

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ο.Ε.Φ.Ε. 2012 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 9

B. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 3

Γ. Τι μας δίνουν τα μέτρα θέσης και τι τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας μιας κατανομής ενός συνόλου δεδομένων;

Μονάδες 3

Δ. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η αθροιστική συχνότητα N_i μιας τιμής x_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής x_i .

β. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ τότε η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

γ. Στην μια κανονική κατανομή το 0,3% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται εκτός του διαστήματος $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.

δ. Αν η διάμεσος n παρατηρήσεων είναι ίση με μία από αυτές τότε είναι βέβαιο ότι το πλήθος n των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός.

ε. Αν A,B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε οι εκφράσεις «Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B» και «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B» είναι ισοδύναμες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Εξετάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνταξιούχων ως προς το ποσό της μηνιαίας συνολικής σύνταξης που λαμβάνουν σε εκατοντάδες ευρώ. Για την κατανομή τους έχουν δημιουργηθεί 5 ισοπλάτεις κλάσεις και γνωρίζουμε ότι:

- το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων v_i είναι 250.
- το μέσο της άνω βάσης του ορθογώνιου του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$, που αντιστοιχεί στην δεύτερη κλάση είναι το σημείο A(10,α).
- το εύρος των παρατηρήσεων είναι 20.
- η συχνότητα $f_1\%$ είναι τριπλάσια της $f_2\%$ και δεκαπλάσια της $f_4\%$, ενώ η $f_2\%$ είναι διπλάσια της $f_3\%$ και πενταπλάσια της $f_5\%$.

A. Να δείξετε ότι $\alpha=20$ και να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής όλων των συχνοτήτων.

Μονάδες 8

B. Να υπολογιστεί η μέση τιμή, καθώς και η διάμεσος των συντάξεων. Τι είδους ασυμμετρία έχει η κατανομή;

Μονάδες 6

Γ. Αν η κυβέρνηση αποφασίσει μείωση των συντάξεων που υπερβαίνουν τα 1300 ευρώ, βρείτε το ποσοστό των θιγόμενων συνταξιούχων καθώς και να εκτιμήσετε το πλήθος τους αν γνωρίζουμε ότι ο συνολικός αριθμός των συνταξιούχων της χώρας είναι 2850000.

Μονάδες 5

Δ. Αν δοθεί επίδομα στους έχοντες συνολικό εισόδημα (από συντάξεις 12 μηνών) μικρότερο ή ίσο των 8640 ευρώ τότε:

α. επιλέγοντας τυχαία από το δείγμα έναν συνταξιούχο, να βρεθεί η πιθανότητα να λάβει επίδομα.

Μονάδες 3

β. αν το επίδομα δοθεί από τα χρήματα, που θα εξοικονομήσουν τα ταμεία αφαιρώντας 100 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της τρίτης κλάσης, 200 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της τέταρτης κλάσης και 400 ευρώ από καθένα της πέμπτης κλάσης και τα οποία μοιραστούν εξίσου στους δικαιούχους, τότε να βρεθεί το ποσό που αναμένεται να λάβει ανά μήνα ο κάθε δικαιούχος.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3\sqrt{x} - 6}{x - 4}$ και $g(x) = 2P(B)\ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{16}x^2$ και τα A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 4

B. Αν η πιθανότητα P(A) του ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $x_0 = 4$ σχηματίζει με τον

άξονα x'x γωνία $\frac{\pi}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(B).

Μονάδες 8

Γ. Αν $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6} \right\}$ τότε:

α. να δείξετε ότι $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$.

Μονάδες 5

β. να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ή να μην πραγματοποιηθεί το B.

Μονάδες 4

γ. να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^4+2x^2+1$, $x \in \mathbf{R}$ και έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B δύο ενδεχόμενα του Ω για τα οποία ισχύει $f(P(B))=P(A)$.

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B. Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B αδύνατο ενδεχόμενο.

Μονάδες 7

Γ. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας απόλυτων συχνοτήτων v_i και τα ενδεχόμενα Γ, Δ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , διαφορετικά των A και B με $\Gamma \subseteq \Delta$ και $\Gamma \neq \Delta$.

x_i	v_i
1	$2P(\Gamma)$
2	$4P(\Delta)$
3	$4P(\Gamma)+4P(\Delta)$
4	$P(A)$
Σύνολα	

α. Να αποδείξετε ότι $v_1=1$ και $v_2=3$ και να συμπληρωθεί ο πίνακας.

Μονάδες 6

β. Να υπολογιστεί η διάμεσος των παρατηρήσεων.

Μονάδες 3

γ. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(\Gamma \cap \Delta)$ και $P(\Gamma \cup \Delta)$.

Μονάδες 3