta) \Rightarrow$$

$$2\ln\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\sin\alpha) + \ln(\sin\beta) \Rightarrow \ln\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\sin\alpha\sin\beta) \Rightarrow$$

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} > \sin\alpha\sin\beta$$

- Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha$, τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε δύο διαστήματα, στα $\left[\beta, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\right]$, οπότε με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στην αποδεικτέα σχέση.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει η σχέση:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \sin\alpha\sin\beta, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ε) Για x « κοντά στο 0 » έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(\eta\mu^2 x)'} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2\eta\mu x \cos x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x) - f'(0)}{x} \cdot \frac{x}{2\eta\mu x \cos x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cos x} \right) = f''(0) \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \cos 0} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$