ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Αφού μελετηθεί καλά η θεωρία του Κεφαλαίου 1 απ το σχολικό βιβλίο, να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στα παρακάτω :

1. Δυο διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα (δηλαδή $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$) όταν :

ι) έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά

ιι) $\vec{a}$ = λ· $\vec{\beta}$ με λ > 0

ιιι) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ = $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

ιv) $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$

2. Δυο διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα (δηλαδή $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$) όταν :

ι) έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά

ιι) $\vec{a}$ = λ· $\vec{\beta}$ με λ < 0

ιιι) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ = -$|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

3. Δυο διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι ίσα όταν :

ι) $\vec{a}$ = $\vec{\beta}$, αν και μόνο αν έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια φορά, ίσα μέτρα

ιι) Αν $\vec{a}$ = (x_1, y_1) , $\vec{\beta}$ = (x_2, y_2), τότε : $\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

4. Δυο διανύσματα $\vec{a}$ = (x_1, y_1), $\vec{\beta}$ = (x_2, y_2), με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, είναι συγγραμμικά ή παράλληλα όταν :

ι) υπάρχει λ $\in \Re$ ώστε : $\vec{a}$ = λ · $\vec{\beta}$

ιι) $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

ιιι) $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$ ή $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \big||\vec{a}| - |\vec{\beta}|\big|$

ιv) $\lambda_1 = \lambda_2$, όταν βέβαια $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ όχι παράλληλα στον ψψ΄

v) $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ (ανισότητα Cauchy – Schwarz)

5. Γωνία δυο διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ καλείται η κυρτή γωνία θ = ($\vec{a}, \vec{\beta}$), η οποία δεν εξαρτάται από την εκλογή της αρχής Ο του συστήματος συντεταγμένων. Σχετικά ισχύουν :

ι) $0 \leq \theta \leq \pi$,
ιι) αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\theta = 0^0$
ιιι) αν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\theta = 180^0$

6. Εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, που σχηματίζουν γωνία φ, λέγεται ο αριθμός $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ που δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \text{, αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{\beta} \neq \vec{0}}$$

7. Τρία σημεία Α , Β, Γ <u>είναι συνευθειακά</u> όταν δυο από τα διανύσματα $\overline{AB}$, $\overline{A\Gamma}, \overline{B\Gamma}$, είναι συγγραμμικά π. χ $\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{A\Gamma}$, $\lambda \in \Re$.

8. Για τρία διανύσματα του επιπέδου $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και για τον $\lambda \in \Re$ ισχύουν οι σχέσεις :

ι) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$ (Μεταθετική ιδιότητα)
ιι) $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ (Επιμεριστική ιδιότητα)
ιιι) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
ιv) $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$
v) αν τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία φ ισχύει : $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot$προβ$_{\vec{a}} \vec{\beta}$
vι) προβ$_{\vec{a}} \vec{\beta} = \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2}\right) \cdot \vec{\beta}$, η ποσότητα στην παρένθεση είναι αριθμός.

<u>ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΛΗΘΕΙΣ</u>

1. $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ → Η Προσεταιριστική ιδιότητα δεν ισχύει στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

2. $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{\beta}^{\,2}$ → Ισχύει μόνο όταν : $\vec{a} /\!/ \vec{\beta}$

3. $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ $(\vec{\gamma} \neq 0)$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$ → Δεν ισχύει η διαγραφή.

4. Δεν ορίζονται οι δυνάμεις $\vec{a}^{\,3}, \vec{a}^{\,4}, \ldots\ldots$

5. Δεν ορίζεται η διαίρεση διανυσμάτων, π. χ $\vec{a} : \vec{\beta}$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Αν Α = (x_1, y_1), Β = (x_2, y_2), τότε : $\overline{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Αν Α = (x_1, y_1), Β = (x_2, y_2) , τότε : $\left|\overline{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΕΣΟΥ Μ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

$\overline{\mathrm{OM}} = (\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$, όπου

Α = (x_1, y_1) και Β= (x_2, y_2), οι συντεταγμένες των άκρων του διανύσματος $\overline{\mathrm{AB}}$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Αν $\overline{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, τότε $\boldsymbol{\lambda}_{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, και

όταν $\overline{\mathrm{AB}} /\!/$ ψψ΄, τότε δεν ορίζεται ο $\boldsymbol{\lambda}_{\overline{\mathrm{AB}}}$.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε ορίζεται

$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

συν$(\vec{a}, \vec{\beta}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

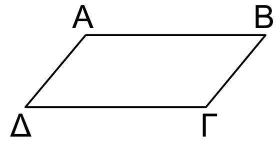
Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot$προβ$_{\vec{a}} \vec{\beta}$, όπου

προβ$_{\vec{a}} \vec{\beta} = (\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2}) \cdot \vec{\beta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται το διπλανό σχήμα :



Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραπάνω παραλληλογράμμου , να βρείτε τα διανύσματα :

ι) $\overline{ΑΔ}+\overline{ΓΔ}$ ιι) $\overline{ΔΑ}+\overline{ΟΔ}+\overline{ΟΓ}$ ιιι) $\overline{ΑΔ}-\overline{ΟΓ}$

2. Να γράψετε με τη μορφή ενός διανύσματος τις παρακάτω παραστάσεις :

ι) $\overline{ΑΒ}+\overline{ΒΓ}$ ιι) $\overline{ΑΒ}+\overline{ΓΑ}$ ιιι) $\overline{ΑΒ}$ - $\overline{ΓΒ}$

ιv) $\overline{ΑΒ}$ - $\overline{ΑΓ}$ v) $\overline{ΑΒ}$ + $\overline{ΒΓ}$ + $\overline{ΓΔ}$ vι) $\overline{ΑΒ}$ + $\overline{ΚΝ}+\overline{ΒΚ}$

vιι) $\overline{ΑΒ}$ + $\overline{ΒΑ}$ vιιι) $\overline{ΒΓ}$ + ($\overline{ΓΔ}$ -$\overline{ΒΑ}$)

3. Να συγκρίνετε τα διανύσματα :

ι) $\overline{ΑΒ}$ και -$\overline{ΒΑ}$ ιι) $\overline{ΑΒ}+\overline{ΒΓ}$ και $\overline{ΑΔ}$ + $\overline{ΔΓ}$

ιιι) $\overline{ΑΒ}$ + $\overline{ΒΓ}$ και $\overline{ΚΓ}+\overline{ΑΚ}$ ιv) $\overline{ΑΒ}$ - $\overline{ΑΓ}$ και $\overline{ΚΒ}-\overline{ΚΓ}$

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του , να συγκρίνετε τις διαφορές :

ι) $\overline{ΟΓ}-\overline{ΟΔ}$ και $\overline{ΟΒ}-\overline{ΟΑ}$ ιι) $\overline{ΓΔ}$ - $\overline{ΓΑ}$ και $\overline{ΔΓ}-\overline{ΔΒ}$

ιιι) $\overline{ΟΓ}-\overline{ΟΔ}$ και $\overline{ΟΑ}-\overline{ΟΔ}$

5. Αν ισχύει : $\overline{ΔΜ}-\overline{ΑΜ}=\overline{ΜΒ}+\overline{ΓΜ}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα : $\overline{ΑΒ}$ και $\overline{ΓΔ}$ είναι αντίθετα .

6. Δίνονται τα σημεία : Α , Β , Γ , Δ . Να βρεθεί σημείο Μ , ώστε να ισχύει:

$$\overline{ΓΔ} + \overline{ΒΜ}=\overline{ΒΔ}-\overline{ΑΓ}$$

7. Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, να βρεθεί σημείο Μ ώστε :

$$\overline{A\Gamma}+\overline{\Delta B}=\overline{AB}+\overline{MB}$$

8. Αν $|\vec{a}|=\frac{3}{4}, |\vec{\beta}|=\frac{1}{4}$ και $|\vec{a}+\vec{\beta}|\geq 1$, να αποδειχθεί ότι : $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

9. Αν $\vec{a}$, $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ όχι παράλληλα, τότε να δείξετε ότι :

ι) αν $\chi\cdot\vec{a}=\kappa\cdot\vec{\beta}\Rightarrow$ χ=0 και κ=0

ιι) αν $\chi\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{\beta}=\kappa\cdot\vec{a}+\rho\cdot\vec{\beta}\Rightarrow$ χ=κ και λ=ρ

10. Δίνονται τα διανύσματα : $\overline{OA}=\vec{\gamma}+\vec{\beta}+\vec{a}$, $\overline{OB}=5\vec{a}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$, $\overline{O\Gamma}=13\vec{a}+7\vec{\beta}+10\vec{\gamma}$. Να δειχθεί ότι τα Α, Β , Γ είναι συνευθειακά.

11. Αν ισχύει : $(\kappa+2)\overline{PA}+3\overline{PB}=(\kappa+5)\overline{P\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά.

12. Αν ισχύει : $\overline{AB}=\dfrac{\overline{A\Gamma}+\lambda\overline{A\Delta}}{1+\lambda}$, να αποδείξετε ότι τα Β , Γ , Δ είναι συνευθειακά.

13. Αν ισχύει : $\overline{O\Gamma}=(1-\lambda)\overline{OA}+\lambda\overline{OB}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά.

14. Αν ισχύει : $\overline{AK}+3\overline{BK}-2\overline{BA}=\overline{B\Lambda}+3\overline{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ , Λ , Μ είναι συνευθειακά

15. Αν Κ, Λ ,Μ δεν είναι συνευθείακά να βρεθούν οι πραγματικοί α, β ώστε να ισχύει η σχέση : $\overline{\Lambda M}+a\cdot\overline{KM}+\beta\cdot\overline{K\Lambda}=\vec{0}$.

16. Έστω Α, Β, Κ, Λ και Μ τυχαία σημεία του χώρου. Αν ισχύει η σχέση : $\overline{AK}+3\overline{MA}=3\overline{KB}-2\overline{AB}+\overline{B\Lambda}$, να αποδείξετε ότι :

ι) τα Κ, Λ , Μ είναι συνευθειακά

ιι) $\overline{K\Lambda}\uparrow\downarrow\overline{KM}$

17. Έστω ΑΒΓΔ ένα τυχαίο τετράπλευρο και Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

ι) να αποδείξετε ότι : $2\overline{\mathrm{K\Lambda}} = \overline{\mathrm{A\Gamma}} + \overline{\mathrm{B\Delta}}$.

ιι) Να βρεθεί σημείο Ο τέτοιο ώστε να ισχύει :

$\overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{O\Gamma}} + \overline{\mathrm{O\Delta}} = \vec{0}$.

18. Σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α) Δυο διανύσματα $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ λέγονται συγγραμμικά όταν :

Α : $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ **Β :** έχουν τον ίδιο φορέα **Γ :** έχουν τον ίδιο ή παράλληλους φορείς

β) Δυο διανύσματα λέγονται ίσα όταν :

Α : έχουν ίσα μέτρα **Β :** είναι συγγραμμικά **Γ :** έχουν ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα

γ) Δίνονται τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει : $\vec{\beta} = \lambda\cdot\vec{a}$. Τότε :

Α : $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ **Β :** $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ **Γ :** $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$

δ) Αν Α= (-2,3) και Β= (5, -2), τότε το διάνυσμα $\overline{\mathrm{AB}}$ είναι το :

Α : (3,1) **Β :** (7,-5) **Γ :** (-7,5)

19. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις.

1. Δυο μοναδιαία διανύσματα είναι ίσα. Σ Λ
2. Για δυο τυχαία $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύει : $|\vec{a}+\vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$ Σ Λ
3. Αν $\vec{a} = \vec{\beta} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{\beta}|$ Σ Λ
4. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει : $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{B\Gamma}} = \overline{\mathrm{\Gamma A}}$ Σ Λ
5. Για τρία τυχαία σημεία Α, Β, Ο του χώρου ισχύει : $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OB}} - \overline{\mathrm{OA}}$ Σ Λ
6. Αν ισχύει : $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \vec{a}\cdot\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ Σ Λ
7. Αν $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, $\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|$ Σ Λ
8. Ισχύει η σχέση : $\vec{a}\cdot(\vec{\beta}\,\vec{\gamma}) = (\vec{a}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ Σ Λ
9. Αν $\vec{a}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{\beta}| = |\vec{a}-\vec{\beta}|$ Σ Λ
10. Αν Μ μέσο του $\overline{\mathrm{AB}}$, τότε ισχύει : $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{MB}}$ Σ Λ

20. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Να δειχθεί ότι : $\overline{\mathrm{AE}} + \overline{\mathrm{AZ}} = \frac{3}{2}\cdot\overline{\mathrm{A\Gamma}}$.

21. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ένα μεταβλητό σημείο Μ και το διάνυσμα : $\vec{\beta} = 2\overline{\text{ΜΑ}} + \overline{\text{ΜΒ}} + \overline{\text{ΜΓ}}$. Αν ΑΔ είναι η διάμεσος του τριγώνου και Κ το μέσο της ΑΔ, τότε να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ ως πολλαπλάσιο του $\overline{\text{ΜΚ}}$.

22. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ∕∕ΓΔ είναι $\overline{\text{ΑΒ}} = \vec{a}$ και $\overline{\text{ΔΓ}} = 3\cdot\vec{a}$. Έστω $\overline{\text{ΔΑ}} = \vec{\beta}$ και Ε σημείο τέτοιο , ώστε : $\overline{\text{ΔΕ}} = 3\overline{\text{ΕΒ}}$.

ι) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overline{\text{ΔΒ}}, \overline{\text{ΒΓ}}, \overline{\text{ΑΕ}}, \overline{\text{ΕΓ}}$, ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

ιι) να αποδείξετε ότι τα Α, Ε, Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

23. Δίνονται τα σημεία : Α, Β , Γ , Δ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει :

$$\left|\overline{\text{ΜΑ}} + \overline{\text{ΜΒ}}\right| = \left|\overline{\text{ΜΓ}} - \overline{\text{ΜΔ}}\right|$$

24. Έστω σημεία Α , Β , Γ , Δ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει :

$$\left|\overline{\text{ΜΑ}} + \overline{\text{ΜΒ}} - 2\overline{\text{ΜΓ}}\right| = \left|\overline{\text{ΜΑ}} + \overline{\text{ΜΒ}} + 2\overline{\text{ΜΔ}}\right|$$

25. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ , μ το διάνυσμα : $\vec{a}$ = (λ+2μ , 3λ-12) είναι το μηδενικό διάνυσμα.

26. Να βρείτε για ποιες τιμές του χ το διάνυσμα : $\vec{a}$ = [($χ^2$-4) , ($χ^2$+2χ)] , είναι το μηδενικό .

27. Δίνεται το διάνυσμα : $\vec{\beta}$ = [($χ^2$+5χ) , ($χ^2$ -25)]. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύει :

ι) $\vec{\beta}$ ∕∕ χχ΄ ιι) $\vec{\beta}$ ∕∕ ψψ΄ ιιι) $\vec{\beta}$ ∕∕ χχ ΄ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$

28. Δίνονται τα σημεία Α(4,κ+3) και Β(9,4κ+1). Να βρεθεί το κ $\in \Re$ ώστε το διάνυσμα $\overline{\text{ΑΒ}}$ να είναι παράλληλο προς τον χχ΄.

29. Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

ι) Αν Α(2,4) και Β(1,-6) , να βρείτε το Μ
ιι) Αν Μ(3,1) και Β(-1,2) να βρείτε το Α.

30. Το σημείο Α(4,2) ανήκει σε κύκλο κέντρου Κ(3,5). Να βρεθεί το αντιδιαμετρικό σημείο του Α.

31. Αν τα σημεία Κ(4,0) , Λ(6,2) , Μ(3,5) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ αντιστοίχως τριγώνου ΑΒΓ , να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των κορυφών του ΑΒΓ.

32. Να βρεθεί η τιμή του χ για την οποία τα σημεία : Α(0, 3-$\sqrt{2}$) , Β(χ , 3) Γ(-$\sqrt{2}$, 1-$\sqrt{2}$), είναι συνευθειακά.

33. Δίνονται τα σημεία Α(3,2) , Β(1,0) , Γ(0,4). Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ τέμνει τον χχ΄ στο Δ και η ΑΒ τον ψψ΄ στο Ε τότε , να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των Δ, Ε.

34. Να βρεθούν τα σημεία που χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α(1,2) , Β(-5,-1) σε τρία ίσα τμήματα.

35. Αν ΑΒΓ τρίγωνο και οι κορυφές του έχουν συντεταγμένες Α(-1,1) , Β(3,4) , Γ(2,7), να βρεθεί το βαρύκεντρο του.

36. Αν $\vec{a}$ = (-2,3) και $\vec{\beta}$ = (4,1) , να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$, για το οποίο ισχύει:

$2\vec{a} - \vec{u} = \vec{\beta}$

37. Να γράψετε το διάνυσμα : $\vec{u}$ = (6,5) ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων : $\vec{a}$ = (1,2) και $\vec{\beta}$ = (2,-3).

38. Να βρεθεί η τιμή του χ για την οποία τα διανύσματα : $\vec{a}$ = (3,χ) και

$\vec{\beta}$ = (6,4) είναι συγγραμμικά.

39. Για ποιες τιμές του λ , τα διανύσματα : $\vec{a}$ = (4λ , -9) και $\vec{\beta}$ = (-4 , λ) είναι :

ι) παράλληλα ιι) ομόρροπα

40. Να βρείτε για ποια τιμή του χ τα διανύσματα : $\vec{a}$ = (8,χ) και $\vec{\beta}$ = (χ,2) είναι:

ι) συγγραμμικά ιι) ομόρροπα ιιι) αντίρροπα

41. Αν $\vec{a}$ = (3,-1) και $\vec{\beta}$ = (6,-2) τότε να δείξετε ότι $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

42. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων :

$\vec{a}$ = (3 , -2) $\vec{\beta}$ = (-2 , 0) $\vec{u}$ = (0 , 4) $\vec{\gamma}$ = (12 , 3)

43. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων :

$\vec{a}$ = (6 , -8) $\vec{\beta}$ = (2ημθ , -2συνθ) $\vec{\gamma}$ = (συνθ, ημθ)

$\vec{u}$ = (χ-ψ , $2\sqrt{χψ}$) $\vec{\kappa} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$

44. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{a}$ = (χ,8) και $\vec{\beta}$ = (2,χ). Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύουν :

ι) $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά

ιι) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

ιιι) το διάνυσμα $\vec{a}+\vec{\beta}$ έχει μέτρο 6.

45. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ στο οποίο είναι : Α(-2,1) και Γ(0,5)

46. Αν $\vec{u}$ = (-5,8) , να βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}$ το οποίο είναι ομόρροπο με το $\vec{u}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από αυτό.

47. Αν $\vec{\gamma}$ = (-72, 84) , να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ που έχει μέτρο το μισό του μέτρου του $\vec{\gamma}$ και είναι συγγραμμικό με το $\vec{\gamma}$.

48. Δίνεται το διάνυσμα : $\vec{a}$ = (-6,8).

α) να βρεθεί το μέτρο και ο συντελεστής διεύθυνσης του.

β) να εκφραστεί το $\vec{a}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων (2,3) και (1,2).

γ) να βρεθεί το $\vec{\beta}$ ώστε $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{a}$ και $|\vec{\beta}|=3|\vec{a}|$.

49. Να αποδειχθούν οι σχέσεις :

ι) $|\vec{a}+\vec{\beta}| = |\vec{a}-\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$

ιι) $(\vec{a}+\vec{\beta}) \perp (\vec{a}-\vec{\beta}) \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{\beta}|$

και να ερμηνευτούν γεωμετρικά αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

50. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει : $|\vec{a}+\vec{\beta}| + |\vec{a}-\vec{\beta}| = 6$, και $\vec{a}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2} = 9$. Να αποδείξετε ότι :

ι) $|\vec{a}+\vec{\beta}| \cdot |\vec{a}-\vec{\beta}| = 9$

ιι) $\vec{a} \perp \vec{\beta}$

Να βρείτε τους αριθμούς :

ι) $|\vec{a}+\vec{\beta}|$ ιι) $|\vec{a}-\vec{\beta}|$

51. Αν για τα διανύσματα $\vec{\gamma}$, $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$, να δειχθεί ότι : ι) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ ιι) $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

52. Αν ισχύει : $\vec{a} + 4\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{a}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$, να αποδείξετε ότι :

ι) $\vec{a}$ ομόρροπο με το $\vec{\beta}$ ιι) $\vec{\beta} = 2\vec{a}$ και $\vec{\gamma} = -3\vec{a}$

53. Για τρια διανύσματα του επιπέδου ισχύουν : $|\vec{a}|=3$, $|\vec{\beta}| = 1$, $|\vec{\gamma}| = 4$ και επίσης $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$. Να υπολογιστεί ο αριθμός : $\vec{a}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\cdot\vec{a}$.

54. Αν ισχύει : $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\vec{a}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\cdot\vec{a} = 0$, να αποδείξετε ότι :

$\vec{a} = \vec{\beta} = \vec{\gamma} = \vec{0}$

55. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν ίσα μέτρα, να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{a}-3\vec{\beta}$ και $3\vec{a}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν ίσα μέτρα.

56. Αν $\vec{a}$ = (3,-4) και $\vec{\beta}$ = (-2,1) τότε να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$, όπου $\vec{\gamma}$ // $\vec{a}$.

57. Δίνονται τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $|\vec{a}|$=3 και $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, κ , λ $\in \Re^*$. Αν (κ$\vec{a}$+λ$\vec{\beta}$) $\perp$(λ$\vec{a}$-κ$\vec{\beta}$), να βρείτε το μέτρο του διανύσματος : $|\vec{a}+2\vec{\beta}|$.

58. Δυο διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ και ισχύει : $(\vec{a}\cdot\vec{\beta})^2$ = $\vec{a}^{\,2}$ $\cdot(\vec{\beta}^{\,2}$-1) . Να βρείτε τον λ ώστε : $|\lambda \cdot \vec{a} + \vec{\beta}| = 1$.

59. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ $\neq \vec{0}$ και ($\vec{a}$-$\vec{\beta}$)$\perp$($\vec{a}$+$\vec{\beta}$) και $\vec{\beta}\perp$($\vec{\beta}$-$\vec{a}$). Να δείξετε ότι : $\vec{a}$= $\vec{\beta}$.

60. Αν $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{u}$ συνεπίπεδα διανύσματα με : $|\vec{a}|$ = $|\vec{\beta}|$ = $|\vec{u}|$ = 1 και
$\vec{a}\cdot\vec{\beta}$+$\vec{\beta}\cdot\vec{u}$ = 2 . Να αποδείξετε ότι : $\vec{a}$ = $\vec{\beta}$ = $\vec{u}$.

61. Έστω $|\vec{a}|$ = $|\vec{\beta}|$ =1 και $\vec{u}$ = $\vec{a}$ + λ$\cdot\vec{\beta}$, λ$\in\Re$. Να βρεθεί ο λ ώστε το $|\vec{u}|$ να είναι ελάχιστο. Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να δειχθεί ότι : $\vec{u}\perp\vec{\beta}$.

62. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $|\vec{a}|$ = $\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|$ = 1 και η γωνία μεταξύ τους είναι $\frac{\pi}{6}$, να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων 3$\vec{a}$-2$\vec{\beta}$ και 2$\vec{a}$+3$\vec{\beta}$.

63. Αν Α(0,3) , Β(-2,1), Γ(2$\sqrt{3}$,1) οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ , υπολογίστε :
ι) $\overline{\text{AB}}\cdot\overline{\text{AΓ}}$ ιι) την γωνία Γ ιιι) $\overline{\text{AM}}$, $|\overline{\text{AM}}|$, $\overline{\text{AK}}$,
όπου Μ μέσο του ΒΓ και Κ το βαρύκεντρο του τριγώνου.

64. Αν $|\vec{a}|$ = $\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|$= 1 και η γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{6}$. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}=\vec{a}+\vec{\beta}, \vec{u}=\vec{a}-\vec{\beta}$.

65. Αν τα διανύσματα : $\vec{a} = 3\vec{u} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -7\vec{u} + 4\vec{\gamma}$ είναι κάθετα και $|\vec{u}|=1$ και $|\vec{\gamma}|=2$, να βρείτε τη γωνία θ των $\vec{u}$ και $\vec{\gamma}$

66. Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και η γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι 45 μοίρες , να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων : $\vec{a}$, $\vec{a} - \vec{\beta}$

67. Θεωρούμε τα κάθετα διανύσματα : $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 6$ και $|\vec{\beta}| = 4$. Αν $\vec{\gamma} = 2\sqrt{3}\,\vec{a} + 3\vec{\beta}$, να βρεθούν οι γωνίες των διανυσμάτων ($\vec{a}$, $\vec{\gamma}$) και ($\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$).

68. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{u} = (x^2+1, y^2+1)$ και $\vec{\beta} = (2y, 2\chi)$. Αν $\vec{\beta} = \vec{u}$, να βρείτε :

ι) τις συντεταγμένες τους.
ιι) τον συντελεστή διεύθυνσης του $\vec{u}$
ιιι) τη γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{u}$, $-\vec{u}$ με τον χχ΄.

69. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο γνωρίζουμε ότι : $\overline{AB} = 4\vec{a} + 3\vec{\beta}$, $\overline{A\Delta} = 3\vec{a} - \vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι τέτοια ώστε $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2$ και η γωνία τους είναι $\frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του ΑΒΓΔ.

70. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (-3,4)$ σε δυο συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι αντίθετη με το διάνυσμα : $\vec{\gamma} = (-1,5)$

71. Ένα διάνυσμα $\vec{a}$, με $|\vec{a}| = 10\sqrt{5}$, αναλύθηκε σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{\gamma} = (-6,12)$ και $\vec{\beta}$. Να βρείτε τα $\vec{\beta}$, $\vec{a}$.

72. Αν $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και η γωνία των δυο αυτών διανυσμάτων είναι $\frac{\pi}{3}$, τότε να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{a}$ καθώς και η προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{\gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

73. Αν $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{\beta}| = 20$ και η γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι 60^0, να αποδείξετε ότι :

ι) προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ = 2 $\vec{\alpha}$ ιι) $\vec{\beta}$ + 16 προβ$_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$ = $\vec{0}$

74.Αν $\vec{\alpha}$ = (10,0) και $\vec{\beta}$ = (1,-2) , να βρείτε τα διανύσματα :

ι) προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ ιι) προβ$_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$

75.Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα , και προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ = 2$\vec{\alpha}$ και

προβ$_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$ = $\frac{1}{4}\vec{\beta}$, να υπολογίσετε την γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

76.Έστω $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμία από τις σχέσεις :

ι) προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ = $\vec{0}$ ιι) προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ = $\vec{\beta}$

ιιι) προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ $/\!/$ $\vec{\beta}$

77.Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha}$ = (1,2) και $\vec{\beta}$ = (7,4) . Να υπολογίσετε :
ι) το $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ ιι) το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ιιι) προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.

78.Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1,\ |\vec{\beta}|=2$ και

$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta},\ \vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

β. τα μέτρα $|\vec{u}|,|\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

[Εξετάσεις Ενιαίου Λυκείου 2001]

79.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1),\ \vec{\beta}=(5,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ *και* $\vec{\delta}=3\vec{\beta}-2\vec{\alpha}$.

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ, για την οποία το διάνυσμα $\vec{x}=(\lambda,-6)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{2}\vec{\gamma}$, όπου $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

[Εξετάσεις Εσπερινού Λυκείου 2002]

80. Αν $|\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{\beta}|=\sqrt{3}, |\vec{\gamma}|=2$ και η γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι ίση με τη γωνία των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ίση με $\frac{\pi}{4}$. Να βρεθεί το μέτρο του $2\vec{a}-3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

81. Έστω $|\vec{a}|=2$, $|\vec{\beta}|=5$ και η γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι $\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\gamma}=5\vec{a}-4\vec{\beta}$, να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{\gamma}$.

82. Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{a}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$ και η γωνία τους είναι 60 μοίρες. Προσδιορίστε τον αριθμό χ στις παρακάτω περιπτώσεις :

ι) $(2\vec{a}+3\vec{\beta})\cdot(\vec{a}-\chi\cdot\vec{\beta})=-2$ ιι) $2\vec{a}+3\vec{\beta}\perp\vec{a}-\chi\cdot\vec{\beta}$

83. Δίνονται τα σημεία Α(1, 1), Β(2μ + 1, λ – 2), Γ(4, 0) και Μ(3, 2), όπου Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και μ, λ $\in\Re$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\Gamma M}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $|\vec{\Gamma A}|=|\vec{\Gamma B}|$.