ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 1ο :

Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $Re(z_1) = -2$ και $Re(z_2) = 2$

Αν $f(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2})$ και $f(i) = 64 - 8i$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $f(-i) = 64 + 8i$

β) $(1 + z_1^2)(1 + \overline{z_1}^2)(1 + z_2^2)(1 + \overline{z_2}^2) = 4160$

γ) $|z_1| = 3$ και $|z_2| = \sqrt{7}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

- $f(i) = (i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2})$
- $f(-i) = (-i - z_1)(-i - \overline{z_1})(-i - z_2)(-i - \overline{z_2}) =$

$$= (\overline{i} - z_1)(\overline{i} - \overline{z_1})(\overline{i} - z_2)(\overline{i} - \overline{z_2}) =$$

$$= (\overline{i - \overline{z_1}})(\overline{i - z_1})(\overline{i - \overline{z_2}})(\overline{i - z_2}) =$$

$$= \overline{(i - \overline{z_1})(i - z_1)(i - \overline{z_2})(i - z_2)} =$$

$$= \overline{(i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2})} =$$

$$= \overline{f(i)} = \overline{64 - 8i} = 64 + 8i$$

β) Είναι:

$$(1 + z_1^2)(1 + \overline{z_1}^2)(1 + z_2^2)(1 + \overline{z_2}^2) =$$

$$= (z_1^2 - i^2)(\overline{z_1}^2 - i^2)(z_2^2 - i^2)(\overline{z_2}^2 - i^2) =$$

$$= (z_1 - i)(z_1 + i)(\overline{z_1} - i)(\overline{z_1} + i)(z_2 - i)(z_2 + i)(\overline{z_2} - i)(\overline{z_2} + i) =$$

$$=\left[(z_1-i)(\overline{z_1}-i)(z_2-i)(\overline{z_2}-i)\right]\left[(z_1+i)(\overline{z_1}+i)(z_2+i)(\overline{z_2}+i)\right]=$$

$$=\left[(i-z_1)(i-\overline{z_1})(i-z_2)(i-\overline{z_2})\right]\left[(-i-z_1)(-i-\overline{z_1})(-i-z_2)(-i-\overline{z_2})\right]=$$

$$=f(i)f(-i)=(64-8i)(64+8i)=64^2+8^2=4096+64=4160$$

γ) Είναι:

$$z_1+\overline{z_1}=2\,\mathrm{Re}(z_1)=2\cdot(-2)=-4 \qquad (1)$$

$$z_2+\overline{z_2}=2\,\mathrm{Re}(z_2)=2\cdot 2=4 \qquad (2)$$

Έχουμε:

- $f(i)=(i-z_1)(i-\overline{z_1})(i-z_2)(i-\overline{z_2})=$

$$=\left[(i-z_1)(i-\overline{z_1})\right]\left[(i-z_2)(i-\overline{z_2})\right]=$$

$$=\left[-1-i(z_1+\overline{z_1})+|z_1|^2\right]\left[-1-i(z_2+\overline{z_2})+|z_2|^2\right]\overset{(1),(2)}{=}$$

$$=\left[|z_1|^2-1+4i\right]\left[|z_2|^2-1-4i\right]=$$

$$=\left[|z_1|^2-1+4i\right]\left[|z_2|^2-1-4i\right]=$$

$$=\left[\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)+16\right]+\left[4\left(|z_2|^2-1\right)-4\left(|z_1|^2-1\right)\right]i=$$

$$=\left[\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)+16\right]+\left[4|z_2|^2-4|z_1|^2\right]i$$

Όμως:

- $f(i)=64-8i$

Άρα έχουμε:

$$\begin{cases}\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)+16=64\\ 4|z_2|^2-4|z_1|^2=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)=48\\ |z_2|^2-|z_1|^2=-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(|z_2|^2+1\right)\left(|z_2|^2-1\right)=48\\ |z_1|^2=|z_2|^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_2|^4-1=48\\ |z_1|^2=|z_2|^2+2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|z_2|^4=49\\ |z_1|^2=|z_2|^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_2|=\sqrt{7}\\ |z_1|^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_2|=\sqrt{7}\\ |z_1|=3\end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η παράσταση $f(z) = \dfrac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i|-|z-10i|}$ **. Να αποδείξετε ότι:**

α) Το ευρύτερο υποσύνολο του C στο οποίο ορίζεται η παράσταση $f(z)$ είναι το $C - R$

β) $\big||z+10i|-|z-10i|\big| \le 2|z|$

γ) $|f(z)| \ge 1$

δ) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = \dfrac{1}{6}|z|$, είναι υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $z = x + yi$, $x, y \in R$ και $M(x, y)$ η εικόνα του στο επίπεδο.

Για να ορίζεται η παράσταση f αρκεί $|z+10i|-|z-10i| \neq 0$

Εξετάζουμε λοιπόν για ποιους μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει $|z+10i|-|z-10i| = 0$

Είναι:

$$|z+10i|-|z-10i| = 0 \Leftrightarrow |z+10i| = |z-10i| \Leftrightarrow$$

$$|x+(y+10)i| = |x+(y-10)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y+10)^2} = \sqrt{x^2+(y-10)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+20y+100 = x^2+y^2-20y+100 \Leftrightarrow$$

$$20y = -20y \Leftrightarrow 40y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα, για να ορίζεται η παράσταση f αρκεί $y \neq 0$, δηλαδή $z \in C - R$

β) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \quad \text{για κάθε } z_1, z_2 \in C,$$

οπότε για $z_1 = z+10i$ και $z_2 = z-10i$ έχουμε:

$$\big||z+10i|-|z-10i|\big| \le |(z+10i)+(z-10i)| = |2z| = 2|z|$$

γ) Για κάθε $z \in C$ είναι:

$$\big||z+10i|-|z-10i|\big| \le 2|z|$$

οπότε για κάθε $z \in C - R$ είναι:

$$\frac{1}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} \ge \frac{1}{2|z|} \qquad (1)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$|f(z)| = \left|\frac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i|-|z-10i|}\right| = \frac{|(\sqrt{3}+i)z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} = \frac{|\sqrt{3}+i|\cdot|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|} =$$

$$=\frac{2|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|}=2|z|\cdot\frac{1}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|}\overset{(1)}{\geq}2|z|\cdot\frac{1}{2|z|}=1$$

δ) Είναι:

$$|f(z)|=\frac{1}{6}|z|\Leftrightarrow\left|\frac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i|-|z-10i|}\right|=\frac{1}{6}|z|\Leftrightarrow\frac{\left|\sqrt{3}+i\right|\cdot|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|}=\frac{1}{6}|z|\Leftrightarrow$$

$$\frac{2|z|}{\big||z+10i|-|z-10i|\big|}=\frac{1}{6}|z|\Leftrightarrow|z|\cdot\big||z+10i|-|z-10i|\big|=12|z|\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}\big||z+10i|-|z-10i|\big|=12$$

Είναι:

$$\big||z+10i|-|z-10i|\big|=12\Leftrightarrow\big||z-(0-10i)|-|z-(0+10i)|\big|=12\Leftrightarrow|(ME')-(ME)|=12,$$

όπου M η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z, $E'(0,-10)$ και $E(0,10)$

Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων της εικόνας M του μιγαδικού αριθμού z από τα σταθερά σημεία E', E είναι $2\alpha=12$ σταθερή και μικρότερη του $(E'E)=20$.

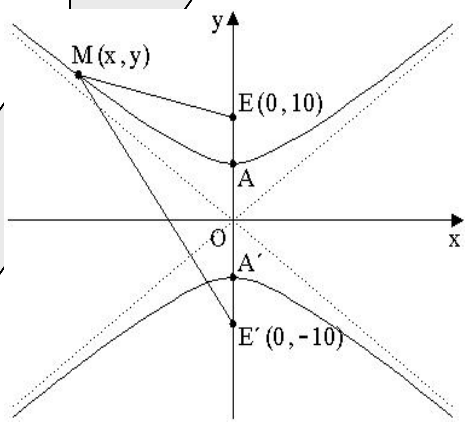
Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η υπερβολή με εστίες τα σημεία $E'(0,-10)$ και $E(0,10)$, άρα $\gamma=10$

Επιπλέον είναι $2\alpha=12\Leftrightarrow\alpha=6$, οπότε

$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2\Leftrightarrow\beta^2=100-36\Leftrightarrow\beta^2=64\Leftrightarrow\beta=8$

και η εξίσωση της υπερβολής είναι:

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$$



ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνονται τρεις μιγαδικοί αριθμοί z, w, u με $|z|=3$, $|w|=4$, $|u|=5$ και $z+w+u=0$, οι οποίοι έχουν εικόνες τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $16z^2+9w^2=0$

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο , όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z, w, u

ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε:

- $|z|=3\Leftrightarrow|z|^2=9\Leftrightarrow z\bar{z}=9\Leftrightarrow\bar{z}=\dfrac{9}{z}$ (1)
- $|w|=4\Leftrightarrow|w|^2=16\Leftrightarrow w\bar{w}=16\Leftrightarrow\bar{w}=\dfrac{16}{w}$ (2)
- $|u|=5\Leftrightarrow|u|^2=25\Leftrightarrow u\bar{u}=25\Leftrightarrow\bar{u}=\dfrac{25}{u}$ (3)

Επίσης έχουμε:

$$u = -(z + w) \qquad (4)$$

Είναι:

$$z + w + u = 0 \Leftrightarrow \bar{z} + \bar{w} + \bar{u} = 0 \qquad (5)$$

Η σχέση (5) με βάση τις σχέσεις (1) , (2) και (3) γράφεται:

$$\frac{9}{z} + \frac{16}{w} + \frac{25}{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{z} + \frac{16}{w} - \frac{25}{z+w} = 0 \Leftrightarrow$$

$$9w(z + w) + 16z(z + w) - 25zw = 0 \Leftrightarrow$$

$$9wz + 9w^2 + 16z^2 + 16zw - 25zw = 0 \Leftrightarrow$$

$$16z^2 + 9w^2 = 0 \qquad (6)$$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z-w|^2$$

Είναι όμως:

$$|z - w|^2 = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} - (z\bar{w} + \bar{z}w) =$$

$$= 16 + 9 - \left(\frac{16z}{w} + \frac{9w}{z}\right) = 25 - \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} \overset{(6)}{=} 25 = (AB)^2$$

Επομένως έχουμε:

$$(AB) = |z - w| = 5$$

Είναι:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = |z|^2 + |w|^2 = 9 + 16 = 25 = |z - w|^2 = (AB)^2$$

οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

γ) Αρκεί να βρούμε ακόμα τους αριθμούς $|z-u|$ και $|w-u|$, που είναι αντίστοιχα τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΒΓ, αφού ήδη έχουμε αποδείξει ότι $(AB) = |z - w| = 5$

Είναι:

- $$|z - u|^2 \overset{(4)}{=} |2z + w|^2 = (2z + w)(2\bar{z} + \bar{w}) =$$

  $$= 4z\bar{z} + w\bar{w} + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = 4|z|^2 + |w|^2 + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) =$$

  $$= 36 + 16 + 2\cdot\left(\frac{9w}{z} + \frac{16z}{w}\right) = 36 + 16 + 2\cdot\frac{16z^2 + 9w^2}{zw} \overset{(6)}{=} 52$$

  Επομένως έχουμε:

  $$(A\Gamma) = |z - u| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

- $|w-u|^2 \overset{(4)}{=} |z+2w|^2 = (z+2w)(\bar{z}+2\bar{w}) =$

$$= z\bar{z} + 4w\bar{w} + 2(z\bar{w}+w\bar{z}) = |z|^2 + 4|w|^2 + 2(z\bar{w}+w\bar{z}) =$$

$$= 9 + 64 + 2\cdot\left(\frac{9w}{z}+\frac{16z}{w}\right) = 9 + 64 + 2\cdot\frac{16z^2+9w^2}{zw} = 73$$

Επομένως έχουμε:

$$(\text{ΒΓ}) = |w-u| = \sqrt{73}$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left|\dfrac{z}{\alpha^2} - i\right| = \dfrac{1}{\alpha}|z-i| \qquad (1)$
- $w(z-i) - 2zi - 2\alpha^2 = 0 \qquad$ **(2) , όπου $\alpha \in R$ και $0 < \alpha \neq 1$**

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $v = \dfrac{2z-w}{2z+w}$ με $w \neq -2z$, είναι φανταστικός

δ) Αν z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες αντίστοιχα στο επίπεδο τα σημεία Α, Β, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (1) και w είναι ένας μιγαδικός αριθμός με εικόνα στο επίπεδο το σημείο Γ , ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (2) , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{(\text{ΓΑ})}{(\text{ΓΒ})} \leq 3$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left|\frac{z}{\alpha^2} - i\right| = \frac{1}{\alpha}|z-i| \Leftrightarrow |z-\alpha^2 i| = \alpha|z-i| \Leftrightarrow |z-\alpha^2 i|^2 = \alpha^2|z-i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(z-\alpha^2 i\right)\left(\overline{z-\alpha^2 i}\right) = \alpha^2(z-i)\left(\overline{z-i}\right) \Leftrightarrow \left(z-\alpha^2 i\right)\left(\bar{z}+\alpha^2 i\right) = \alpha^2(z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} + \alpha^2 zi - \alpha^2\bar{z}i - \alpha^4 i^2 = \alpha^2 z\bar{z} + \alpha^2 zi - \alpha^2\bar{z}i - \alpha^2 i^2 \Leftrightarrow |z|^2 - \alpha^4 i^2 = \alpha^2|z|^2 - \alpha^2 i^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 - \alpha^2|z|^2 = \alpha^2 - \alpha^4 \Leftrightarrow \left(1-\alpha^2\right)|z|^2 = \left(1-\alpha^2\right)\alpha^2 \overset{0<\alpha\neq 1}{\Leftrightarrow} |z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow |z| = \alpha \qquad (3)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \alpha$

β) Έχουμε:

$$w(z-i) - 2zi - 2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow w(z-i) = 2zi + 2\alpha^2 \overset{z\neq i}{\Leftrightarrow} w = \frac{2zi+2\alpha^2}{z-i} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$w = \frac{2zi+2|z|^2}{z-i} \Leftrightarrow w = \frac{2zi+2z\bar{z}}{z-i} \Leftrightarrow w = \frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i} \qquad (4)$$

Είναι $z \neq i$, γιατί αν $z = i$ από τη σχέση (2) προκύπτει $\alpha^2 = 1$ άτοπο.

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$|w| = \left|\frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i}\right| \Leftrightarrow |w| = \frac{|2z(\bar{z}+i)|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z|\cdot|\bar{z}+i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z|\cdot|\overline{z-i}|}{|z-i|} \Leftrightarrow$$

$$|w| = \frac{2|z|\cdot|z-i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = 2|z| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |w| = 2\alpha \qquad (5)$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν στον κύκλο, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2\alpha$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\bar{v} = -v$

Από τις σχέσεις (3) και (5) έχουμε:

- $|z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \alpha^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{\alpha^2}{z}$
- $|w|^2 = 4\alpha^2 \Leftrightarrow w\bar{w} = 4\alpha^2 \Leftrightarrow \bar{w} = \dfrac{4\alpha^2}{w}$

Είναι:

$$\bar{v} = \overline{\left(\frac{2z-w}{2z+w}\right)} = \frac{\overline{2z-w}}{\overline{2z+w}} = \frac{2\bar{z}-\bar{w}}{2\bar{z}+\bar{w}} = \frac{\dfrac{2\alpha^2}{z} - \dfrac{4\alpha^2}{w}}{\dfrac{2\alpha^2}{z} + \dfrac{4\alpha^2}{w}} = \frac{2\alpha^2\cdot\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{w}\right)}{2\alpha^2\cdot\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{w}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{w}}{\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{w}} = \frac{\dfrac{w-2z}{zw}}{\dfrac{w+2z}{zw}} = \frac{w-2z}{w+2z} = -\frac{2z-w}{2z+w} = -v$$

Άρα ο αριθμός $v = \dfrac{2z-w}{2z+w}$ είναι φανταστικός

δ) Είναι:

$$(\Gamma A) = |w - z_1| \quad \text{και} \quad (\Gamma B) = |w - z_2|$$

Για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_1 από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||w| - |z_1|\big| \le |w + z_1| \le |w| + |z_1| \qquad (6)$$

Αν στη σχέση (6) θέσουμε, όπου z_1 το $-z_1$ έχουμε:

$$\big||w| - |-z_1|\big| \le |w + (-z_1)| \le |w| + |-z_1| \overset{|-z_1|=|z_1|}{\Leftrightarrow}$$

$$\big||w| - |z_1|\big| \le |w - z_1| \le |w| + |z_1| \Leftrightarrow$$

$$|2\alpha - \alpha| \le |w - z_1| \le 2\alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha \le (\Gamma A) \le 3\alpha \qquad (7)$$

Ομοίως για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_2 έχουμε:

$$\alpha \le |w - z_2| \le 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \le (\Gamma B) \le 3\alpha, \text{ οπότε } \frac{1}{3\alpha} \le \frac{1}{(\Gamma B)} \le \frac{1}{\alpha} \qquad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{3\alpha} \le \frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \le \frac{3\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \le 3$$

ΘΕΜΑ 5ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς w και z , για τους οποίους ισχύει ότι:

- $\mathbf{25|w|^2 = 180 + |5w - 6 - 12i|^2}$
- **Οι εικόνες K(z) των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα κέντρα των κύκλων εκείνων που εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου $C_1 : (E, 4)$, όπου $E(1, 0)$ και διέρχονται από το σημείο $E'(-1, 0)$**

Να βρείτε:

α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.

γ) Την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$

δ) Τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, z_4 από τους μιγαδικούς αριθμούς z, που οι εικόνες τους είναι κορυφές τετραγώνου με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες x΄x και y΄y

ΛΥΣΗ

α) Έστω $w = x + yi$, $x, y \in R$, τότε έχουμε:

$$25|w|^2 = 180 + |5w - 6 - 12i|^2 \Leftrightarrow$$
$$25|x + yi|^2 = 180 + |5(x + yi) - 6 - 12i|^2 \Leftrightarrow$$
$$25|x + yi|^2 = 180 + |(5x - 6) + (5y - 12)i|^2 \Leftrightarrow$$
$$25(x^2 + y^2) = 180 + (5x - 6)^2 + (5y - 12)^2 \Leftrightarrow$$
$$25x^2 + 25y^2 = 180 + 25x^2 - 60x + 36 + 25y^2 - 120y + 144 \Leftrightarrow$$
$$60x + 120y - 360 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία $\varepsilon : x + 2y - 6 = 0$

β) Αν Δ είναι το σημείο επαφής ενός κύκλου κέντρου K(z) με τον κύκλο C_1, τότε ισχύει:

$$(K E) = 4 - (K\Delta) \quad (1), \text{ με } (K\Delta) < 4$$

Επειδή $(K\Delta) = (KE')$ η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

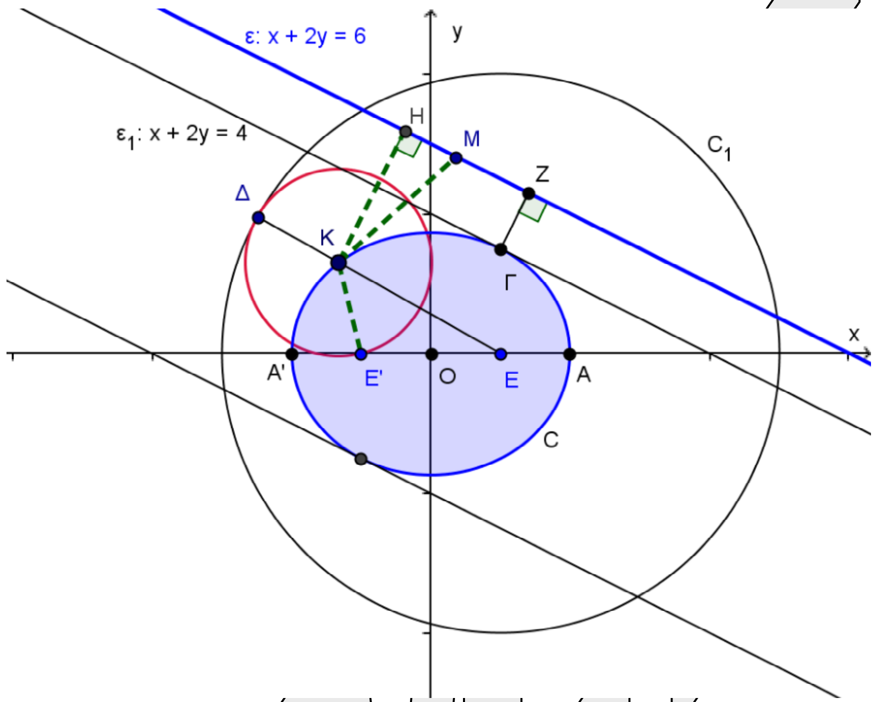
$$(KE) = 4 - (KE') \Leftrightarrow (KE) + (KE') = 4 \quad \text{και} \quad (E'E) = 2 < 4$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K , που είναι οι εικόνες των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία E΄(– 1,0), E(1,0) και μεγάλο άξονα A΄A με (A΄A) = 2α = 4, οπότε α =2

Είναι:

$$2\gamma = (E'E) = 2 \Leftrightarrow \gamma = 1 \quad \text{και} \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 3$$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι $C: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$



γ) Έστω $K(z)$ και $M(w)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w στο μιγαδικό επίπεδο, τότε είναι $|z - w| = (KM) \geq (KH) \geq (\Gamma Z)$, όπου $KH \perp (\varepsilon)$ και Γ εκείνο το σημείο της έλλειψης C, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την ευθεία ε και απέχει από αυτή τη μικρότερη απόσταση.

Εύρεση του Γ:

Έστω $\Gamma(x_1, y_1)$ σημείο της έλλειψης C, τότε ισχύει:

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 στο σημείο Γ είναι:

$$\varepsilon_1: \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$$

Είναι:

$$\varepsilon_1 // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_\varepsilon \overset{y_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} -\frac{3x_1}{4y_1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2}x_1 \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε:

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{\frac{9}{4}x_1^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$$

- Για $x_1 = 1$ είναι $y_1 = \dfrac{3}{2}$, άρα $\Gamma_1\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

- Για $x_1=-1$ είναι $y_1=-\frac{3}{2}$, άρα $\Gamma_2\left(-1\,,\,-\frac{3}{2}\right)$

Οι εφαπτόμενες της έλλειψης C, στα σημεία της Γ_1 και Γ_2 είναι παράλληλες προς την ευθεία ε και

- $d(\Gamma_1\,,\,\varepsilon)=\dfrac{\left|1+2\cdot\frac{3}{2}-6\right|}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
- $d(\Gamma_2\,,\,\varepsilon)=\dfrac{\left|-1-2\cdot\frac{3}{2}-6\right|}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

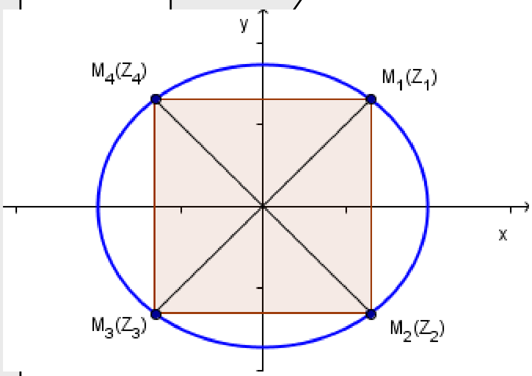
Δηλαδή $d(\Gamma_1\,,\,\varepsilon)<d(\Gamma_2\,,\,\varepsilon)$, άρα το ζητούμενο σημείο Γ είναι το Γ_1

Είναι:

$$|\,z-w\,|=(\mathrm{KM})\ge(\mathrm{KH})\ge(\Gamma\mathrm{Z})=d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|\,z-w\,|$ είναι $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

δ) Έστω τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 της έλλειψης C, που είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα, με $z_1=x_1+y_1i$, $x_1, y_1>0$, ώστε το τετράπλευρο $M_1M_2M_3M_4$ να είναι τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$



Λόγω των συμμετριών ισχύει:

$$z_2=\overline{z_1}\ ,\ z_3=-z_1\ \text{ και }\ z_4=-\overline{z_1}$$

Είναι:

- $(M_1M_2)=(M_1M_4)\Leftrightarrow|z_1-z_2|=|z_1-z_4|\Leftrightarrow$
  $|z_1-\overline{z_1}|=|z_1-(-\overline{z_1})|\Leftrightarrow|2y_1i|=|2x_1|\overset{x_1,y_1>0}{\Leftrightarrow}y_1=x_1\quad(3)$
- $\dfrac{x_1^{\,2}}{4}+\dfrac{y_1^{\,2}}{3}=1\quad(4)$, γιατί το σημείο $M_1\in(C)$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$x_1=y_1=\frac{2\sqrt{21}}{7}\ ,\ \text{γιατί }\ x_1\,,\,y_1>0$$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι:

$$z_1=\frac{2\sqrt{21}}{7}(1+i)\,,\ z_2=\frac{2\sqrt{21}}{7}(1-i)\,,\ z_3=\frac{2\sqrt{21}}{7}(-1-i)\ \text{ και }\ z_4=\frac{2\sqrt{21}}{7}(-1+i)$$

ΘΕΜΑ 6ο :

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$\left(f^2(x)+g^2(x)\right)'=2f'(x)+2g'(x)\ ,\ \text{για κάθε }x\in\mathbb{R}\qquad(1)$$

και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = f(x) + g(x)i$

α) Αν $f(1) = 4$ και $g(1) = -3$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_x κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του αθροίσματος $f^2(x) + g^2(x)$

β) Αν υπάρχει $\alpha \in R$ ώστε $z_\alpha = 1 + i$, τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = z_\alpha^{2012} - \overline{z}_\alpha^{2012}$

ii) Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g

ΛΥΣΗ

α) i) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\left(f^2(x) + g^2(x)\right)' = 2f'(x) + 2g'(x) \Rightarrow$$
$$2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f'(x) + 2g'(x) \Rightarrow$$
$$2f'(x)\left(f(x) - 1\right) + 2g'(x)\left(g(x) - 1\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\left[\left(f(x) - 1\right)^2 + \left(g(x) - 1\right)^2\right]' = 0 \Rightarrow$$
$$\left(f(x) - 1\right)^2 + \left(g(x) - 1\right)^2 = c \qquad (2)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\left(f(1) - 1\right)^2 + \left(g(1) - 1\right)^2 = c \Leftrightarrow$$
$$3^2 + \left(-4\right)^2 = c \Leftrightarrow c = 25$$

Άρα, για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$\left(f(x) - 1\right)^2 + \left(g(x) - 1\right)^2 = 25$$

που σημαίνει ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_x κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(1, 1)$ και ακτίνα $\rho = 5$

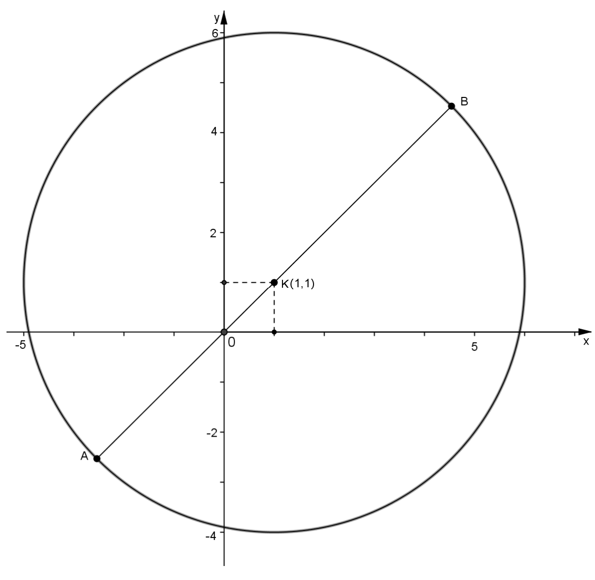
ii) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z_x ισχύει $|z_x|^2 = f^2(x) + g^2(x)$, οπότε το άθροισμα $f^2(x) + g^2(x)$ λαμβάνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή του, όταν το μέτρο του z_x λαμβάνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή.

Η ελάχιστη τιμή του $|z_x|$ είναι ίση με:

$$(OA) = (AK) - (OK) = 5 - \sqrt{2}$$

Η μέγιστη τιμή του $|z_x|$ είναι ίση με:

$$(OB) = (BK) + (OK) = 5 + \sqrt{2}$$



Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος είναι:

$$m = \left(5 - \sqrt{2}\right)^2 = 29 - 10\sqrt{2}$$

και η μέγιστη τιμή του είναι:

$$\mathrm{M} = \left(5+\sqrt{2}\right)^2 = 29+10\sqrt{2}$$

β) i) Είναι:

$$z_\alpha^{\,2012} = (1+i)^{2012} = \left[(1+i)^2\right]^{1006} = (2i)^{1006} = -2^{1006}$$

και

$$\overline{z}_\alpha^{\,2012} = (1-i)^{2012} = \left[(1-i)^2\right]^{1006} = (-2i)^{1006} = -2^{1006}$$

οπότε $A = 0$

ii) Για $x = \alpha$ έχουμε:

$$z_\alpha = f(\alpha)+g(\alpha)i \overset{z_\alpha = 1+i}{\Leftrightarrow} f(\alpha)+g(\alpha)i = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 1 \\ g(\alpha) = 1 \end{cases}$$

και η σχέση (2) γίνεται:

$$\left(f(\alpha)-1\right)^2+\left(g(\alpha)-1\right)^2 = c \Leftrightarrow$$

$$\left(1-1\right)^2+\left(1-1\right)^2 = c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα, για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(g(x)-1\right)^2 = 0$$

Επομένως:

$$f(x) = 1,\ x \in R \quad \text{και} \quad g(x) = 1,\ x \in R$$

ΘΕΜΑ 7ο :

Έστω $f(z) = z+\dfrac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2, για τους οποίους ισχύει $f(z)=2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_3 = \dfrac{z_1^4 z_2 + z_1 z_2^4}{32}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) Αν $f(z) \in R$ και $z \in C - R$, τότε:

i) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h \to +\infty}\left(\ln\left(|z|^h+1\right)-h\right)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{(t-2)^2\left(f(z)+4\right)}{t}+\dfrac{t^{2012}\left(4-f(z)\right)}{t-2} = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα ως προς t στο διάστημα $(0,2)$

γ) Αν $|f(z)| = |z|$, $z \in C^*$, τότε:

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_4 - z_5|$ όπου z_4 , z_5 δύο από τους μιγαδικούς z του (γ. i) ερωτήματος με $\mathrm{Im}(z_4)\cdot\mathrm{Im}(z_5) < 0$

ΛΥΣΗ

α) $f(z) = 2 \Leftrightarrow z + \dfrac{4}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3}\cdot i$

Άρα $z_1 = 1 + \sqrt{3}\cdot i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}\cdot i$ (2)

Είναι:

$$z_3 = \frac{z_1^{\,4}\cdot z_2 + z_1\cdot z_2^{\,4}}{32} = \frac{z_1 z_2}{32}\cdot\left(z_1^{\,3} + z_2^{\,3}\right) =$$

$$= \frac{z_1 z_2}{32}\cdot\left(z_1 + z_2\right)\cdot\left(z_1^{\,2} - z_1\cdot z_2 + z_2^{\,2}\right) \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{4}{32}\cdot 2\cdot(-8) = -2$$

γιατί $z_1\cdot z_2 = 4$, $z_1 + z_2 = 2$ και $z_1^{\,2} + z_2^{\,2} = \left(z_1 + z_2\right)^2 - 2\left(z_1\cdot z_2\right) = 2^2 - 2\cdot 4 = -4$

Ισχύει:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = 2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z_1 , z_2 και z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) i) Έχουμε:

$$f(z) \in R \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = \overline{\left(z + \frac{4}{z}\right)} \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = \bar{z} + \frac{4}{\bar{z}} \overset{\cdot(z\cdot\bar{z})}{\Leftrightarrow}$$

$$z\cdot\left(z\cdot\bar{z}\right) + 4\cdot\bar{z} = \bar{z}\cdot\left(z\cdot\bar{z}\right) + 4\cdot z \Leftrightarrow z\cdot|z|^2 + 4\cdot\bar{z} = \bar{z}\cdot|z|^2 + 4\cdot z \Leftrightarrow$$

$$|z|^2\left(z - \bar{z}\right) - 4\cdot\left(z - \bar{z}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(z - \bar{z}\right)\left(|z|^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z - \bar{z} = 0 \quad \text{ή} \quad |z|^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad \text{ή} \quad |z|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$z \in R \quad \text{ή} \quad |z| = 2 \overset{z\notin R}{\Leftrightarrow} |z| = 2 \qquad (3)$$

Είναι:

$$\lim_{h\to+\infty}\left(\ln\left(|z|^h + 1\right) - h\right) = \lim_{h\to+\infty}\left(\ln\left(2^h + 1\right) - \ln e^h\right) =$$

$$= \lim_{h\to+\infty}\ln\left(\frac{2^h + 1}{e^h}\right) = \lim_{h\to+\infty}\ln\left(\left(\frac{2}{e}\right)^h + \left(\frac{1}{e}\right)^h\right) = \lim_{t\to 0^+}\ln t = -\infty, \text{ γιατί αν θέσουμε}$$

$$t = \left(\frac{2}{e}\right)^h + \left(\frac{1}{e}\right)^h \quad \text{τότε} \quad \lim_{h\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{e}\right)^h + \left(\frac{1}{e}\right)^h\right) = 0$$

ii) Είναι:

$$\frac{(t-2)^2\left(f(z)+4\right)}{t}+\frac{t^{2012}\left(4-f(z)\right)}{t-2}=0 \Leftrightarrow$$

$$(t-2)^3\left(f(z)+4\right)+t^{2013}\left(4-f(z)\right)=0 \qquad (4)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t)=t^{2013}\,(4-f(z))+(t-2)^3\,(f(z)+4)\,,\quad t\in\left[0\,,\,2\right]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ ως άθροισμα συνεχών και $g(0)\cdot g(2)<0$, γιατί $g(0)=-8\cdot(f(z)+4)<0$ και

$g(2)=2^{2013}(4-f(z))>0$, λόγω της (5).

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα στο διάστημα $\left(0\,,2\right)$ η εξίσωση $g(t)=0$, λόγω της (4) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\dfrac{\left(t-2\right)^2\left(f(z)+4\right)}{t}+\dfrac{t^{2012}\left(4-f(z)\right)}{t-2}=0$, οπότε η δοθείσα εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0\,,2\right)$.

Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι:
$f(z)\in R$ και $z\in C-R$
και από την (3) έχουμε ότι $\left|z\right|=2$
Είναι: $\left|f(z)\right|\le\left|z\right|+\dfrac{4}{\left|z\right|}=2+\dfrac{4}{2}=4$,
δηλαδή $\left|f(z)\right|\le 4 \overset{f(z)\in R}{\Leftrightarrow} -4\le f(z)\le 4$,
όμως $f(z)=4\Leftrightarrow z+\dfrac{4}{z}=4\Leftrightarrow z=2$
και $f(z)=-4\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow z=-2$
και επειδή $z\in C-R$ τελικά ισχύει
$\boxed{-4<f(z)<4}$ (5)

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0\,,2\right)$, επειδή

$$g'(t)=2013t^{2012}(4-f(z))+3(t-2)^2(f(z)+4)>0$$

για κάθε $t\in(0,2)$, άρα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

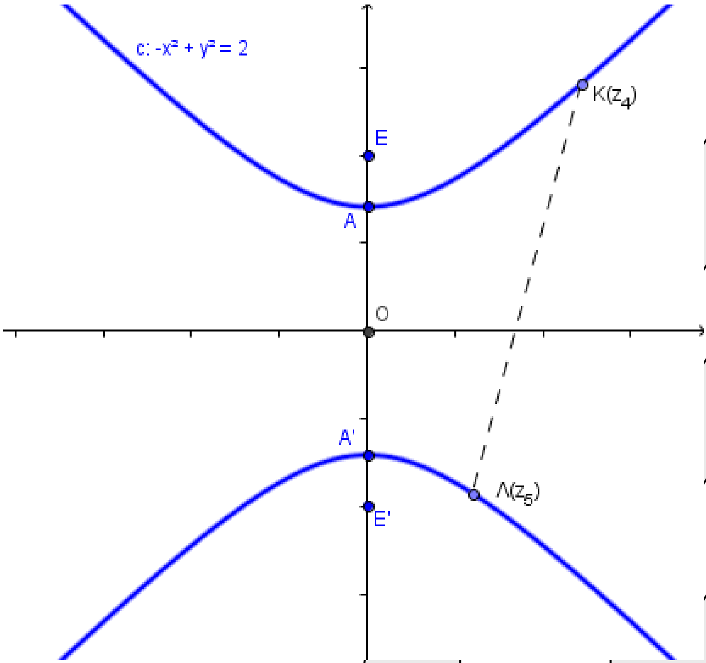
γ) i) Έστω $z=x+yi\,,\ z\neq 0$

$$\left|f(z)\right|=\left|z\right|\Leftrightarrow\left|z+\frac{4}{z}\right|=\left|z\right|\overset{\cdot|z|}{\Leftrightarrow}\left|z^2+4\right|=\left|z\right|^2\Leftrightarrow\left|z^2+4\right|^2=\left(z\cdot\bar{z}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\left(z^2+4\right)\left(\left(\bar{z}\right)^2+4\right)=z^2\left(\bar{z}\right)^2\Leftrightarrow z^2\left(\bar{z}\right)^2+4z^2+4\left(\bar{z}\right)^2+16=z^2\left(\bar{z}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$z^2+\left(\bar{z}\right)^2+4=0\overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}2\left(x^2-y^2\right)+4=0\Leftrightarrow y^2-x^2=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ισοσκελής υπερβολή $c: y^2-x^2=2$ με $\alpha=\beta=\sqrt{2}$ και $\gamma=2$, που έχει εστίες τα σημεία $E\left(0,2\right)$ και $E'\left(0,-2\right)$ και κορυφές τα σημεία $A\left(0,\sqrt{2}\right)$ και $A'\left(0,-\sqrt{2}\right)$



ii) Είναι:

$$\mathrm{Im}(z_4)\cdot \mathrm{Im}(z_5) < 0$$

Άρα οι εικόνες των z_4 , z_5 στο επίπεδο θα βρίσκονται σε διαφορετικό κλάδο της υπερβολής $c : y^2 - x^2 = 2$ Αν Κ , Λ οι εικόνες των z_4 , z_5 αντιστοίχως, τότε έχουμε:

$$|z_4 - z_5| = (\mathrm{K\Lambda}) \geq (\mathrm{AA'}) = 2\sqrt{2}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|z_4 - z_5|$ είναι η $2\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 8ο :

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \geq e^x$ **, για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **(1)**
- $f(x)f(-x) = 1$ **, για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **(2)**

α) Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

iii) Αν για τους θετικούς αριθμούς α , β , γ ισχύει $\ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\alpha+\gamma} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τις σχέσεις (1) και (2) αντίστοιχα έχουμε:

$$f(0) \geq 1 \quad \text{και} \quad f^2(0) = 1$$

Άρα $f(0) = 1$

Επίσης, αν θέσουμε όπου x το $-x$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(-x) \geq e^{-x} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{e^x} \Rightarrow f(x) \leq e^x, \quad x \in R \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$f(x) = e^x, \quad x \in R$$

β) **i)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$g'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)e^x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	e ελάχιστο	$\nearrow$	

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = e$

ii) Είναι:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} \cdot e^x\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, άρα

$$g(\Delta_1) = \left[g(1), \lim_{x \to 0^+} g(x)\right) = [e, +\infty)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, άρα

$$g(\Delta_2) = \left[g(1), \lim_{x \to +\infty} g(x)\right) = [e, +\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = [e, +\infty)$$

iii) Είναι:

- $\ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = 1 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = e \quad (4)$
- $g(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha} \geq e$, $g(\beta) = \dfrac{e^{\beta}}{\beta} \geq e$ και $g(\gamma) = \dfrac{e^{\gamma}}{\gamma} \geq e$

Επομένως

$$g(\alpha)g(\beta) + g(\beta)g(\gamma) + g(\gamma)g(\alpha) \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{e^{\alpha}}{\alpha}\cdot\frac{e^{\beta}}{\beta} + \frac{e^{\beta}}{\beta}\cdot\frac{e^{\gamma}}{\gamma} + \frac{e^{\gamma}}{\gamma}\cdot\frac{e^{\alpha}}{\alpha} \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma e^{\alpha+\beta} + \alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha}}{\alpha\beta\gamma} \geq 3e^2 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha} + \gamma e^{\alpha+\beta}}{e} \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$$

ΘΕΜΑ 9ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(R) = R$, οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\textbf{συν}^2 f(x) + 4f(x) = x \quad \textbf{για κάθε } x \in R \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = $ ημx έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

- $συνf(x_1) = συνf(x_2) \Rightarrow συν^2 f(x_1) = συν^2 f(x_2) \quad (2)$
- $4f(x_1) = 4f(x_2) \quad (3)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$συν^2 f(x_1) + 4f(x_1) = συν^2 f(x_2) + 4f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «$1-1$», οπότε αντιστρέφεται.

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το R, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι το R

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} απομένει να βρούμε τον τύπο της

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\text{συν}^2 y + 4y = f^{-1}(y) \quad \text{ή} \quad f^{-1}(y) = 4y + \text{συν}^2 y$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ με } \ f^{-1}(x) = 4x + \text{συν}^2 x$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η συνάρτηση $\text{συν}f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, όπως επίσης και η συνάρτηση $\text{συν}^2 f(x)$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$2\text{συν}f(x)\left(\text{συν}f(x)\right)' + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$-2\text{συν}f(x)\text{ημ}f(x)f'(x) + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(4 - 2\text{συν}f(x)\text{ημ}f(x)\right)\cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{4 - 2\text{ημ}f(x)\text{συν}f(x)}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

1ος τρόπος:

$$\begin{cases} |\text{ημ}f(x)| \le 1 \\ |\text{συν}f(x)| \le 1 \end{cases} \Rightarrow |\text{ημ}f(x)|\cdot|\text{συν}f(x)| \le 1 \Rightarrow$$

$$|\text{ημ}f(x)\text{συν}f(x)| \le 1 \Rightarrow -1 \le \text{ημ}f(x)\text{συν}f(x) \le 1 \Rightarrow$$

$$2\text{ημ}f(x)\text{συν}f(x) \le 2 \Rightarrow 2 - 2\text{ημ}f(x)\text{συν}f(x) \ge 0 \Rightarrow$$

$$4 - 2\text{ημ}f(x)\text{συν}f(x) > 0$$

2ος τρόπος:

$$4 - 2\text{ημ}f(x)\text{συν}f(x) = 3 + 1 - 2\text{ημ}f(x)\text{συν}f(x) =$$

$$= 3 + \text{ημ}^2 f(x) + \text{συν}^2 f(x) - 2\text{ημ}f(x)\text{συν}f(x) =$$

$$= 3 + \left(\text{ημ}f(x) - \text{συν}f(x)\right)^2 > 0$$

οπότε:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Για $x = 0$ έχουμε:

$$f^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

Όμως:

$$f'(1) = \frac{1}{4 - 2\text{ημ}f(1)\cdot\text{συν}f(1)} \overset{f(1)=0}{=} \frac{1}{4 - 2\text{ημ}0\cdot\text{συν}0} = \frac{1}{4}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{4}$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f^{-1}(x)-\eta\mu x=4x+\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu x\,,\ \ x\in R$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4},\,0\right]$, ως πράξεις συνεχών

συναρτήσεων.

- $h\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot h(0)=\underbrace{\frac{1+\sqrt{2}-2\pi}{2}}_{<0}\cdot 1<0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}\,,\ 0\right)$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{4}\,,\ 0\right)$ είναι:

$$h'(x)=4-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=\underbrace{4-\sigma\upsilon\nu x}_{>0}+\underbrace{(-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)}_{>0}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{4}\,,\ 0\right)$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 10ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0\,,+\infty)\to R$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο α με $\alpha>0$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,\,y>0$ (1)**
- **$f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ (2)**

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$

β) $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$

γ) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με $\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}$ για κάθε $x>0$

Β) Αν η ευθεία $\varepsilon: x-2\sqrt{\alpha}\,y+\alpha=0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\alpha\,,f(\alpha))$, να βρείτε τον τύπο της f.

ΛΥΣΗ

Α) α) Για $y=1$ και $x>0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x\cdot 1)=f(x)f(1)\Leftrightarrow f(x)=f(x)f(1)\Leftrightarrow f(x)\big(1-f(1)\big)=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(1)=1 \qquad (3)$$

Για $x>0$ και $y=\frac{1}{x}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \qquad (4)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0\,,+\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0\,,+\infty)$ και επειδή $f(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι :

$$f(x)>0 \quad \text{για κάθε } x\in(0\,,+\infty) \qquad (5)$$

Από την υπόθεση είναι $f(0)=0$, οπότε τελικά έχουμε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha>0$, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ (6)

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο $x_o\in(0\,,+\infty)$

Έστω $x_o\in(0\,,+\infty)$, τότε για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ με $x\neq x_o$ θέτουμε $x=x_o\dfrac{h}{\alpha}$ με $h>0$, οπότε όταν το $x\to x_o$ το $h\to\alpha$ και έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{f\left(x_o\frac{h}{\alpha}\right)-f(x_o)}{x_o\frac{h}{\alpha}-x_o}\overset{(1)}{=}\frac{f(x_o)f\left(\frac{h}{\alpha}\right)-f(x_o)}{\frac{x_o(h-\alpha)}{\alpha}}=\frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f\left(h\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha}\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f(h)f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha}\overset{(4)}{=}\frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f(h)\frac{1}{f(\alpha)}-1}{h-\alpha}=\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{h\to\alpha}\dfrac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}=\dfrac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}$, αφού $\dfrac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}$ σταθερά.
- $\lim\limits_{h\to\alpha}\dfrac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}\overset{(6)}{=}f'(\alpha)$

Επομένως

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{h\to\alpha}\left(\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}\right)=$$

$$=\lim_{h\to\alpha}\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot\lim_{h\to\alpha}\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}=\frac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o\in(0\,,+\infty)$ με $f'(x_o)=\dfrac{\alpha f(x_o)}{x_o f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$,

οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$

Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\frac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{x f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)} \qquad (7)$$

B) Είναι:

$$M\big(\alpha, f(\alpha)\big) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha}\cdot f(\alpha) + \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{\alpha}\cdot f(\alpha) = 2\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow f(\alpha) = \sqrt{\alpha} \qquad (8)$$

Είναι:

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\ , \quad \alpha > 0 \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) έχουμε:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \big(\ell n f(x)\big)' = \left(\frac{1}{2}\ell n x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\ell n f(x) = \frac{1}{2}\ell n x + c \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \ell n f(x) = \ell n\sqrt{x} + c\ , \quad x > 0 \qquad (10)$$

Για $x = \alpha$ από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ell n f(\alpha) = \ell n\sqrt{\alpha} + c \overset{(8)}{\Leftrightarrow} \ell n\sqrt{\alpha} = \ell n\sqrt{\alpha} + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ell n f(x) = \ell n\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}\ , \quad x > 0$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο 0 με $f(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x}\ , \quad x \geq 0$$

ΘΕΜΑ 11ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha) < f'(x) < f(\beta)$ (1), όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha = \beta - 1 > 0$ (2). Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(\alpha)\cdot x$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(\alpha) < \dfrac{f(\beta)}{2}$

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(-\beta\ ,\ \alpha)$

δ) Υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\dfrac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \dfrac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2\dfrac{f(-\beta)}{f'(x_1)} = 4\beta - 1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha\ ,\ \beta]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha\ ,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(\xi) < f(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < f(\beta) \qquad (3)$$

Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 1 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$f(\beta) - f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow -f(\alpha) < 0 \Leftrightarrow f(\alpha) > 0 \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (5) έχουμε:

$$f'(x) > f(\alpha) > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) 1ος τρόπος:

Είναι:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \overset{(4)}{=} f(\beta) - f(\alpha)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f'(\xi) \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) - f(\alpha) \Rightarrow 2f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

2ος τρόπος:

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = f'(x) - f(\alpha) \qquad (6)$

Από τις σχέσεις (1) και (6) έχουμε:

$$g'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R

Ισχύει:

$$\alpha < \beta \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha f(\alpha) < f(\beta) - \beta f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) + (\beta - \alpha) f(\alpha) < f(\beta) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} 2f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

γ) Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ -\beta < -1 \end{cases} \Rightarrow -\beta < -1 < 0 < \alpha \qquad (7)$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-\beta, \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-\beta, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha)-f(-\beta)}{\alpha+\beta}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f'(\xi_1) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\alpha)-f(-\beta)}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) + \beta f(\alpha) - f(\alpha) < -f(-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\alpha f(\alpha)+(\beta-1)f(\alpha)<-f(-\beta)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2\alpha f(\alpha)<-f(-\beta)$$

Από τις σχέσεις (5) και (7) έχουμε:

$$2\alpha f(\alpha)>0 \quad \text{άρα} \quad -f(-\beta)>0, \text{ οπότε } f(-\beta)<0 \quad (8)$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\beta,\ \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R.
- $f(-\beta)f(\alpha)<0$, λόγω των σχέσεων (5) και (8)

Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-\beta\ ,\ \alpha]$, άρα θα υπάρχει ένα $\rho\in(-\beta\ ,\ \alpha)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τέτοιο ώστε $f(\rho)=0$ (9)

δ) Είναι:

$$-\beta<\rho<\alpha<\beta$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα

$$[-\beta\ ,\ \rho]\ ,\ [\rho\ ,\ \alpha] \text{ και } [\rho\ ,\ \beta]$$

άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $x_1\in(-\beta\ ,\rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(\rho)-f(-\beta)}{\rho-(-\beta)}\overset{(9)}{\Leftrightarrow}f'(x_1)=\dfrac{-f(-\beta)}{\rho+\beta}\overset{f'(x_1)>0}{\Leftrightarrow}\rho+\beta=\dfrac{-f(-\beta)}{f'(x_1)}$
- $x_2\in(\rho\ ,\ \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=\dfrac{f(\alpha)-f(\rho)}{\alpha-\rho}\overset{(9)}{\Leftrightarrow}f'(x_2)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-\rho}\overset{f'(x_2)>0}{\Leftrightarrow}\alpha-\rho=\dfrac{f(\alpha)}{f'(x_2)}$
- $x_3\in(\rho\ ,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_3)=\dfrac{f(\beta)-f(\rho)}{\beta-\rho}\overset{(9)}{\Leftrightarrow}f'(x_3)=\dfrac{f(\beta)}{\beta-\rho}\overset{f'(x_3)>0}{\Leftrightarrow}\beta-\rho=\dfrac{f(\beta)}{f'(x_3)}$

Είναι:

$$\frac{f(\beta)}{f'(x_3)}+\frac{f(\alpha)}{f'(x_2)}-2\frac{f(-\beta)}{f'(x_1)}=(\beta-\rho)+(\alpha-\rho)+2(\rho+\beta)=\alpha+3\beta\overset{(2)}{=}4\beta-1$$

ΘΕΜΑ 12ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$, έχει σύνολο τιμών $f(A)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\eta\mu\big(f(x)\big)=\dfrac{x}{x+1}$, $x\geq-\frac{1}{2}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$, $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τις ασύμπτωτες.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ και η συνάρτηση $\eta\mu x$ στο R,

άρα η συνάρτηση $\eta\mu f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, ως σύνθεση παραγωγισίμων.

Η συνάρτηση $\dfrac{x}{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$, άρα παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) για κάθε $x\in\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ έχουμε:

$$\left[\eta\mu f(x)\right]' = \left(\frac{x}{x+1}\right)' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad (2)$$

Είναι:

$$\eta\mu^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 - \eta\mu^2 f(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 - \frac{x^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2} \qquad (3)$$

Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ **είναι:**

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu f(x) > 0 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) έχουμε:

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}\cdot f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad x\in\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι και «1 – 1» , επομένως αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση f είναι «1 – 1» και έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, επομένως για κάθε $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ υπάρχει μοναδικό $x\in\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Άρα για κάθε $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ η σχέση (1) γράφεται:

$$\eta\mu y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x\eta\mu y + \eta\mu y = x \Leftrightarrow (1-\eta\mu y)x = \eta\mu y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\eta\mu y}{1-\eta\mu y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{\eta\mu y}{1-\eta\mu y}$$

Επομένως:

$$f^{-1} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R \ \ \mu\varepsilon \ \ f^{-1}(x) = \frac{\eta\mu x}{1-\eta\mu x}$$

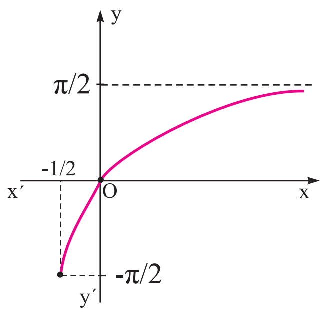
γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $f(A) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ και επειδή $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

Επομένως η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): \ y = \frac{\pi}{2}$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ για $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in R$, που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

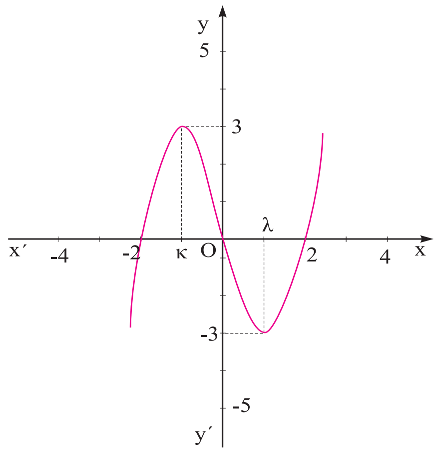
Σημείωση:

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ 13ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, που έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$ και της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

β) Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει ασύμπτωτες , να τις βρείτε.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτησης g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση

δ) Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού, τότε:

i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ και τον

τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει και αρκεί $f(x) \neq 0$

Είναι:

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \quad \text{και} \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $A_g = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

β) • Από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, προκύπτει ότι:

○ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

○ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

• Είναι:

○ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x < -2$, οπότε $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

○ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x > -2$, οπότε $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της της συνάρτησης g (*)

• Είναι:

○ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (-2, 0)$, οπότε $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

○ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (0, 2)$, οπότε $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της της συνάρτησης g (*)

• Είναι:

○ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (0, 2)$, οπότε $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

○ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x > 2$, οπότε $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της

της συνάρτησης g $(*)$

$(*)$ Για την εύρεση μιας κατακόρυφης ασύμπτωτης, ως γνωστόν, αρκεί ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια να είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Εδώ ο υπολογισμός και των δύο πλευρικών ορίων, σε κάθε περίπτωση, έγινε γιατί μας είναι απαραίτητα για την χάραξη της γραφικής παράστασης, που ζητείται στο επόμενο ερώτημα.

γ) Για κάθε $x \in A_g = R - \{-2\,,\,0\,,\,2\}$ έχουμε $g'(x) = \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ (1)

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g', σε κάθε διάστημα που ορίζεται, έχει το αντίθετο πρόσημο από αυτό που έχει η συνάρτηση f', άρα οι συναρτήσεις g και f έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας σε κάθε διάστημα.

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty\,,\,\kappa]$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty\,,-2)$ και $(-2\,,\,\kappa]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\kappa\,,\,\lambda]$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\kappa\,,\,0)$ και $(0\,,\,\lambda]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\lambda\,,+\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\lambda\,,2)$ και $(2\,,+\infty)$

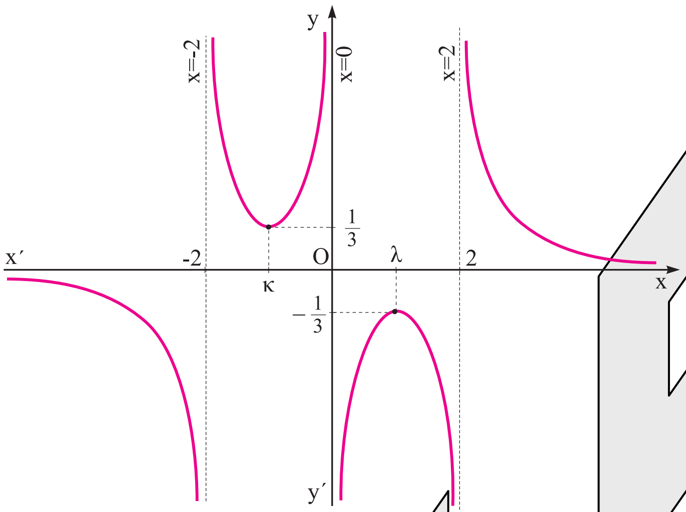
Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		κ		0		λ		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{3}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{3}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0
					τοπ. ελάχιστο				τοπ. μέγιστο				

♦ Η συνάρτηση g στο $x_0 = \kappa$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $g(\kappa) = \dfrac{1}{f(\kappa)} = \dfrac{1}{3}$

♦ Η συνάρτηση g στο $x_1 = \lambda$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $g(\lambda) = \dfrac{1}{f(\lambda)} = -\dfrac{1}{3}$

Η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, είναι:



δ) i) Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού και έχει τρεις ρίζες, τους αριθμούς $-2, 0, 2$, άρα είναι της μορφής:

$$f(x) = \alpha x(x+2)(x-2) = \alpha x(x^2-4) = \alpha(x^3-4x),\ x \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \alpha(3x^2-4)$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(3x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Άρα:

$$\kappa = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \text{και} \qquad \lambda = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Είναι:

$$f(\kappa) = 3 \Leftrightarrow f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \alpha\left(\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\left(-\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{3}}{9}\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{27}{16\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3-4x\right),\ \ x \in R$$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E = \int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3 - 4x\right)dx - \int_{0}^{2} \frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3 - 4x\right)dx =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16}\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} - \frac{9\sqrt{3}}{16}\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(0 - 4 + 8\right) - \frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(4 - 8 - 0\right) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot 4 - \frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(-4\right) = \frac{8\cdot 9\sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$