# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

## ΘΕΜΑ 14ο :

**Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{|1-\ell nx|}{x}$ , $x>0$**

**α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**β) Αν η τετμημένη του σημείου $M\big(x\,,f(x)\big)$ μεταβάλλεται με ρυθμό 1 μ/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του τριγώνου ΑΟΒ, όπου $A(x,0)$, $O(0,0)$, $B\big(0,f(x)\big)$, τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία είναι $x(t_0)=4$**

**γ) Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση $(1,1)$, τότε να αποδείξετε ότι:**

**i) $x(t)=t+1$**

**ii) Η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e-1,+\infty)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για $0<x<e$ έχουμε:

$$0<x<e \overset{\ell n\uparrow}{\Rightarrow} \ell nx<\ell ne \Rightarrow \ell nx<1 \Rightarrow 1-\ell nx>0 \text{ , οπότε } |1-\ell nx|=1-\ell nx$$

Για $x\ge e$ έχουμε:

$$x\ge e \overset{\ell n\uparrow}{\Rightarrow} \ell nx\ge \ell ne \Rightarrow \ell nx\ge 1 \Rightarrow 1-\ell nx\le 0 \text{ , οπότε } |1-\ell nx|=\ell nx-1$$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\ell nx}{x}, & 0<x<e\\[2mm] \dfrac{\ell nx-1}{x}, & x\ge e\end{cases}$$

Για $0<x<e$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{1-\ell nx}{x}\right)'=\frac{(1-\ell nx)'\cdot x-(1-\ell nx)\cdot(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x-(1-\ell nx)\cdot 1}{x^2}=\frac{\ell nx-2}{x^2}<0$$

Για $x > e$ η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(\frac{\ell nx - 1}{x}\right)' = \frac{(\ell nx-1)'\cdot x - (\ell nx - 1)\cdot (x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ell nx - 1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2-\ell nx}{x^2}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\ell nx}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ell nx = 0 \Leftrightarrow \ell nx = 2 \Leftrightarrow x = e^2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\ell nx}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 2 - \ell nx < 0 \Leftrightarrow \ell nx > 2 \Leftrightarrow x > e^2$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | $e^{-2}$ | ↘ | |
| | | | ο.ε. | | τ.μ. | | |

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ell nx}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1-\ell nx)\cdot\dfrac{1}{x}\right] = +\infty$ , γιατί
    - $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\ell nx) = +\infty$
    - $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ell nx - 1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$
- $f(e) = \dfrac{\ell ne - 1}{e} = \dfrac{1-1}{e} = 0$
- $f(e^2) = \dfrac{\ell ne^2 - 1}{e^2} = \dfrac{2\ell ne - 1}{e^2} = \dfrac{2\cdot 1 - 1}{e^2} = \dfrac{1}{e^2} = e^{-2}$

Επίσης η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Η συνάρτηση $|1-\ell nx|$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως απόλυτη τιμή της συνάρτησης $1-\ell nx$, που είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών και η συνάρτηση $x$ είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, οπότε έχουμε:

- Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$
- Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [e, e^2]$

- Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = \left[e^2, +\infty\right)$
- Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = e$ με ελάχιστη τιμή $f(e) = 0$
- Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = e^2$ με τιμή $f(e^2) = e^{-2}$

**β)** Το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΒ είναι:

$$E = \frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot|x|\cdot|f(x)| = \frac{1}{2}\cdot\left|x\cdot\frac{1-\ell nx}{x}\right| = \frac{|1-\ell nx|}{2}$$

Άρα:

$$E(t) = \frac{|1-\ell n\,x(t)|}{2}$$

Επειδή $x(t_0) = 4 > e$ το $1-\ell nx(t_0) < 0$

Άρα για $x(t) > e$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{\ell nx(t)-1}{2} \quad \text{και} \quad E'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(t)}\cdot x'(t)$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t_0$ με $x(t_0) = 4$ είναι:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(t_0)}\cdot x'(t_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{8}\ \text{τ.μ.}/\text{sec}$$

**γ) i)** Για $t \geq 0$ έχουμε:

$$x'(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = t + c$$

Για $t = 0$ είναι:

$$x(0) = 0 + c \overset{x(0)=1}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Επομένως:

$$x(t) = t + 1 \quad , \quad t \geq 0$$

**ii)** Για $t \geq e-1$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{|1-\ell n(t+1)|}{2} = \frac{\ell n(t+1)-1}{2}$$

Για $t > e-1$ έχουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2(t+1)} > 0 \qquad \text{και} \qquad E''(t) = -\frac{1}{2(t+1)^2} < 0$$

Η συνάρτηση $E(t)$ είναι συνεχής στο $\left[e-1, +\infty\right)$ και $E''(t) < 0$ για κάθε $t \in (e-1, +\infty)$

άρα η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $\left[e-1,+\infty\right)$

## ΘΕΜΑ 15ο :

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ , με**

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & , \; x\in(0\,,1] \\ e^{x-1}-1 & , \; x\in(1\,,+\infty)\end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt$$

**α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(1)=1$**

**β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g$**

**γ) Να υπολογίσετε τα όρια:**

**i) $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ και ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$**

**δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$**

**ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$**

**στ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g$ είναι κοίλη στο $\left(0\,,\frac{1}{e}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{1}{e}\,,+\infty\right)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** • Για $x\in(0\,,1)$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x\ln x-0}{x-1}=\dfrac{x\ln x}{x-1}$ , οπότε

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{(x\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to1^-}(\ln x+1)=1$$

• Για $x\in(1\,,+\infty)$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{e^{x-1}-1-0}{x-1}=\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$ , οπότε

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{(e^{x-1}-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x-1}(x-1)'}{1}=\lim_{x\to1^+}e^{x-1}=e^{o}=1$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(1)=1$

**β)** • Για $x\in(0\,,1]$ είναι:

$$g(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{x} t\ln t\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left(\frac{t^2}{2}\right)'\ln t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{x}-\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{t^2}{2}\left(\ln t\right)'dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{8}\ln\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{8}\ln2-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x}t\,dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{8}\ln2-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x}=\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{8}\ln2-\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2$$

- Για $x\in(1,+\infty)$ είναι:

$$g(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt+\int_{1}^{x} f(t)\,dt=g(1)+\int_{1}^{x}\left(e^{t-1}-1\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2+\int_{1}^{x} e^{t-1}(t-1)'\,dt-\int_{1}^{x}1\,dt=$$

$$=-\frac{3}{16}+\frac{1}{8}\ln 2+\left[\,e^{t-1}\,\right]_{1}^{x}-1\cdot(x-1)=$$

$$=-\frac{3}{16}+\frac{1}{8}\ln 2+e^{x-1}-e^{0}-x+1=e^{x-1}-x-\frac{3}{16}+\frac{1}{8}\ln 2$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8}\ln 2\ , & x\in(0\,,1]\\[2mm] e^{x-1}-x-\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{8}\ln 2\ , & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

**γ)** **i)** Για $x\in(0,1)$ είναι:

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2\right)=0-0+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2\ ,\ \text{γιατί}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{2x^{-2}}\ \underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\ \lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{(2x^{-2})'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-4x^{-3}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{4}x^2\right)=0$$

**ii)** Για $x\in(1,+\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-x-\frac{3}{16}+\frac{1}{8}\ln 2\right)=+\infty\ ,\ \text{γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-x\right)\overset{+\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x-1}}{x}-1\right)\right]=+\infty,\ \text{αφού}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-1}}{x}\ \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(e^{x-1})'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x-1}(x-1)'}{1}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{e}\cdot e^{x}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x-1}}{x}-1\right)=+\infty$

**δ)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, αφού είναι συνεχής:

- στο $(0,1)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- στο $(1,+\infty)$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (η $e^{x-1}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών)
- στο σημείο $x_o=1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό από (α) ερώτημα.

Επομένως η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\left(\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt\right)'=f(x)\ ,\quad x>0$$

Παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)=x\ln x<0$
- Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f(x)=e^{x-1}-1>0$
- Για $x=1$ είναι $f(1)=1\cdot\ln 1=0$

Άρα

- $g'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$
- $g'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$
- $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $g$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $g(1)$<br>ελάχιστο | ↗ | |

Είναι:

$$g(1)=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2=\frac{1}{8}\ln 2-\frac{3}{16}=\frac{\ln 4-3}{16}=\frac{1}{16}\ln\frac{4}{e^3}<0\text{, αφού } 0<\frac{4}{e^3}<1$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\,1]$
- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,\,+\infty)$
- Η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=\dfrac{1}{16}\ln\dfrac{4}{e^3}$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\,1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1)=\left[g(1)\,,\,\lim_{x\to 0^+}g(x)\right)=\left[\frac{1}{16}\ln\frac{4}{e^3}\ ,\ \frac{1}{16}+\frac{1}{8}\ln 2\right)$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2) = \left[ g(1) , \lim_{x \to +\infty} g(x) \right) = \left[ \frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3} , +\infty \right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = \left[ \frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3} , +\infty \right)$$

**ε)** Είναι:

- $g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt = 0$, άρα ο αριθμός $\frac{1}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(0 , 1]$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό
- Το $0 \in g(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\rho \in (1, +\infty)$, $(\rho \neq 1$, αφού $g(1) \neq 0)$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$

  Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0 , +\infty)$

**στ)** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αφού είναι παραγωγίσιμη:

- στο $(0 , 1)$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

- στο $(1, +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων ( η $e^{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων), με

$$f'(x) = (e^{x-1} - 1)' = e^{x-1} (x - 1)' = e^{x-1}$$

- στο σημείο $x_0 = 1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό από (α) ερώτημα, με $f'(1) = 1$

Η συνάρτηση $g'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0 , +\infty)$, αφού η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0 , +\infty)$, με $g''(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Επομένως

$$g''(x) = f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln x , & x \in (0 , 1] \\ e^{x-1} , & x \in (1 , +\infty) \end{cases}$$

Είναι:

- $\begin{cases} g''(x) = 0 \\ x \in (0 , 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \ln x = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = e^{-1}$

- $\begin{cases} g''(x) > 0 \\ x \in (0 , 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \ln x > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x > -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > e^{-1} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow e^{-1} < x < 1$

- $\begin{cases} g''(x)=0 \\ x\in(1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1}=0 \\ x>1 \end{cases}$, αδύνατη εξίσωση

- $\begin{cases} g''(x)>0 \\ x\in(1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1}>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$

Το πρόσημο της $g''(x)$ καθώς και η κυρτότητα της $g$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\cap$ | | | $\cup$ | | |

Είναι $\begin{cases} g \text{ συνεχής στο } \left(0\,,\,\frac{1}{e}\right] \\ g''(x)<0 \text{ στο } \left(0\,,\,\frac{1}{e}\right) \end{cases}$

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0\,,\,\frac{1}{e}\right]$

Είναι:

- $g''(x)>0$ στο $\left(\frac{1}{e}\,,\,1\right)\cup(1\,,\,+\infty)$ και
- η $C_g$ δέχεται μη κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x_0=1$, αφού η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}\,,\,+\infty\right)$

## ΘΕΜΑ 16ο :

**Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $\left(f'(x)\right)^2-2f'(x)+\dfrac{1}{x^2+1}=0$, **για κάθε $x\in R$** **(1)**
- $f'(-1)<1<f'(1)$ **(2)**
- $f(0)=1$ **(3)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ , $x\in R$**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.**

**δ) Αν $h(x)=\ln f(x)$ , $x\in R$ , τότε :**

**i) Να αποδείξετε ότι $h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ , $x\in R$**

**ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$, τον**

**άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$**

**iii) Να αποδείξετε ότι $h(x) > \dfrac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\left(f'(x)\right)^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2 - 2f'(x) + 1 = 1 - \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x) - 1\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow g^2(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad (4), \text{ όπου } g(x) = f'(x) - 1,\ x \in R$$

- Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$.

Για $x = -1$ είναι $g(-1) = f'(-1) - 1 \overset{(2)}{<} 0$ οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Αφού $g(x) < 0$, για κάθε $(-\infty, 0)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} g(x) = -\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$

- Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Για $x = 1$ είναι $g(1) = f'(1) - 1 \overset{(2)}{>} 0$ οπότε $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Αφού $g(x) > 0$, για κάθε $(0, +\infty)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left(f'(0)\right)^2 - 2f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(f'(0) - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

Άρα $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ , για κάθε $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + c$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0 + \sqrt{0+1} + c \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c = 0$. Άρα $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x \in R$

**β)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ (5)

**γ)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \overset{(5)}{>} 0$$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επίσης η συνάρτηση $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο R , με:

$$f''(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)'\sqrt{x^2+1} - x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

Είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο R

**δ) i)** Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη στο R, με

$$h'(x) = \left(\ln f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ x \in R$$

**ii)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο R και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι:

$$E = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = I_1 + I_2$$

Είναι:

- $I_1 = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

- $I_2 = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^1 (x)'\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx =$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx + \int_0^1 h'(x)\,dx =$$

$$= \sqrt{2} - I_2 + \left[h(x)\right]_0^1 = \sqrt{2} - I_2 + h(1) - h(0) = \sqrt{2} - I_2 + \ln f(1) - \ln f(0) =$$

$$= \sqrt{2} - I_2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \sqrt{2} - I_2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Είναι:

$$I_2 = \sqrt{2} - I_2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 2I_2 = \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right), \text{ οπότε } I_2 = \frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$$

Επομένως:

$$E = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{1+\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} \text{ τ.μ}$$

**ii)** Θεωρώ συνάρτηση $\Phi(x) = xh(x) - f(x) + x + 1$, $x \in [0, +\infty)$

Η συνάρτηση $\Phi$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, με

$$\Phi'(x) = (x)'h(x) + xh'(x) - f'(x) + 1 = h(x) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 1 =$$

$$= h(x) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 1 = h(x) \qquad (6)$$

Είναι $h'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επομένως, για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) \Rightarrow h(x) > \ln f(0) \Rightarrow h(x) > \ln 1 \Rightarrow h(x) > 0$ (7)

Από τις σχέσεις (6) και (7) συμπεραίνουμε ότι $\Phi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Είναι:

$$\begin{cases} \Phi \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \\ \Phi'(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση $\Phi$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\Phi(x) > \Phi(0) \Rightarrow xh(x) - f(x) + x + 1 > 0\cdot h(0) - f(0) + 0 + 1 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$x h(x) - f(x) + x + 1 > 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$$

Δηλαδή $h(x) > \dfrac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0\,,\,+\infty)$

## ΘΕΜΑ 17ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$4f''(x)\big(f(x)\big)^3 = -1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$** **(1)**
- **$f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$** **(2)**
- **$2f'(1) = f(1) = 1$** **(3)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$**

**β) Να αποδείξετε ότι $\big(2f(x)f'(x)\big)^2 = 1$ για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$**

**γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.**

**δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$ , $x \geq 0$, τότε:**

**i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(\alpha\,,f(\alpha))$, με $\alpha > 0$.**

**ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$.**

**iii) Αν ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.**

**iv) Να βρείτε $\lambda \in (-\alpha\,,\alpha)$ τέτοιο, ώστε η ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.**

## ΛΥΣΗ

**α)** Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = 0$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$4f''(x_o)\big(f(x_o)\big)^3 = -1 \Rightarrow 4f''(x_o)\cdot 0 = -1 \Rightarrow 0 = -1\,,$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ (4)

**β)** Για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ είναι:

$$4f''(x)\big(f(x)\big)^3 = -1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 4f''(x)\big(f(x)\big)^3 f'(x) = -f'(x) \Leftrightarrow$$

$$4f''(x)f'(x) = -\big(f(x)\big)^{-3} f'(x) \Leftrightarrow \Big[2\big(f'(x)\big)^2\Big]' = \left[-\frac{\big(f(x)\big)^{-2}}{-2}\right]' \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$2\big(f'(x)\big)^2 = \frac{1}{2\big(f(x)\big)^2} + c \qquad (5)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (5) έχουμε:

$$2\left(f'(1)\right)^2 = \frac{1}{2\left(f(1)\right)^2} + c \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = 0 \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε:

$$2\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{2\left(f(x)\right)^2} \Leftrightarrow 4\left(f(x)\right)^2\left(f'(x)\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(2f(x)f'(x)\right)^2 = 1 \qquad (7)$$

**γ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = 2f(x)f'(x),\ x \in \left(0, +\infty\right)$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$$g^2(x) = 1,\ \text{για κάθε } x \in \left(0, +\infty\right)$$

Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Από τις σχέσεις (2) και (4), έχουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \left(0,+\infty\right)$

Άρα η $g$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(0,+\infty\right)$ και επειδή $g(1) = 2f(1)f'(1) = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1 > 0$

συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,+\infty\right)$

Επομένως για κάθε $x \in \left(0,+\infty\right)$ έχουμε:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(f^2(x)\right)' = (x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x + c_1$$

Για $x = 1$ έχουμε:

$$f^2(1) = 1 + c_1 \Leftrightarrow 1 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα είναι:

$$f^2(x) = x,\quad x \in \left(0,+\infty\right)$$

Η $f$ είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$ και από τη σχέση (4) έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \left(0,+\infty\right)$, άρα η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(0,+\infty\right)$ και επειδή $f(1) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,+\infty\right)$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{x},\quad x \in \left(0,+\infty\right)$$

Επειδή η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και στο $x_o = 0$ ισχύει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$

Άρα είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in \left(0,+\infty\right) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x},\ x \in \left[0, +\infty\right)$$

**δ) i)** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο της $M\left(\alpha, f(\alpha)\right)$, με $\alpha > 0$ είναι:

$$\varepsilon : y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Είναι:

$$f(\alpha)=\sqrt{\alpha} \quad \text{και} \quad f'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Επομένως:

$$\varepsilon : y-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(x-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon : x-2\sqrt{\alpha}\cdot y+\alpha=0 \qquad (7)$$

**ii)** Το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$, την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$ είναι:

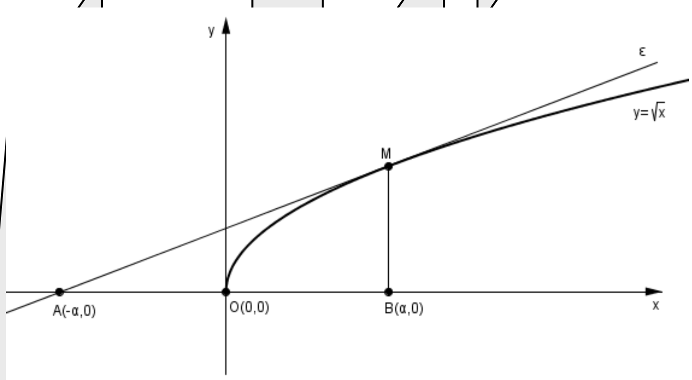
$$E=(AMB)-\int_0^{\alpha} f(x)dx=\frac{1}{2}(AB)(BM)-\int_0^{\alpha}\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{2}(2\alpha)\sqrt{\alpha}-\int_0^{\alpha}x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\alpha}=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\left(\frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}-0\right)=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}=\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$$

Δηλαδή $E=\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$ τ.μ.




**iii)** Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή $t$ είναι:

- $x_M=\alpha(t)$ (τετμημένη του σημείου Μ) και
- $E=E(t)$ (εμβαδόν του χωρίου Ω)

Τη χρονική στιγμή $t_o$ είναι:

- $x_M=\alpha(t_o)=4$ μονάδες και
- $\alpha'(t_o)=2$ μονάδες / sec ,

Είναι:

$$E(t)=\frac{1}{3}\left(\alpha(t)\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{και} \quad E'(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(\alpha(t)\right)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t)=\frac{1}{2}\left(\alpha(t)\right)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t)$$

Τη χρονική στιγμή $t_o$ είναι:

$$E'(t_o)=\frac{1}{2}\left(\alpha(t_o)\right)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t_o)=\frac{1}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot 2=2 \text{ τετραγωνικές μονάδες / sec}$$

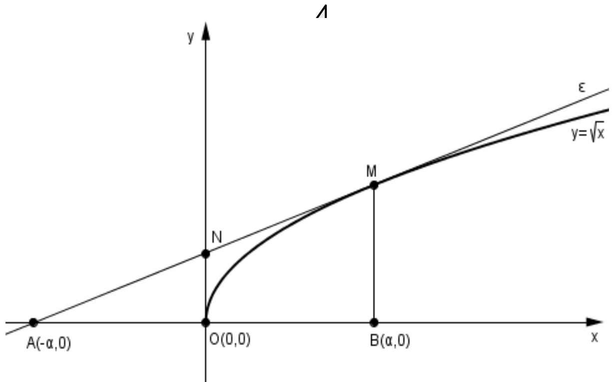
**iv)** Έστω N το σημείο τομής της εφαπτομένης (ε) και του άξονα y΄y.

Για $x=0$ από τη σχέση (7) έχουμε:

$y=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$, οπότε $N\left(0\,,\,\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΝ είναι:

$$E_1=(OAN)=\frac{1}{2}(OA)(ON)=\frac{1}{2}\alpha\frac{\sqrt{\alpha}}{2}=\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\alpha}$$



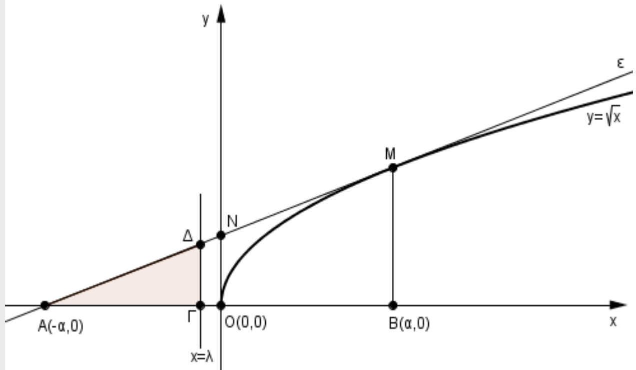

Από την προφανή σχέση $\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\alpha}>\frac{1}{6}\alpha\sqrt{\alpha}$ προκύπτει ότι $E_1>\frac{E}{2}$, οπότε η ζητούμενη ευθεία, που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, θα έχει εξίσωση $x=\lambda$ με $\lambda\in(-\alpha\,,\,0)$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\Gamma(\lambda\,,\,0)$ και την ευθεία ε στο σημείο Δ.

Για $x=\lambda$ από τη σχέση (7) έχουμε

$y=\frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$,

οπότε $\Delta\left(\lambda\,,\,\frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right)$




Είναι:

$$E_2=(A\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(A\Gamma)(\Gamma\Delta)=$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda+\alpha)\frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}$$

Έχουμε:

$$E_2=\frac{E}{2}\Leftrightarrow\frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow\frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{6}\alpha\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow$$

$$(\lambda+\alpha)^2=\frac{2}{3}\alpha^2\Leftrightarrow|\lambda+\alpha|=\frac{\sqrt{6}}{3}|\alpha|\underset{\alpha>0}{\overset{\lambda+\alpha>0}{\Leftrightarrow}}\lambda+\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha\Leftrightarrow$$

$$\lambda=\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha-\alpha\Leftrightarrow\lambda=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-1\right)\alpha\Leftrightarrow\lambda=\frac{\sqrt{6}-3}{3}\alpha$$

## ΘΕΜΑ 18ο :

**Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:**

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$, **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$ **(1)**
- $g^2(x)=g'(x)>0$ , **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$ **(2)**
- $f(1)=2$
- $g(1)=-1$

**α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g**

**β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις $C_f$ , $C_g$ και τις ευθείες με $x=1$ και $x=2$**

**γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{-\frac{1}{g(x)}}$**

**δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2e^{x-1}}{f'(x)-1}+\dfrac{2\ln x+3}{g'(x)+1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1\,,\,e)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (3)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$, οπότε

$$g^2(x)=g'(x)\Rightarrow\frac{g'(x)}{g^2(x)}=1\Rightarrow\left(-\frac{1}{g(x)}\right)'=(x)'\Rightarrow-\frac{1}{g(x)}=x+c_1$$

Είναι:

$$g(1)=-1,\ \text{οπότε}\ c_1=0$$

Άρα:

$$-\frac{1}{g(x)}=x\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{x}\ ,\ x\in(0\,,+\infty) \qquad (4)$$

Η σχέση (3) λόγω των σχέσεων (2) και (4) γράφεται:

$$f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=f'(x)\Rightarrow f'(x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}f(x)=f'(x)\Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=-\frac{1}{x^2}f(x)\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'f(x)\Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{1+\frac{1}{x}}\right)'=0\Rightarrow\frac{f(x)}{1+\frac{1}{x}}=c_2\Rightarrow f(x)=c_2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ ,\ x\in(0\,,+\infty)$$

Είναι:

$$f(1)=2,\ \text{οπότε}\ c_2=1$$

Άρα:

$$f(x)=1+\frac{1}{x}\ ,\ x\in(0\,,+\infty)$$

**β)** Στο διάστημα $[1\,,\,2]$ ισχύει:

$$f(x)-g(x)=1+\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}>0\,,$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx = [x + 2\ln x]_1^2 = 1 + 2\ln 2$$

**γ)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = -\frac{1}{x}$$

οπότε το ζητούμενο όριο λαμβάνει τη μορφή $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ και επειδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)}$, αρκεί να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$

Είναι:

$$\lim_{x \to +\infty}\left[x\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] \overset{+\infty\cdot 0}{=} \lim_{x \to +\infty}\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to +\infty}\frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1, \text{ οπότε } \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

**δ)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{1}{x^2},$$

οπότε

$$f'(x) - 1 = -[g'(x) + 1] = -\frac{1}{x^2} - 1 \neq 0$$

και η δοθείσα εξίσωση στο διάστημα $[1, e]$ είναι ισοδύναμη με την $2e^{x-1} - 2\ln x - 3 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = 2e^{x-1} - 2\ln x - 3\ ,\ x \in [1, e]$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

- Η συνάρτηση $h$ είναι συνεχής στο $[1, e]$, ως άθροισμα συνεχών
- $h(1) = 2 - 3 = -1 < 0$ και $h(e) = 2e^{e-1} - 5 = 2\left(e^{e-1} - \frac{5}{2}\right) > 0$, γιατί $e > \frac{5}{2}$ και $e - 1 > 1$,

  οπότε $h(1)\cdot h(e) < 0$

Άρα η συνάρτηση $h$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Για κάθε $x \in (1, e)$ έχουμε:

$$h'(x) = 2\left(e^{x-1} - \frac{1}{x}\right) > 0$$

αφού για $1 < x < e$ είναι:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \dfrac{1}{x}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1}>1 \\ -\dfrac{1}{x}>-1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x-1}-\frac{1}{x}>0$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1\,,e)$

## ΘΕΜΑ 19ο :

**Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $f''(x)-f(x)=(4x+2)e^x$, **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $f'(0)=f(0)=0$ **(2)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2e^x$ , $x\in\mathbb{R}$**

**β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f**

**γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1\,,\xi_2\in(-1\,,1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)=3$**

**ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f''(x)-f(x)=(4x+2)e^x \Leftrightarrow f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)=(4x+2)e^x \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$f''(x)e^{-x}-f'(x)e^{-x}+f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=4x+2 \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)\right)'e^{-x}+f'(x)(e^{-x})'+f'(x)e^{-x}+f(x)(e^{-x})'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)e^{-x}\right)'+\left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}\right)'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x+c_1 \quad (3)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f'(0)e^0+f(0)e^0=2\cdot0+2\cdot0+c_1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_1=0$$

Άρα η σχέση (3) γράφεται:

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x \overset{\cdot e^{2x}}{\Leftrightarrow} f'(x)e^x+f(x)e^x=2x^2e^{2x}+2xe^{2x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^x+f(x)(e^x)'=x^2(e^{2x})'+(x^2)'e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)'=(x^2e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^x=x^2e^{2x}+c_2 \quad (4)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0)e^0 = 0\cdot e^0 + c_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$$

Άρα η σχέση (4) γράφεται:

$$f(x)e^x = x^2e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = x^2e^x \ , \ \ x \in R$$

**β)** • Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Για $x \in (0\ ,+\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}(xe^x) = +\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ δεν έχει ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \beta$ στο $+\infty$

• Για $x \in (-\infty\ ,0)$ είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2e^x) \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}} \underset{D.LH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{-x})'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} \underset{D.LH}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}(2e^x) = 2\cdot 0 = 0 \qquad (5)$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$ στο $-\infty$

**γ)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f\,'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$$

Είναι:

○ $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$

○ $f\,'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 0$

Το πρόσημο της $f\,'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f\,'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $4e^{-2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |
| | | | τ. μ. | | ο. ε. | | |

Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[0\ ,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2\ ,0]$

Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ με τιμή $f(-2) = 4e^{-2}$ και ολικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$ με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, (σχέση (5))

**δ)** Η συνάρτηση $f\,'$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $[-1\ ,\ 0]$ και $[0\ ,\ 1]$, οπότε θα υπάρχουν:

- $\xi_1 \in (-1\ ,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_1) = \dfrac{f'(0) - f'(-1)}{0-(-1)} = \dfrac{0-(-1)\cdot 1\cdot e^{-1}}{1} = e^{-1}$
- $\xi_2 \in (0\ ,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_2) = \dfrac{f'(1) - f'(0)}{1-0} = \dfrac{1\cdot 3\cdot e - 0}{1} = 3e$

Άρα έχουμε:

$$f''(\xi_1)f''(\xi_2) = e^{-1}\cdot 3e \Leftrightarrow f''(\xi_1)f''(\xi_2) = 3$$

**ε)** Για $t \in [x-1\ ,\ x]$ με $x < -2$ έχουμε:

$$x-1 \le t \le x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x-1) \le f(t) \le f(x)$$

Επομένως:

$$\int_{x-1}^{x} f(x-1)dt \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le \int_{x-1}^{x} f(x)dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1)\int_{x-1}^{x} 1dt \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x)\int_{x-1}^{x} 1dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1)\cdot\big(x-(x-1)\big) \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x)\cdot\big(x-(x-1)\big) \Leftrightarrow$$

$$f(x-1) \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x)$$

Για $x \in (-\infty\ ,\ 0)$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ , (σχέση (5))
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x-1) \overset{x-1=t}{=} \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$ , (σχέση (5))

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x} f(t)dt = 0$

## ΘΕΜΑ 20ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:**

$$\int_1^x f(t)dt + x\ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2\ln 2 = \int_1^x\left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1}dt\right)du\ ,\quad x>0 \qquad (1)$$

**α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με** $\left(\dfrac{f(x)}{x+1}\right)' = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$ , $x > 0$ **και να βρείτε στη συνέχεια τον τύπο της f**

**β) Αν** $f(x) = (x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$ , $x > 0$, **τότε:**

**i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε τις ασύμπτωτες της $C_f$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f**

**ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση** $x + 1 = x e^{\frac{2012}{x+1}}$ , $x > 0$ **έχει μία ακριβώς θετική ρίζα**

**iii) Να αποδείξετε ότι** $f(x) + 2\ln 2 \geq 2 f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ , $x > 0$

**iv) Να αποδείξετε ότι** $\displaystyle\int_x^{2012} t f(t)\,dt > x \int_x^{2012} f(t)\,dt$ , $x \in (0\,,\,2012)$

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ , $x \in (0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\displaystyle\int_1^x f(t)dt\right)' = f(x)$ , $x > 0$.

Η συνάρτηση $\dfrac{f(t)}{t+1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών, άρα η συνάρτηση $g(u) = \displaystyle\int_1^u \frac{f(t)}{t+1}dt$ , $u > 0$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(u) = \left(\displaystyle\int_1^u \frac{f(t)}{t+1}dt\right)' = \dfrac{f(x)}{x+1}$ , $x > 0$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση $\displaystyle\int_1^x g(u)\,du$ , $x \in (0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\displaystyle\int_1^x g(u)du\right)' = g(x)$ , $x > 0$.

Επομένως τα μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\left(\int_1^x f(t)dt + x\ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2\ln 2\right)' = \left(\int_1^x g(u)du\right)' \text{, οπότε}$$

$$f(x) + \ln\left(\frac{x}{4}\right) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln\left(\frac{x}{4}\right) + g(x)\ ,\ x > 0 \quad (2)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + g'(x) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+1)f'(x) - f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)f'(x) - f(x)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \left(\ln(x+1) - \ln x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x + c \ , \ c \in R \ , \ x > 0 \qquad (3)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (2) έχουμε $f(1) = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) + g(1) \Leftrightarrow f(1) = \ln 4 + 0 \Leftrightarrow f(1) = 2\ln 2$

και από τη σχέση (3) έχουμε $\frac{f(1)}{2} = \ln 2 + c \Leftrightarrow \frac{2\ln 2}{2} = \ln 2 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα

$$\frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x \ , \ x > 0 \Leftrightarrow f(x) = (x+1)\ln\frac{x+1}{x} \ , \ x > 0$$

**β) i)** Η $f$ είναι παραγωγίμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \left((x+1)\ln\frac{x+1}{x}\right)' = (x+1)'\ln\frac{x+1}{x} + (x+1)\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)' =$$

$$= \ln\frac{x+1}{x} + (x+1)\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)' = \ln\frac{x+1}{x} + x\cdot\frac{(x+1)'x - (x+1)(x)'}{x^2} =$$

$$= \ln\frac{x+1}{x} + \frac{x-(x+1)}{x} = \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \ , \ x > 0$$

Η συνάρτηση $g(t) = \ln t$ σε κάθε διάστημα $[x, x+1]$, $x > 0$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln\frac{x+1}{x} \qquad (4)$$

Είναι:

$$0 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} < 0 \qquad (5)$$

Λόγω της (5) είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left((x+1)\cdot\ln\frac{x+1}{x}\right) = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x \to 0^+}(x+1) = 1$ και

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty \ , \ t = \frac{x+1}{x} \text{ και } \lim_{x \to 0^+}\frac{x+1}{x} = \lim_{x \to 0^+}\left[(x+1)\cdot\frac{1}{x}\right] = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x+1\right)\cdot\ln\frac{x+1}{x}\right) \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x+1}\right)'} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x+1}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'x-(x+1)(x)'}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$.

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=(1\ ,+\infty)$

**ii)** Για $x>0$ η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$x+1 = x\cdot e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{2012}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\left(x+1\right)\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012 \qquad (6)$$

Η $f$ είναι συνάρτηση $1-1$, ως γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ και $2012\in f(A)$, άρα η εξίσωση (6) έχει μία ακριβώς λύση ως προς $x$ στο $A=(0,+\infty)$.

Δηλαδή η εξίσωση $x+1 = x\cdot e^{\frac{2012}{x+1}}$, $x>0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα.

**iii) 1ος τρόπος: (ανισότητα Jensen)** $f(x)+2\ln 2 \ge 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)+f(1)\ge 2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ (7)

που ισχύει για κάθε $x>0$, γιατί η $f$ είναι κυρτή . Πράγματι:

Για $x=1$ η (7) ισχύει ως ισότητα.

Για $x>1$ η $f$ στα διαστήματα $\left[1\ ,\ \frac{x+1}{2}\right]$ και $\left[\frac{x+1}{2},\ x\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(1\ ,\ \frac{x+1}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x+1}{2}\ ,\ x\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x+1}{2}-1} = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x-1}{2}} \qquad \text{και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x-\frac{x+1}{2}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}}$$

Για κάθε $x>0$ η $f'$ είναι παραγωγίμη με $f''(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, άρα η $f'$ είναι γνησίως
αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Είναι:

$$0<\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x-1}{2}}<\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}} \overset{x-1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)<f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)+f(1)>2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)+2\ln 2>2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Ομοίως αν $0<x<1$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι:

$$f(x)+2\ln 2\geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right),\ \text{για κάθε } x>0$$

**$2^{ος}$ τρόπος (με τη βοήθεια ακρότατου)**

**Υπόδειξη:** αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-2f\left(\frac{x+1}{2}\right)+2\ln 2,\ x>0 \text{ έχει ελάχιστο το } 0.$$

**iv) $1^{ος}$ τρόπος: (με τη βοήθεια της μονοτονίας)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_x^{2012} tf(t)dt-x\int_x^{2012} f(t)dt=-\int_{2012}^x tf(t)dt+x\int_{2012}^x f(t)dt\ ,\ x\in(0,\,2012]$$

Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη γιατί οι συναρτήσεις $f(t)$, $tf(t)$ είναι συνεχείς, με

$$h'(x)=\left(-\int_{2012}^x tf(t)dt+x\int_{2012}^x f(t)dt\right)'=-xf(x)+\int_{2012}^x f(t)dt+xf(x)=\int_{2012}^x f(t)dt\ ,\ x\in(0,\,2012]$$

Για κάθε $x\in(0,\,2012]$ είναι:

$$h''(x)=\left(\int_{2012}^x f(t)dt\right)'=f(x)>0$$

αφού το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$ είναι το $f(A)=(1,+\infty)$

Άρα η συνάρτηση $h'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,\,2012]$, οπότε

για $0<x<2012$ ισχύει $h'(x)<h'(2012) \overset{h'(2012)=0}{\Leftrightarrow} h'(x)<0$

Έχουμε:

$$\begin{cases} h \text{ συνεχής στο } (0\,,\,2012] \\ h'(x) < 0 \quad \text{στο } \left(0\,,\,2012\right) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,\,2012]$

Επομένως για κάθε $x \in (0\,,\,2012)$ ισχύει:

$$h(x) > h(2012) = 0 \Rightarrow -\int_{2012}^{x} tf(t)dt + x\int_{2012}^{x} f(t)dt > 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x}^{2012} tf(t)dt - x\int_{x}^{2012} f(t)dt > 0 \Rightarrow \int_{x}^{2012} tf(t)dt > x\int_{x}^{2012} f(t)dt$$

**2$^{ος}$ τρόπος**

Για κάθε $x \in (0\,,\,2012)$ είναι :

$$\int_{x}^{2012} tf(t)dt > x\int_{x}^{2012} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{x}^{2012} tf(t)dt - x\int_{x}^{2012} f(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x}^{2012} tf(t)dt - \int_{x}^{2012} xf(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_{x}^{2012} (t-x)f(t)dt > 0$$

που ισχύει γιατί η συνάρτηση $(t-x)f(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x\,,\,2012]$,

αφού $x \in (0\,,\,2012)$ και $(t-x)f(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [x\,,\,2012]$ με το ίσο να ισχύει μόνο

για $t = x$, άρα $\displaystyle\int_{x}^{2012} (t-x)f(t)dt > 0$

## ΘΕΜΑ 21ο :

**Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$f\left(f'(x)\right) + f(x) = 0$ , για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ (1)**
- **$f'(x) > 0$ , για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ (2)**
- **$f(1) = 0$ (3)**

**α) i) Να βρείτε το $f'(1)$**

**ii) Να αποδείξετε ότι $f'\left(f'(x)\right) = x$ , $x \in (0\,,+\infty)$**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$ , $x \in (0\,,+\infty)$**

**γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ η ευθεία $\varepsilon: y = x + \kappa$ έχει δυο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$**

**δ) Αν $\kappa < -1$ και $A\left(\alpha, f(\alpha)\right), B\left(\beta, f(\beta)\right)$ με $\alpha < \beta$, τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$**

## ΛΥΣΗ

**α) i)** Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,+\infty)$, άρα είναι και «1−1»

Από τη σχέση (1) για $x = 1$ έχουμε:

$$f\left(f'(1)\right) + f(1) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f\left(f'(1)\right) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f\big(f'(1)\big)=f(1)\overset{f:\text{«1-1»}}{\Rightarrow}f'(1)=1 \qquad (4)$$

**ii)** Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου $x$ το $f'(x)$ έχουμε:

$$f\Big(f'\big(f'(x)\big)\Big)+f\big(f'(x)\big)=0\overset{+f(x)}{\Rightarrow}$$

$$f\Big(f'\big(f'(x)\big)\Big)+\underbrace{f\big(f'(x)\big)+f(x)}_{=0}=f(x)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f\Big(f'\big(f'(x)\big)\Big)=f(x)\overset{f:\text{«1-1»}}{\Rightarrow}f'\big(f'(x)\big)=x\ ,\ x\in(0,+\infty) \qquad (5)$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε και η συνάρτηση $f\big(f'(x)\big)$ είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$f\big(f'(x)\big)+f(x)=0\Rightarrow\Big(f\big(f'(x)\big)+f(x)\Big)'=(0)'\Rightarrow$$

$$f'\big(f'(x)\big)\cdot f''(x)+f'(x)=0\overset{(5)}{\Rightarrow}xf''(x)+f'(x)=0\Rightarrow$$

$$\big(xf'(x)\big)'=0\Rightarrow xf'(x)=c_1\ ,\ x\in(0,+\infty)\ \text{ και } c_1\in\mathbb{R} \qquad (6)$$

Από τη σχέση (6) για $x=1$ έχουμε:

$$1\cdot f'(1)=c_1\overset{(4)}{\Leftrightarrow}c_1=1$$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x)=1\overset{\div x>0}{\Leftrightarrow}f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=(\ln x)'\Leftrightarrow f(x)=\ln x+c_2\ ,\ c_2\in\mathbb{R} \qquad (7)$$

Από τη σχέση (7) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)=\ln 1+c_2\overset{(3)}{\Leftrightarrow}c_2=0$$

Άρα:

$$f(x)=\ln x\ ,\ x\in(0,+\infty) \qquad (8)$$

**γ)** Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $\ln x=x+\kappa$ έχει δύο λύσεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-x-\kappa\ ,\ x\in(0,+\infty)$

Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

Είναι:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,1)$
- $g'(x)<0\Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της $g$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | $-1-\kappa$ | $\searrow$ | |
| | | | μέγιστο | | |

Είναι:

$$g(1)=\ln 1-1-\kappa=-1-\kappa$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\,1]$
- Η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,\,+\infty)$
- Η συνάρτηση $g$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ με μέγιστη τιμή $g(1)=-1-\kappa$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-x-\kappa)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x-\kappa)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x}-1-\dfrac{\kappa}{x}\right)\right]=-\infty$, γιατί
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-1-\dfrac{\kappa}{x}\right)=0-1-0=-1$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\,1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}g(x),\,g(1)\right]=(-\infty,\,-1-\kappa]$$

- Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,\,+\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}g(x),\,g(1)\right]=(-\infty,\,-1-\kappa]$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g$ είναι:

$$g(\Delta)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)=(-\infty,\,-1-\kappa]$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, η συνάρτηση $g$ λαμβάνει κάθε τιμή του συνόλου τιμών της, εκτός από την μέγιστη, ακριβώς δύο φορές.

Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ρίζες σε κάθε περίπτωση που η μέγιστη τιμή της είναι θετική, δηλαδή όταν $-1-\kappa>0$ που σημαίνει ότι $\kappa<-1$

**δ) $1^{ος}$ τρόπος:**

Αν $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$, $B\big(\beta, f(\beta)\big)$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

- $f(\alpha) = \alpha + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\alpha = \alpha + \kappa \Rightarrow \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} = 1 + \dfrac{\kappa}{\alpha}$
- $f(\beta) = \beta + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\beta = \beta + \kappa \Rightarrow \dfrac{\ln\beta}{\beta} = 1 + \dfrac{\kappa}{\beta}$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta} = \left(1 + \frac{\kappa}{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{\kappa}{\beta}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta} = \frac{\kappa}{\alpha} - \frac{\kappa}{\beta} \Rightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{\ln\beta}{\beta} = \kappa\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$\frac{\ln\beta}{\beta} - \frac{\ln\alpha}{\alpha} = -\kappa\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\dfrac{\ln\beta}{\beta} - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} = -\frac{\kappa}{\alpha\beta} \qquad (9)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$

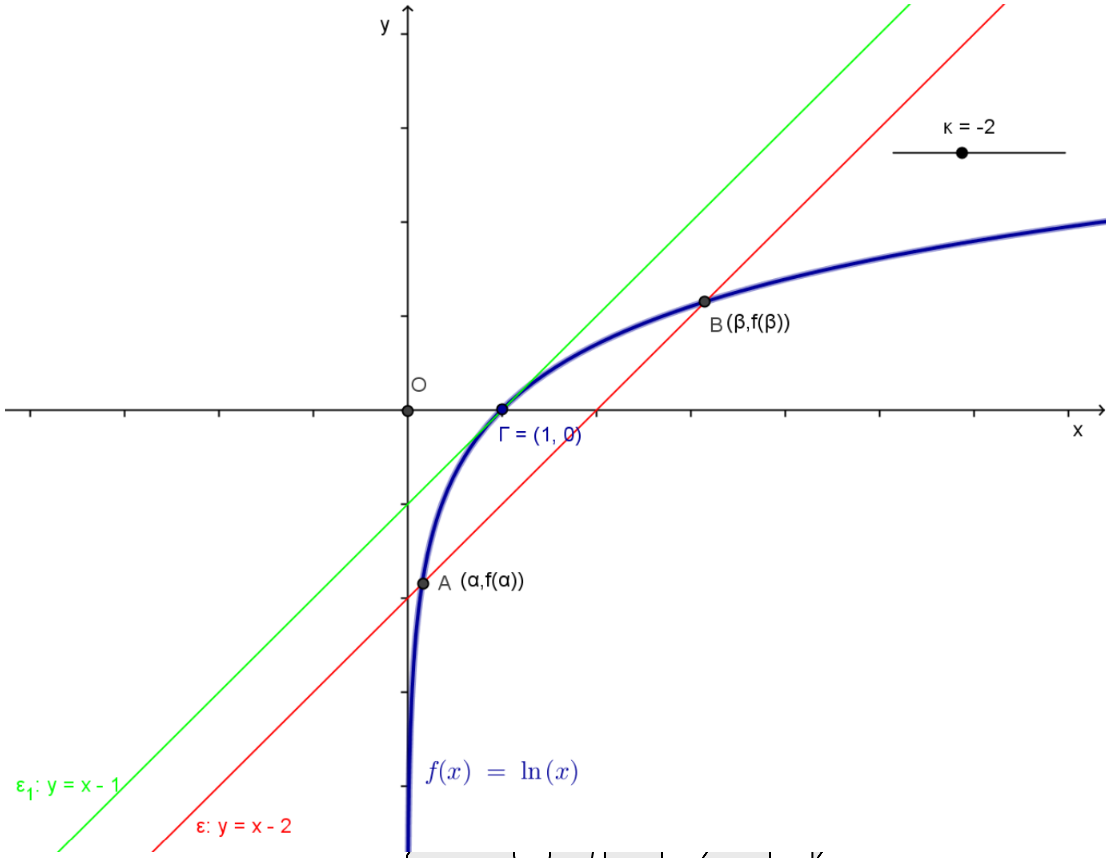
Η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \qquad (10)$$

Η συνάρτηση $h$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$h'(\xi) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \overset{(10)}{\Rightarrow} \frac{1 - \ln\xi}{\xi^2} = \frac{\dfrac{\ln\beta}{\beta} - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} \overset{(9)}{\Rightarrow}$$

$$= \frac{1 - \ln\xi}{\xi^2} = -\frac{\kappa}{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta(1 - \ln\xi) = -\kappa\xi^2 \Rightarrow \alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$$




**2$^{ος}$ τρόπος:**

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

- $f(\alpha) = \alpha + \kappa \overset{(\beta)}{\Rightarrow} \ln\alpha = \alpha + \kappa$, με $0 < \alpha < 1$
- $f(\beta) = \beta + \kappa \overset{(\beta)}{\Rightarrow} \ln\beta = \beta + \kappa$, με $\beta > 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha\beta(\ln x - 1) - \kappa x^2$, $x \in [\alpha, \beta]$

- ♦ Η συνάρτηση $\varphi$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ ○ $\varphi(\alpha) = \alpha\beta(\ln\alpha - 1) - \kappa\alpha^2 \overset{\ln\alpha = \alpha + \kappa}{=} \alpha\beta(\alpha + \kappa - 1) - \kappa\alpha^2 =$

$$= \alpha(\alpha\beta + \beta\kappa - \beta - \kappa\alpha) = \alpha\left[\underbrace{\beta(\alpha - 1)}_{<0} + \underbrace{\kappa(\beta - \alpha)}_{<0}\right] < 0$$

○ $\varphi(\beta) = \alpha\beta(\ln\beta - 1) - \kappa\beta^2 \overset{\ln\beta = \beta + \kappa}{=} \alpha\beta(\beta + \kappa - 1) - \kappa\beta^2 =$

$$= \beta(\alpha\beta + \alpha\kappa - \alpha - \kappa\beta) = \beta\left[\underbrace{\alpha(\beta - 1)}_{>0} + \underbrace{\kappa(\alpha - \beta)}_{>0}\right] > 0$$

οπότε $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$

Η συνάρτηση $\varphi$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi-1)-\kappa\xi^2=0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi-1)=\kappa\xi^2$$

## ΘΕΜΑ 22ο :

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f$ , $g : R \to R$ , με:**

- $\mathbf{f(x)=xe^x+\alpha}$
- $\mathbf{g(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+\beta\ ,\quad \alpha,\beta\in R}$

**Αν οι γραφικές παραστάσεις $C_f$ , $C_g$ των συναρτήσεων $f$ , $g$ αντίστοιχα δέχονται, σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε), που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:**

**α) Να αποδείξετε ότι:**

$$\alpha=0\ ,\ \beta=-\frac{3}{2}\ \text{ και η κοινή εφαπτομένη (ε) είναι η ευθεία με εξίσωση } y=x$$

**β) Να βρείτε το εμβαδόν $E_1$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x=t$ , $t>0$**

**γ) Να βρείτε το εμβαδόν $E_2$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g$ , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x=t$ , $t>0$**

**δ) Να αποδείξετε ότι $E_1(t)<E_2(t)+te^t$ για κάθε $t>0$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Οι γραφικές παραστάσεις $C_f$ και $C_g$ των συναρτήσεων $f$ και $g$ αντίστοιχα δέχονται κοινή εφαπτομένη (ε), σε κοινό τους σημείο $M(x_0, y_0)$ , αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0)=y_0 \\ f'(x_0)=g'(x_0)=\lambda \end{cases}\ ,\quad (\text{όπου } \lambda \text{ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)})$$

Η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x$

Άρα:

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0)=\lambda x_0 & (1) \\ f'(x_0)=g'(x_0)=\lambda & (2) \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι παραγωγίσιμες στο $R$ , με:

- $f'(x)=(xe^x+\alpha)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x\ ,\ x\in R$
- $g'(x)=\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+\beta\right)'=-e^{2x}+2e^x=e^x(2-e^x)\ ,\ x\in R$

Για $x=x_0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x_0)=g'(x_0) \Leftrightarrow (x_0+1)e^{x_0}=e^{x_0}(2-e^{x_0}) \Leftrightarrow x_0+1=2-e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0}+x_0-1=0 \quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=e^x+x-1\ ,\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$h'(x)=(e^x+x-1)'=e^x+1>0$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $R$, οπότε είναι και «1 – 1»

Η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται:

$$h(x_0) = h(0) \overset{«1-1»}{\Leftrightarrow} x_0 = 0$$

Για $x_0 = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

- $f(0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $g(0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^0 + 2e^0 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2}$

Για $x_0 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

- $f'(0) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = (0+1)e^0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Άρα η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) είναι: $y = x$

**β)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $f'(x) = (x+1)e^x$
- $f''(x) = \left((x+1)e^x\right)' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

Είναι:

$$f''(x) = (x+2)e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \subseteq (-2, +\infty)$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση $C_f$ βρίσκεται από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = x$ και «πάνω», δηλαδή ισχύει:

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$ (τετμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν $E_1$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, είναι:

$$E_1(t) = \int_0^t \left(f(x) - x\right)dx = \int_0^t (xe^x - x)dx = \int_0^t xe^x dx - \int_0^t xdx = \int_0^t x(e^x)'dx - \int_0^t xdx =$$

$$= \left[xe^x\right]_0^t - \int_0^t (x)'e^x dx - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^t = te^t - \int_0^t e^x dx - \frac{1}{2}t^2 =$$

$$= te^t - e^t + 1 - \frac{1}{2}t^2 = te^t - e^t - \frac{1}{2}t^2 + 1, \quad t > 0$$

**γ)** Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $g'(x) = e^x(2 - e^x) = -e^{2x} + 2e^x$
- $g''(x) = \left(-e^{2x} + 2e^x\right)' = -2e^{2x} + 2e^x = 2e^x(1 - e^x)$

Είναι:

$$g''(x) = 2e^x(1 - e^x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Επίσης η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα είναι κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση $C_g$ βρίσκεται από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = x$ και «κάτω», δηλαδή ισχύει:

$$g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x=0$ (τετμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν $E_2$ του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης $g$, την ευθεία $(\varepsilon)$ και την ευθεία με εξίσωση $x=t$, $t>0$, είναι:

$$E_2(t)=\int_0^t\left(x-g(x)\right)dx=\int_0^t x\,dx-\int_0^t g(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^t-\int_0^t\left(-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^t-2\left[e^x\right]_0^t+\frac{3}{2}(t-0)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}\left(e^{2t}-1\right)-2\left(e^t-1\right)+\frac{3}{2}t=$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}-2e^t+2+\frac{3}{2}t=\frac{1}{4}e^{2t}-2e^t+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{7}{4},\quad t>0$$

**δ)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $t>0$ είναι:

$$E_1(t)<E_2(t)+te^t \Leftrightarrow$$

$$te^t-e^t-\frac{1}{2}t^2+1<\frac{1}{4}e^{2t}-2e^t+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}+te^t$$

$$e^t-\frac{1}{4}e^{2t}-t^2-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}<0\,,\quad t>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Phi(t)=e^t-\frac{1}{4}e^{2t}-t^2-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\,,\quad t\ge 0$$

Για κάθε $t>0$ είναι:

- $\Phi'(t)=e^t-\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{3}{2}$
- $\Phi''(t)=\left(e^t-\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{3}{2}\right)'=e^t-e^{2t}-2=e^t(1-e^t)-2$

Είναι:

$$\Phi''(t)=e^t\underbrace{(1-e^t)}_{<0}-2<0\,,\ \text{για κάθε } t>0$$

Αφού για:

$$t>0\Leftrightarrow e^t>e^0\Leftrightarrow e^t>1\Leftrightarrow 1-e^t<0$$

Η συνάρτηση $\Phi$ είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$, άρα η συνάρτηση $\Phi'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Επομένως για κάθε $t>0$ είναι:

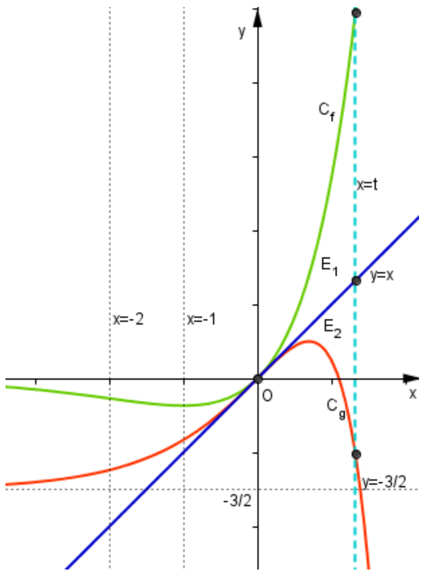
$$t>0\overset{\Phi'\downarrow}{\Rightarrow}\Phi'(t)<\Phi'(0)$$

Όμως

$$\Phi'(0)=1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1<0$$

Άρα:

$$\Phi'(t)<0\,,\quad t>0$$



Επειδή η συνάρτηση $\Phi$ είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\Phi$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,+\infty\right)$

Επομένως για κάθε $t>0$ είναι:

$$t>0 \overset{\Phi\downarrow}{\Rightarrow} \Phi(t)<\Phi(0)$$

Όμως

$$\Phi(0)=e^0-\frac{1}{4}e^0-\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$$

Άρα:

$$\Phi(t)<0\ ,\ t>0$$

Δηλαδή:

$$E_1(t)<E_2(t)+t\cdot e^t\ ,\ t>0$$

## ΘΕΜΑ 23ο :

**α) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$, $\alpha>0$ με $f(\alpha-x)+f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$**

**Να αποδείξετε ότι** $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{f(x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx=\int_0^\alpha \frac{f(\alpha-x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx$ **(1)**

**β) Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, τότε:**

**i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα** $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

**ii) Αν επιπλέον $g$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει η σχέση $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g'(x)$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (1), τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $2g'(\xi)=g(\xi)$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους θέτουμε $x=\alpha-u$, οπότε $\alpha-x=u$ και $dx=-du$
Για $x=0$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\alpha$ είναι $u=0$

Έχουμε:

$$\int_0^\alpha \frac{f(x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx=\int_\alpha^0\frac{f(\alpha-u)}{f(u)+f(\alpha-u)}(-du)=-\int_\alpha^0\frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)}du=$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)}\,du = \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha-x)}{f(\alpha-x)+f(x)}\,dx$$

**β) i)** Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu\, x$, $x \in \left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Επομένως, για $f(x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ και $\alpha = \frac{\pi}{2}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

Θέτουμε:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx \quad \text{και} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

Είναι:

- $I = J$ και
- $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$

Άρα $2I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$, δηλαδή

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

**ii)** Οι συναρτήσεις $f$, $g$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$, με

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f'(x)g'(x), \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3)$$

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = συνx$ και $f'(x) = -ημx$, οπότε η σχέση (3) γράφεται:

$$(-ημx)\cdot g(x) + συνx \cdot g'(x) = (-ημx)\cdot g'(x) \Leftrightarrow$$

$$(ημx + συνx)\cdot g'(x) = ημx \cdot g(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{ημx}{ημx + συνx}, \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4)$$

Είναι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)}{g(x)}dx \overset{(4)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημx}{ημx + συνx}dx = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως έχουμε:

$$\left[\ln g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0) = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \ln g(x), \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, με $h'(x) = \left(\ln g(x)\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Επομένως η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ , οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0)}{\frac{\pi}{2}} \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2g'(\xi) = g(\xi)$$

## ΘΕΜΑ 24ο :

**Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- **$xf'(x) + x^2 f''(x) = 2$ , για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)**
- **$f(1) = 0$ (2)**

- $\mathbf{f'(1)=2}$ **(3)**

**α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln^2x+2\ln x,\ \ x\in(0,+\infty)$**

**β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$**

**γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\alpha+\int_1^{\alpha}f(x)dx}{\alpha\ln^2\alpha+1}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x)+x^2f''(x)=2 \overset{\div x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)+xf''(x)=\frac{2}{x}\Leftrightarrow$$

$$\left(xf'(x)\right)'=\left(2\ln x\right)'\Rightarrow xf'(x)=2\ln x+c_1\ ,\ c_1\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

Από τη σχέση (4) για $x=1$ έχουμε:

$$1\cdot f'(1)=2\ln1+c_1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c_1=2$$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x)=2\ln x+2 \overset{\div x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=2\ln x\left(\ln x\right)'+2\left(\ln x\right)'\Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln^2x+2\ln x\right)'\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\ln^2x+2\ln x+c_2\ ,\ c_2\in\mathbb{R} \qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)=\ln^21+2\ln1+c_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_2=0$$

Άρα:

$$f(x)=\ln^2x+2\ln x\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

**β)** Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ και $f(x)\geq0$ για κάθε $x\in[1,e]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$, είναι:

$$E=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\ln^2x+2\ln x\right)dx=\int_1^e(x)'\ln^2x\,dx+2\int_1^e\ln x\,dx=$$

$$=[x\ln^2x]_1^e-2\int_1^e x\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+2\int_1^e\ln x\,dx=e\ln^2e-2\int_1^e\ln x\,dx+2\int_1^e\ln x\,dx=e$$

**γ)** Με διαδικασία ανάλογη αυτής που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του εμβαδού, βρίσκουμε ότι:

$$\int_1^{\alpha}f(x)dx=[x\ln^2x]_1^{\alpha}-2\int_1^{\alpha}\ln x\,dx+2\int_1^{\alpha}\ln x\,dx=\alpha\ln^2\alpha \qquad (6)$$

οπότε για κάθε $\alpha \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \int_1^{\alpha} f(x)dx}{\alpha \ln^2\alpha + 1} \overset{(6)}{=} \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \alpha\ln^2\alpha}{\alpha\ln^2\alpha + 1} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha\ln^2\alpha\left(1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right)}{\alpha\ln^2\alpha\left(1+\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right)} = \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1+\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}}{1+\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}} = 1 \ , \ \text{γιατί}$$

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(\alpha\ln^2\alpha\right) = +\infty$ , οπότε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right) = 1$
- $\left|\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right| \le \frac{1}{\alpha\ln^2\alpha} \Rightarrow -\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha} \le \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha} \le \frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}$

Είναι:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right) = \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha\ln^2\alpha} = 0$$

οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι:

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha} = 0$ , οπότε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1+\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right) = 1$

## ΘΕΜΑ 25ο :

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}dt$. Να αποδείξετε ότι:**

**α) Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$**

**β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$, στο σημείο της $O(0,0)$ είναι ο άξονας $x'x$**

**γ) $f(x) \ge \frac{1}{3}x^9$ για κάθε $x \ge 0$**

**δ) $6\int_0^1 x^2 f(x)dx - 2\int_0^1 e^{x^2}dx = 1 - e$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση $e^{t^2}$ είναι συνεχής στο R, άρα η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε και η συνάρτηση $f(x) = h\left(x^3\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση με παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(h(x^3)\right)' = h'(x^3)(x^3)' = e^{x^6}\cdot 3x^2 = 3x^2e^{x^6} \;,\quad x\in R$$

**β)** Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$, στο σημείο της $O(0,0)$ είναι:

$$(\varepsilon):\; y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

Είναι:

$$f(0) = \int_0^0 e^{t^2}dt = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0\cdot e^0 = 0$$

Άρα:

$$(\varepsilon):\; y - 0 = 0\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = 0$$

Δηλαδή, ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$, στο σημείο της $O(0,0)$

**γ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^9 \;,\quad x\in R$$

Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη, ως διαφορά παραγωγισίμων με παράγωγο:

$$g'(x) = f'(x) - 3x^8 = 3x^2e^{x^6} - 3x^8 = 3x^2\left(e^{x^6} - x^6\right),\quad x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$e^x \geq x+1 > x \quad \text{(γνωστή άσκηση – θέλει απόδειξη)}$$

οπότε:

$$e^{x^6} > x^6 \text{, για κάθε } x\in R$$

Άρα:

$$g'(x) = 3x^2\left(e^{x^6} - x^6\right) > 0 \text{, για κάθε } x\in R^*$$

Είναι:

$$\left\{\begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } R \\ g'(x) > 0 \;\; \text{στο } R^* \end{array}\right. \text{, οπότε η συνάρτηση } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } R$$

Επομένως για κάθε $x \geq 0$ έχουμε:

$$x \geq 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) \geq g(0) \Rightarrow f(x) - \frac{1}{3}x^9 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3}x^9$$

**δ)** Είναι:

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 3x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 (x^3)' f(x)dx =$$

$$=2\left(\left[x^3 f(x)\right]_0^1-\int_0^1 x^3 f'(x)dx\right)=2f(1)-2\int_0^1 x^3 f'(x)dx=$$

$$=2\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 6x^5 e^{x^6}dx=2\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{x^6}(x^6)'dx=$$

$$=2\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1\left(e^{x^6}\right)'dx=2\int_0^1 e^{x^2}dx-\left[e^{x^6}\right]_0^1=2\int_0^1 e^{x^2}dx-e+1$$

Δείξαμε ότι:

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx=2\int_0^1 e^{x^2}dx-e+1$$

Άρα:

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx-2\int_0^1 e^{x^2}dx=1-e$$

## ΘΕΜΑ 26ο :

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:**

- $2\text{συν}x+\int_0^x t f(t)dt=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du-x\text{ημ}x+2$, **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $f(0)=0$ **(2)**
- $f'(0)=\alpha$ **(3)**

**α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\alpha$**

**β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\text{συν}x,\ x\in\mathbb{R}$**

**γ) Να βρείτε:**

**i) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$**

**ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης f, από την εφαπτομένη (ε) της $C_f$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{2\pi}{3}$ και $x=\frac{4\pi}{3}$**

## ΛΥΣΗ

**α)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, άρα η συνάρτηση $g(u)=\int_0^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και συνεχής στο R, οπότε η $\int_0^x g(u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$ είναι παραγωγίσιμη στο R.

Η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής στο $R$, άρα και η συνάρτηση $\int_0^x tf(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$. Επίσης οι συναρτήσεις $2\sigma\upsilon\nu x$ και $-x\eta\mu x+2$ είναι παραγωγίσιμες στο $R$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$-2\eta\mu x + xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\,,\ x\in R \qquad (4)$$

Από τη σχέση (4) για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\int_0^x f(t)\,dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x} \qquad (5)$$

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, γιατί ο τύπος της $f$ προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Από τη σχέση (3) έχουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $R$

Προσδιορισμός του πραγματικού αριθμού α:

Για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ έχουμε:

$$\alpha = f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \qquad (6)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \overset{(6)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x} + \eta\mu x\right) = \frac{1}{2}\alpha$$

οπότε, λόγω της σχέσης (6) είναι:

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$$

**β)** Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (4) έχουμε:

$$\left(xf(x)\right)' = \left(\int_0^x f(t)\,dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\right)' \Rightarrow$$

$$f(x)+xf'(x)=f(x)+\text{συν}x-\text{συν}x+x\text{ημ}x \Rightarrow$$

$$xf'(x)=x\text{ημ}x\,,\ x\in R$$

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=\text{ημ}x=(-\text{συν}x)'$$

οπότε:

$$f(x)=\begin{cases}-\text{συν}x+c_1\ , & x\in(-\infty\,,\,0)\\ 0\ , & x=0\\ -\text{συν}x+c_2\ , & x\in(0\,,\,+\infty)\end{cases}$$

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $R$, άρα είναι συνεχής και στο $x_0=0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0^-}(-\text{συν}x+c_1)=\lim_{x\to0^+}(-\text{συν}x+c_2)=0\Rightarrow$$

$$-\text{συν}0+c_1=-\text{συν}0+c_2=0\Rightarrow$$

$$-1+c_1=-1+c_2=0\Rightarrow c_1=c_2=1$$

Επομένως

$$f(x)=\begin{cases}-\text{συν}x+1\ , & x\in(-\infty\,,\,0)\\ 0\ , & x=0\\ -\text{συν}x+1\ , & x\in(0\,,\,+\infty)\end{cases}\Rightarrow\ f(x)=1-\text{συν}x\,,\ x\in R$$

**γ) i)** Είναι:

- $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1-\text{συν}\frac{2\pi}{3}=1-\text{συν}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$

  $=1-\left(-\text{συν}\frac{\pi}{3}\right)=1+\text{συν}\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

- $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\text{ημ}\frac{2\pi}{3}=\text{ημ}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\text{ημ}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$ είναι:

$$\varepsilon:\ y-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6}$$

**ii)** Στο διάστημα $\left[\frac{2\pi}{3}\,,\,\frac{4\pi}{3}\right]$ η συνάρτηση $f$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x)=\text{ημ}x\quad\text{και}\quad f''(x)=\text{συν}x<0$$

οπότε η συνάρτηση $f$ είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εφαπτομένη (ε) της $C_f$ στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$, βρίσκεται από την $C_f$ και «πάνω»

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$, από την εφαπτομένη (ε) της $C_f$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{2\pi}{3}$ και $x = \frac{4\pi}{3}$ είναι:

$$E = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9 - 2\sqrt{3}\pi}{6} - f(x) \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left( \sigma\upsilon\nu x + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9 - 2\sqrt{3}\pi}{6} - 1 \right) dx =$$

$$= [\eta\mu x]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left( \frac{16\pi^2}{9} - \frac{4\pi^2}{9} \right) + \frac{3 - 2\sqrt{3}\pi}{6} \cdot \frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi^2 + 3\pi - 9\sqrt{3}}{9}$$