

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

### ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση	Κέντρο	Ακτίνα	Εφαπτομένη στο $A(x_1, y_1)$
$x^2 + y^2 = \rho^2$	$K(0,0)$	$\rho$	$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$	$K(x_0, y_0)$	$\rho$	$(x-x_0) \cdot (x_1-x_0) + (y-y_0) \cdot (y_1-y_0) = \rho^2$

**Παρατήρηση :** Η εξίσωση :  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει :

- ❖ Κύκλο όταν :  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ , με κέντρο  $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$  και ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$ .
- ❖ Σημείο όταν :  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ .
- ❖ Είναι αδύνατη όταν :  $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ .

### ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Εξίσωση	Εστία	Διευθετούσα	Κορυφή	Άξονας Συμμετρίας	Εφαπτομένη στο $A(x_1, y_1)$
$\psi^2 = 2\rho \cdot \chi$	$E(\frac{\rho}{2}, 0)$	$\chi = -\frac{\rho}{2}$	$O(0,0)$	$\chi\chi'$	$\psi \cdot \psi_1 = \rho \cdot (\chi + \chi_1)$
$\chi^2 = 2\rho \cdot \psi$	$E(0, \frac{\rho}{2})$	$\psi = -\frac{\rho}{2}$	$O(0,0)$	$\psi\psi'$	$\chi \cdot \chi_1 = \rho \cdot (\psi + \psi_1)$

### ΕΛΛΕΙΨΗ

Εξίσωση	Εστίες	Κέντρο	Εφαπτομένη στο $A(x_1, y_1)$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	$E'(-\gamma, 0)$ , $E(\gamma, 0)$	$O(0,0)$	$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$
$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$E'(0, -\gamma)$ , $E(0, \gamma)$	$O(0,0)$	$\frac{x \cdot x_1}{\beta^2} + \frac{y \cdot y_1}{a^2} = 1$

**Παρατήρηση :** Ισχύει πάντα  $a, \beta, \gamma > 0$  και  $a^2 = \beta^2 + \gamma^2$ , όπου  $a > \gamma$  και  $a > \beta$

## ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Εξίσωση	Εστίες	Κέντρο	Εφαπτομένη στο $A(x_1, y_1)$	Ασύμπτωτες
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	$E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$	$O(0, 0)$	$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$	$y = \pm \frac{\beta}{a} \cdot x$
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$	$E'(0, -\gamma), E(0, \gamma)$	$O(0, 0)$	$\frac{y \cdot y_1}{a^2} - \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} = 1$	$y = \pm \frac{a}{\beta} \cdot x$

**Παρατήρηση :** Ισχύει πάντα ότι :  $\alpha, \beta, \gamma > 0, \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2, \gamma > \alpha, \gamma > \beta$ .

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Έστω  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δυο σημεία μιας κωνικής τομής και  $M$  το μέσο του  $AB$ . Τότε :

- ❖ Αν είναι γνωστό το  $M(\alpha, \beta)$ , για να βρούμε την εξίσωση της  $AB$  κάνουμε τα εξής :
  - Επειδή τα  $A$  και  $B$  ανήκουν σε δοσμένη κωνική τομή , οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν την εξίσωση της κωνικής τομής. Προκύπτουν έτσι δυο εξισώσεις.
  - Τις παραπάνω εξισώσεις τις αφαιρούμε κατά μέλη, παραγοντοποιούμε τις διαφορές  $x_1^2 - x_2^2, y_1^2 - y_2^2$  και σχηματίζουμε μια σχέση της οποίας το ένα μέλος είναι το κλάσμα :  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .
  - Θέτουμε  $x_1 + x_2 = 2\alpha$  και  $y_1 + y_2 = 2\beta$ .
  - Έχοντας υπολογίσει το κλάσμα  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  έχουμε ήδη βρει τον συντελεστή διεύθυνσης της  $AB$ , επίσης γνωρίζουμε το  $M$  , οπότε βρίσκουμε την εξίσωση της  $AB$ .
- ❖ Αν η χορδή  $AB$  της παραβολής  $C: \psi^2 = 2\rho\chi$ , διέρχεται από την εστία της τότε ισχύει ότι :
  - $y_1 \cdot y_2 = -p^2$  ( Διότι τα  $A, B, E$  συνευθειακά )
  - Οι εφαπτόμενες της  $C$  στα  $A$  και  $B$  τέμνονται πάνω στην διευθετούσα της.
  - Αν οι εφαπτόμενες στα  $A$  και  $B$  τέμνονται στο  $\Sigma(x_0, y_0)$  , τότε η  $AB$  έχει εξίσωση :  $\psi \cdot \psi_0 = \rho \cdot (\chi + \chi_0)$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις :

α ) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C:  $x^2 + \psi^2 = 5$ , στο σημείο A(2,-1) είναι  $\varepsilon$  : .....

β ) Η εξίσωση  $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$ , παριστάνει κύκλο όταν : .....

γ ) Αν η εξίσωση  $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο, τότε το κέντρο του και η ακτίνα του είναι : K(.....),  $\rho = \dots$

δ ) Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου C:  $x^2 + \psi^2 = 9$  είναι :  $x = \dots$   
 $\psi = \dots$

2. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις :

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. Ο κύκλος με κέντρο K(1,-1), ο οποίος διέρχεται από το A(4,3) έχει εξίσωση : $(x-1)^2 + (\psi+1)^2 = 25$ .                           | Σ | Λ |
| 2. Η ευθεία με εξίσωση $x + \psi - 2 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο C: $x^2 + \psi^2 = 2$ .   | Σ | Λ |
| 3. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C: $x^2 + \psi^2 = 13$ , στο σημείο A(-2,3) είναι η : $2x - 3\psi - 13 = 0$                    | Σ | Λ |
| 4. Η εξίσωση : $x^2 + \psi^2 + 2x - 2\psi - 2 = 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο K(-1,1) και ακτίνα $\rho = 2$ .                          | Σ | Λ |
| 5. Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + \psi^2 + ax + b\psi + \gamma = 0$ είναι:<br>$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{4}$                | Σ | Λ |
| 6. Η ευθεία $3x - 4\psi - 19 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο C: $(x-2)^2 + (\psi-3)^2 = 25$ .  | Σ | Λ |
| 7. Ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα AB, όπου A(-3,4) και B(3,-4), έχει εξίσωση : $x^2 + \psi^2 = 5^2$ .                                   | Σ | Λ |
| 8. Η εξίσωση : $x^2 + \psi^2 + \lambda x + (\lambda + 2)\psi - \lambda - 1 = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$ . | Σ | Λ |

3. Να αντιστοιχήσετε κάθε εξίσωση κύκλου της στήλης A με την εξίσωση μιας εφαπτομένης του από τη στήλη B.

ΣΤΗΛΗ A

i)  $x^2 + \psi^2 = 10$

ii)  $x^2 + \psi^2 - 2x + 4\psi + 3 = 0$

iii)  $x^2 + \psi^2 - 4\psi - 1 = 0$

ΣΤΗΛΗ B

1.  $x + \psi + 3 = 0$

2.  $2x + \psi - 7 = 0$

3.  $3x - \psi - 10 = 0$

4.  $x + 2\psi - 5 = 0$

4. Ένας κύκλος C έχει κέντρο το σημείο (0,0) και εφάπτεται στην ευθεία  $\varepsilon : x + \psi - 4 = 0$ . Να βρείτε :

i) την εξίσωση του κύκλου.

ii) το σημείο επαφής

- iii ) την άλλη εφαπτομένη του κύκλου που είναι παράλληλη στην  $\varepsilon$ .
5. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση :
- i )  $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi - 8\psi - 11 = 0$       ii )  $\chi^2 + \psi^2 + 6\chi = 0$   
 iii )  $2\chi^2 + 2\psi^2 - 10\chi + 14\psi + 5 = 0$       iv )  $4\chi^2 + 4\psi^2 - 36\chi + 45 = 0$ .
6. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου όταν :
- α ) έχει κέντρο  $K(-2,4)$  και διέρχεται από το  $A(4,12)$ .  
 β ) έχει διάμετρο το  $AB$  με  $A(1,3)$  και  $B(-3,5)$ .
7. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου , όταν το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας  $\varepsilon : 4\chi - 5\psi + 11 = 0$  και διέρχεται από τα σημεία  $A(2,1)$  και  $B(-1,4)$ .
8. Δίνεται ο κύκλος  $C: \chi^2 + \psi^2 = 5$  . Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι κάθετες στην ευθεία  $\eta : \chi + 2\psi + 3 = 0$ .
9. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου  $C: \chi^2 + \psi^2 = 25$  , οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $\Sigma(-5,15)$ .
10. Δίνεται η εξίσωση  $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi + 8\psi + 16 = 0$ .
- i ) να δείξετε ότι αυτή παριστάνει πάντα κύκλο.  
 ii ) να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.  
 iii ) να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που είναι παράλληλες στην  $3\chi + 4\psi - 5 = 0$ .
11. Δίνεται η εξίσωση :  $\chi^2 + \psi^2 + 4\chi + 6\psi - 12 = 0$ .
- i ) να δείξετε ότι αυτή παριστάνει πάντα κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.  
 ii ) να εξετάσετε αν διέρχεται από το σημείο  $A(-5,1)$ .  
 iii ) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο  $A$ .
12. Ένας κύκλος με κέντρο  $K(1,1)$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon : 3\chi + 4\psi + 8 = 0$  στα σημεία  $A$  και  $B$ . Να βρείτε την εξίσωση του όταν  $(AB) = 8$ .
13. Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία  $\chi - \psi - 1 = 0$  και εφάπτεται της ευθείας  $4\chi - 3\psi + 19 = 0$  στο σημείο  $A(-1,5)$ . Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.
14. Δίνεται ο κύκλος  $C: \chi^2 + \psi^2 - 10\chi - 6\psi + 9 = 0$  . Να δειχθεί ότι διέρχεται από το σημείο  $\Sigma(2,-1)$  και να βρείτε τις συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού του  $\Sigma'$ .
15. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο  $K(2,-2)$  και αποκόπτει από την ευθεία  $\varepsilon : 3\chi - 4\psi + 6 = 0$  χορδή μήκους 12.
16. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την κοινή χορδή των κύκλων  $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi = 0$  και  $\chi^2 + \psi^2 - 6\psi = 0$ .

17. Δίνεται ο κύκλος  $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$  και η ευθεία  $\varepsilon: 3x-4y+20=0$ . Να βρεθεί η εξίσωση του συμμετρικού του κύκλου  $C$ : ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ .

18. Στο επίπεδο θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα  $XOY$  και σταθερό σημείο  $A$  αυτού με  $|\overline{OA}| = 3$ . Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία  $M(x, y)$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει:  $\overline{OM} \cdot (\overline{OM} - 2\overline{OA}) = 7$ .

[ Γενικές Εξετάσεις 1982 ]

19. Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: 5x+3y+2=0$  και ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ , που τέμνονται στα σημεία  $M, N$ .

α) να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x+3y+2) = 0 \quad (1)$$

παριστάνει κύκλο, ο οποίος διέρχεται από τα  $M, N$ . Για ποια τιμή του  $\lambda$  ο κύκλος αυτός διέρχεται από το  $(0,0)$ ;

β) να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της ερώτησης (α) ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

[ Γενικές Εξετάσεις 1990 ]

20. Δίνονται οι κύκλοι  $C_1, C_2$  με εξισώσεις:

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$C_2: (x+2\kappa)^2 + (y-\lambda)^2 = 25, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος  $C_1$  έχει κέντρο το σημείο  $K_1(2,1)$  και ακτίνα  $\rho_1=2$ .

β) Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$  έτσι ώστε οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  να έχουν το ίδιο κέντρο.

γ) Να εξετάσετε, αν τα σημεία  $A(4,1), B(1,1)$  ανήκουν στον κύκλο  $C_1$ .

[ Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων 2002 ]

21. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 5, \quad (1)$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\lambda$  η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β) Για  $\lambda = 1$ , να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1).

γ) Για  $\lambda = 1$ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με εξίσωση  $y = x$  και του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1).

[ Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων 2003 ]

22. Α. Δίνεται η εξίσωση C:  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ , όπου  $\mu, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των  $\mu, \lambda$ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O.

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς  $\mu, \lambda$  ισχύει η σχέση :  
 $3\mu + 2\lambda = 0$ .

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$  για τις διάφορες τιμές των  $\mu$  και  $\lambda$ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε τα  $\mu, \lambda$  έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία  $x + y + 2 = 0$ , να ισχύει  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .

γ. Για τις τιμές των  $\mu, \lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα (β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.

[ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2001 ]

23. Δίνεται η εξίσωση C:  $x^2 + y^2 - 2\chi \sin\theta - 2\eta \mu\theta - 1 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ .

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\theta$  η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Β. Αν  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο M(1,2).

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του  $\theta$  τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα  $\rho = 1$ .

[ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2002 ]

24. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση C:  $(\chi - 3)^2 + (\psi - 2)^2 = 4$ .

i) να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το (0,0),

ii) να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες μεταξύ τους.

25. Δίνονται οι παραβολές  $C_1: \psi^2 = -8\chi$  και  $C_2: \chi^2 = 16\psi$ .

α) να βρείτε τις εστίες και τις διευθετούσες των  $C_1, C_2$ .

β) να σχεδιάσετε τις παραπάνω παραβολές.

γ) να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_1$  στο A(-2,4).

δ) να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_2$  στο B(-4,1).

ε) να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_1$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\chi - \psi - 4 = 0$ .

26. Να αντιστοιχήσετε σε κάθε εξίσωση παραβολής της Στήλης Α με την εστία και τη διευθετούσα της από τη Στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α

i)  $\psi^2 = 8\chi$

ii)  $\chi^2 = -16\psi$

ΣΤΗΛΗ Β

1. E(-4,0), δ:  $\psi = -4$

2. E(-1,0), δ:  $\chi = 1$

iii )  $\psi^2 = -4\chi$

3. E(2,0) ,  $\delta : \chi = -2$

4. E(1,0) ,  $\delta : \chi = -1$

5. E(0,-4) ,  $\delta : \psi = 4$

27. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

1. Η παραβολή  $\psi^2 = 2\rho\chi$  έχει εστία .....και διευθετούσα.....
2. Η παραβολή με εστία E(0,-2) και κορυφή (0,0) έχει εξίσωση.....
3. Η εφαπτομένη της παραβολής  $C_1 : \chi^2 = 4\psi$  , η οποία είναι κάθετη στην ευθεία  $\chi + \psi - 7 = 0$  έχει εξίσωση .....
4. Η εφαπτομένη της  $\psi^2 = 2\chi$  που είναι παράλληλη στην ευθεία:  $\chi - 4\psi + 10 = 0$  έχει εξίσωση .....
5. Από το σημείο  $M(\chi_0, \psi_0)$  , φέρνουμε τις εφαπτομένες MA και MB προς την παραβολή  $C : \psi^2 = 2\rho\chi$  .  
 i ) η εξίσωση AB είναι η .....  
 ii ) η AB διέρχεται από την εστία της C όταν και μόνο όταν το M ανήκει στην .....της παραβολής.

28. Δίνονται οι παραβολές  $C_1 : \psi^2 = 6\chi$  ,  $C_2 : \chi^2 = -4\psi$  και  $C : \psi^2 = 36\chi$ . Να βρείτε :

- α ) την εστία την διευθετούσα καθεμιάς και να τις σχεδιάσετε.
- β ) την εφαπτομένη της  $C_1$  που είναι παράλληλη στην  $\chi - 2\psi + 5 = 0$ .
- γ ) την εφαπτομένη της  $C_2$  που είναι κάθετη στην  $\chi + \psi + 2 = 0$ .
- δ ) τις εφαπτομένες της C οι οποίες διέρχονται από το σημείο P(2,9).

29. Έστω  $\alpha$  ,  $\beta$  οι αποστάσεις των O(0,0) και A(2,0) από μια μεταβλητή εφαπτομένη  $\epsilon$  της παραβολής  $C : \psi^2 = 4\chi$ . Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $\Lambda = \beta^2 - \alpha^2$  είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη της θέσης της εφαπτομένης.

30. Δίνεται η παραβολή  $C : \psi^2 = 8\chi$ .

- α ) να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της.
- β ) να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\chi + \psi + 2 = 0$  εφάπτεται στην παραβολή.

31. Μια παραβολή έχει κορυφή το (0,0) και άξονα συμμετρίας τον  $\chi\chi'$ . Να βρεθεί η εξίσωση της όταν :

- α ) διέρχεται από το (5,2)
- β ) έχει εστία το E(-3,0)
- γ ) έχει διευθετούσα την  $\chi = -4$ .

32. Αν ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο στην  $\psi^2 = 4\chi$  και η κορυφή A του τριγώνου συμπίπτει με την κορυφή της παραβολής. Ναδειχθεί ότι  $AB = 8\sqrt{3}$ .

33. α ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $\psi^2 = 6\chi$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\chi - 4\psi + 7 = 0$ .

β ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $\psi^2 = 8\chi$  που είναι κάθετη στην ευθεία  $\chi + 3\psi - 5 = 0$ .

34. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση :  $\psi^2 = 4\chi$ .

α ) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία, με εξίσωση  $3\chi + \psi + 3 = 0$  (1)

β ) να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής τις οποίες φέρνουμε από το σημείο  $(-2, 1)$ .

[ Γενικές Εξετάσεις 1988 ]

35. Θεωρούμε την παραβολή  $C : \psi^2 = 10\chi$  και το σημείο  $M(4, 1)$ . Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  διέρχεται από το  $M$  και τέμνει τη  $C$  στα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ . Να αποδείξετε ότι :

α )  $\lambda = \frac{10}{y_1 + y_2}$ ,

β ) αν το  $M$  είναι μέσο του  $AB$ , τότε η ευθεία  $AB$  έχει εξίσωση:  $5\chi - \psi - 19 = 0$ .

36. Δίνεται η παραβολή  $C : \psi^2 = 2\rho\chi$  και μια ευθεία  $\epsilon$ , η οποία διέρχεται από την εστία  $E$  και τέμνει την  $C$  στα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ . Έστω  $\Gamma$  και  $\Delta$  οι προβολές των  $A$  και  $B$  στην διευθετούσα της παραβολής.

α ) υπολογίστε το γινόμενο :  $y_1 \cdot y_2$ .

β ) να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο το  $\Gamma\Delta$  διέρχεται από την εστία της παραβολής.

37. Δίνεται η παραβολή  $C : \psi^2 = 4\chi$  και η ευθεία  $\epsilon : \psi = \lambda\chi - \lambda$ ,  $\lambda \in \mathcal{R}$ .

α ) να αποδείξετε ότι η  $\epsilon$  τέμνει την  $C$  για κάθε τιμή του  $\lambda$ .

β ) πότε την τέμνει σε δυο σημεία ;

γ ) αν η  $\epsilon$  τέμνει την  $C$  στα  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  να δείξετε ότι :

i )  $x_1 \cdot x_2 = 1$

ii )  $y_1 \cdot y_2 = -4$

iii ) οι εφαπτόμενες της  $C$  στα  $A$ ,  $B$  τέμνονται κάθετα και μάλιστα σε σημείο της διευθετούσας της  $C$ .

38. Δίνεται η παραβολή  $C : \psi^2 = 8\chi$  και η ευθεία  $\epsilon$  η οποία τέμνει την  $C$  στα  $A$ ,  $B$ . Έστω  $M(4, 1)$  το μέσο του  $AB$ . Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$ .

39. Θεωρούμε την παραβολή  $C : \psi^2 = 6\chi$  και την ευθεία  $\epsilon : 2\chi - \psi + 3 = 0$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της  $C$ , του οποίου η απόσταση από την  $\epsilon$  είναι η ελάχιστη δυνατή. Ποια είναι η ελάχιστη αυτή απόσταση ;

40. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$ . Να βρείτε:

α ) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής ,

β ) τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν

από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ,



γ ) την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x - 1$ .

[ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2002 ]

41. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις :

α ) Η έλλειψη με εστίες  $E'(-6,0)$  και  $E(6,0)$  και σταθερό άθροισμα 20 έχει εξίσωση .....

β ) Η έλλειψη με εκκεντρότητα  $\frac{4}{5}$ , εστιακή απόσταση 8 και εστίες στον άξονα των τεταγμένων έχει εξίσωση.....

γ ) Το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης  $C: x^2 + 4y^2 = 4$  είναι:.....

δ ) Εκκεντρότητα της έλλειψης  $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$  λέμε τον αριθμό :.....

ε ) Η εφαπτομένη της έλλειψης  $C: 5x^2 + 3y^2 = 8$  στο σημείο  $M(1,-1)$  έχει εξίσωση:.....

στ ) Το σημείο  $M(2\eta\mu\theta, 3\sigma\upsilon\nu\theta)$ , καθώς το  $\theta$  μεταβάλλεται στο  $[0, 2\pi)$  κινείται σε.....

42. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1 ) Αν  $M(x,\psi)$  είναι ένα τυχαίο σημείο της  $C: \psi^2 = 2\rho x$ , τότε το ΜΕ είναι ίσο με :

**A:**  $\left|x + \frac{\rho}{2}\right|$     **B:**  $\left|y + \frac{\rho}{2}\right|$     **Γ:**  $\frac{\rho}{2}$     **Δ:**  $\left|x - \frac{\rho}{2}\right|$     **E:**  $2|\rho|$

2 ) Η έλλειψη  $C: 3x^2 + 5y^2 = 30$  έχει :

**A:** εστίες στον  $\psi\psi'$     **B:**  $2\alpha = 20$     **Γ:**  $\epsilon = \frac{3}{5}$     **Δ:**  $2\beta = 12$     **E:**  $E'(-2,0)$

3 ) Η εφαπτομένη της  $C: \psi^2 = 6x$  που είναι κάθετη στην  $2x + \psi - 5 = 0$  έχει εξίσωση :

**A:**  $x - 2\psi + 7 = 0$     **B:**  $2x + \psi - 7 = 0$     **Γ:**  $x - 2\psi - 6 = 0$     **Δ:**  $x + \psi + 3 = 0$     **E:**  $x - 2\psi + 6 = 0$

4 ) Αν  $M$  είναι τυχαίο σημείο της  $C: 25x^2 + 9y^2 = 225$ ,  $K(0,-4)$  και  $\Lambda(0,4)$ , τότε το  $MK + M\Lambda$  είναι ίσο με :

**A:** 6    **B:** 5    **Γ:** 3    **Δ:** 50    **E:** 10

5 ) Η υπερβολή  $5x^2 - 4y^2 = 20$  έχει εκκεντρότητα :

**A:**  $\frac{3}{2}$     **B:**  $\frac{5}{4}$     **Γ:**  $\frac{4}{5}$     **Δ:**  $\frac{2}{3}$     **E:**  $\frac{3}{5}$

43. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

Εξίσωση	α	β	γ	Εστίες	Μεγάλος Άξονας	Εκκεντρότητα
$16x^2 + 25y^2 = 400$						
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$						

44. Δίνεται η έλλειψη  $C: 9x^2 + 25y^2 = 225$ .
- α ) να βρείτε τις εστίες της.
  - β ) να βρείτε τις κορυφές και τα μήκη των αξόνων της.
  - γ ) να βρείτε την εκκεντρότητα.
  - δ ) να σχεδιάσετε την  $C$ .
45. Μια έλλειψη έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εκκεντρότητα  $\frac{4}{5}$  και εστιακή απόσταση 8.
- α ) να βρείτε την εξίσωση της.
  - β ) να τη σχεδιάσετε.
46. Δίνεται η έλλειψη  $C: 3x^2 + y^2 = 4$ . Να βρείτε :
- α ) την εξίσωση  $\varepsilon$  της εφαπτομένης της στο  $A(1, 1)$
  - β ) την εφαπτομένη  $\eta$  της  $C$  που είναι παράλληλη στην  $\varepsilon$ .
47. Δίνονται οι εξισώσεις  $5\psi = 3\lambda(\chi + 5)$  και  $5\lambda\psi = 3(5 - \chi)$ , με  $\lambda \neq 0$ . Να αποδείξετε ότι :
- α ) καθεμιά από αυτές παριστάνει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$
  - β ) το σημείο τομής των ευθειών κινείται σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.
48. Δίνεται η έλλειψη  $C: \chi^2 + 3\psi^2 = 24$  και ένα σημείο  $M$  διαφορετικό από τα  $A$  και  $A'$ . Η εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C$  στο  $M$  τέμνει την  $\delta: \chi = 6$  στο  $P$ . Αν  $M(x_0, y_0)$  να αποδείξετε ότι :
- α ) οι συντεταγμένες του  $P$  είναι  $(6, \frac{8 - 2x_0}{y_0})$ ,
  - β ) η γωνία  $MEP$  όπου  $E$  η εστία της  $C$  είναι ορθή,
  - γ ) καθώς το  $M$  κινείται πάνω στην  $C$ , ο κύκλος με διάμετρο  $MP$  διέρχεται από την εστία της  $C$ .
49. Δίνεται η έλλειψη  $C: \beta^2 \chi^2 + \alpha^2 \psi^2 = \alpha^2 \beta^2$  και η εφαπτομένη της  $\varepsilon$  στο  $M(x_0, y_0)$  με  $y_0 > 0$ . Η εφαπτομένη της έλλειψης στο  $A(\alpha, 0)$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $P$ . Να αποδείξετε ότι :
- α )  $P(\alpha, \beta^2 \frac{\alpha - x_0}{\alpha y_0})$
  - β )  $OP \parallel A'M$ , όπου  $A'(-\alpha, 0)$ .
50. Δίνεται η έλλειψη  $C: \beta^2 \chi^2 + \alpha^2 \psi^2 = \alpha^2 \beta^2$  με  $\alpha > \beta$  και σημείο  $M(x_0, y_0)$ , διαφορετικό από τις  $A, A'$ . Οι εφαπτομένες της  $C$  στα  $A, A'$  τέμνουν την εφαπτομένη από το  $M$  της  $C$  στα  $\Gamma, \Delta$  αντίστοιχα.
- α ) να εκφράσετε τις συντεταγμένες των  $\Gamma, \Delta$  συναρτήσει των  $x_0, y_0$ .
  - β ) να δείξετε ότι  $E\Gamma \perp E\Delta$ , όπου  $E$  η εστία της  $C$ .

**51.** Δίνεται η έλλειψη  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με  $a > \beta > 0$  και το σημείο  $K(0, 2\beta)$ . Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή  $\lambda$  διέρχεται από το  $K$  και τέμνει τις εφαπτομένες της  $C$  στα άκρα του μεγάλου άξονα της στα σημεία  $M$  και  $N$ .

α ) να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο  $MN$  ως συνάρτηση του  $\lambda$ .

β ) να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε ο κύκλος με διάμετρο  $MN$  να διέρχεται από τις εστίες της  $C$ .

[ Γενικές Εξετάσεις 1993 ]

**52.** Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή  $y^2 = 2px$ , και η έλλειψη  $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$ ,  $p > 0$ .

α ) Να αποδείξετε ότι οι εστίες  $E$  και  $E'$  της έλλειψης είναι τα σημεία

$$E \left( 0, \frac{\sqrt{3}p}{2} \right) \quad \text{και} \quad E' \left( 0, -\frac{\sqrt{3}p}{2} \right).$$

β ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής  $K$  και  $\Lambda$  των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία

$$K \left( \frac{p}{2}, p \right) \quad \text{και} \quad \Lambda \left( \frac{p}{2}, -p \right).$$

γ ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο

$$K \left( \frac{p}{2}, p \right) \quad \text{είναι} \quad \text{κάθετες}.$$

[ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2003 ]

**53.** Δίνονται η έλλειψη  $C_1: 4x^2 + 9y^2 = 36$  και ο κύκλος  $C_2: x^2 + y^2 = 9$ . Από την εστία  $E(\sqrt{5}, 0)$  φέρνουμε ευθεία  $\varepsilon \perp \chi\chi'$  που τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $K, \Lambda$  και την έλλειψη στα  $M, N$ . Να δειχθεί ότι η απόσταση των  $K, M$  είναι  $\frac{2}{3}$ .

**54.** Δίνεται η έλλειψη  $C: \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$  και φέρνουμε στο σημείο  $M(x_0, y_0)$  διαφορετικό από τις κορυφές της έλλειψης, την εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C$  που τέμνει την ευθεία  $y - \alpha^2 = 0$  στο  $K$ . Αν  $E(\gamma, 0)$  η εστία της  $C$ , να δειχθεί ότι το  $MEK$  τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

**55.** Αν από το σημείο  $M(-6, 7)$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες  $MA, MB$  στην έλλειψη  $C: 4x^2 + 3y^2 = 12$ , να βρεθεί η απόσταση του  $M$  από την  $AB$ .

**56.** Δίνεται η έλλειψη  $C: 5x^2 + 9y^2 = 45$  και τα σημεία  $\Gamma(0, 2)$  και  $\Delta(0, -2)$ . Έστω  $M(x_0, y_0)$  μεταβλητό σημείο της  $C$  και  $\varepsilon$  η εφαπτομένη της  $C$  στο  $M$ .

- α ) να βρείτε την εξίσωση της ε .  
 β ) αν  $d_1, d_2$  οι αποστάσεις των Γ, Δ από την ε να αποδείξετε ότι ισχύουν :

$$d_1 = \frac{9|2y_1 - 5|}{\sqrt{25x_1^2 + 81y_1^2}}, \quad d_2 = \frac{9|2y_1 + 5|}{\sqrt{25x_1^2 + 81y_1^2}}$$

- γ ) να αποδείξετε ότι :  $d_1^2 + d_2^2 = 18$ .

57. Δίνεται η έλλειψη C:  $16x^2 + 25y^2 = 400$  και το σημείο M(4,1).

- α ) να δείξετε ότι το M είναι εσωτερικό σημείο της C,  
 β ) να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης που έχει μέσο το M.

58. Από ένα σημείο M άγονται δυο εφαπτομένες της C:  $4x^2 + 16y^2 = 64$  και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής έχει εξίσωση ε :  $2x - 3y - 4 = 0$ .  
 Να βρείτε τις συντεταγμένες του M.

59. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις :

- α ) Αν E και E' είναι οι εστίες της C:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , τότε :

- i )  $EE' = \dots\dots\dots$ , όπου  $\gamma^2 = \dots\dots\dots$   
 ii ) οι εστίες της C βρίσκονται στον άξονα  $\dots\dots\dots$   
 iii ) η εκκεντρότητα της C είναι  $\dots\dots\dots$  και είναι  $\dots\dots\dots$  απ' το 1,  
 iv )  $|ME - ME'| = \dots\dots\dots$ , για κάθε σημείο M της C.

- β ) Η υπερβολή με εστίες E(0,5) και E'(0,-5) και σταθερή διαφορά 8 έχει εξίσωση  $\dots\dots\dots$

- γ ) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής C:  $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$  έχουν εξισώσεις  $\dots\dots\dots$

- δ ) Οι εστίες της υπερβολής C:  $5x^2 - 11y^2 = 55$  είναι τα σημεία  $\dots\dots\dots$

- ε ) Η εκκεντρότητα κάθε ισοσκελούς υπερβολής είναι  $\dots\dots\dots$

60. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

Εξίσωση	α	β	γ	Εστίες	Ασύμπτωτες
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$					
$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$					

61. Δίνονται οι υπερβολές C<sub>1</sub>:  $16x^2 - 9y^2 = 144$  και C<sub>2</sub>:  $3y^2 - x^2 = 12$ .

- α ) να βρείτε τις εστίες και τις κορυφές των C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>,  
 β ) να βρείτε τις εκκεντρότητες των C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>,  
 γ ) να βρείτε τις ασύμπτωτες των υπερβολών,  
 δ ) να τις σχεδιάσετε.

62. Ένα μεταβλητό σημείο M κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε η απόσταση από το σημείο A(0,5) να ισούται με τα  $\frac{5}{3}$  της απόστασης του από την ευθεία  $\varepsilon: \psi = \frac{9}{5}$ .
- α) να αποδείξετε ότι το M κινείται σε υπερβολή και να βρείτε την εξίσωση της,  
 β) να βρείτε τις εστίες της παραπάνω υπερβολής και τις κορυφές της.
63. Μια μεταβλητή ευθεία  $\zeta$  παράλληλη με την  $\varepsilon: 2\chi - \psi + 5 = 0$  τέμνει την υπερβολή  $4\chi^2 - 9\psi^2 = 36$  στα σημεία Γ και Δ. Αν  $\Gamma(x_1, y_1)$  και  $\Delta(x_2, y_2)$ , να αποδείξετε ότι :
- α)  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$ ,  
 β) το μέσο M του ΓΔ κινείται στην  $\varepsilon: 2\chi - 9\psi = 0$ .
64. Δίνεται η υπερβολή C:  $2\chi^2 - 6\psi^2 = 12$ . Να βρείτε τις εφαπτομένες της C οι οποίες :
- α) είναι παράλληλες στην  $\varepsilon: \chi - \psi + 5 = 0$ ,  
 β) διέρχονται από το σημείο  $\Sigma(1, -1)$ .
65. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή C:  $\chi^2 - \psi^2 = \alpha^2$  και μια ευθεία  $\varepsilon // \psi\psi'$  που τέμνει την C στα Γ και Δ. Αν A είναι η κορυφή της υπερβολής τότε :
- α) βρείτε την εκκεντρότητα της C  
 β) να αποδείξετε ότι  $A\Gamma \perp A\Delta$ .
66. Μια υπερβολή C:  $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  διέρχεται από το σημείο  $M(-4, 3)$  και η εφαπτομένη της στο M είναι η ευθεία  $\varepsilon: \psi = -2\chi - 5$ . Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .
67. Δίνεται η  $C_1: \chi^2 - \psi^2 = 1$  και  $C_2: 4\chi^2 + 9\psi^2 = 36$ . Τυχαιά εφαπτομένη της υπερβολής στο  $M(x_1, y_1)$  τέμνει την έλλειψη στα A, B. Αν οι εφαπτομένες της  $C_2$  στα A, B τέμνονται στο K, να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται το K, όταν το M κινείται στην υπερβολή  $C_1$ .
68. Δίνεται η  $9\chi^2 - 16\psi^2 = 144$  με εστίες E και E' και ένα σημείο  $M(\lambda, \mu)$  αυτής.
- α) να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών  $\varepsilon, \zeta$  που διέρχονται από τα M, E και M, E' αντίστοιχα.  
 β) να βρείτε τα σημεία M ώστε οι  $\varepsilon$  να είναι κάθετη στη  $\zeta$ .

[ Πανελλήνιες Εξετάσεις 1981 ]