

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ – ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Πληθυσμός : Ονομάζεται το σύνολο του οποίου θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά.
- Μεταβλητές : Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό καλούνται μεταβλητές. Συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα X, Y, Z.. και διακρίνονται σε ποσοτικές και ποιοτικές.
- Ποιοτικές Μεταβλητές : Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί.
- Ποσοτικές Μεταβλητές : Εκείνες οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται σε Διακριτές και Συνεχείς ανάλογα αν παίρνουν μεμονωμένες τιμές ή τιμές μέσα σε κάποιο διάστημα αντίστοιχα.
- Δείγμα : Όταν μαζεύουμε πληροφορίες από ένα υποσύνολο του πληθυσμού αυτό καλείται δείγμα.
- Αντιπροσωπευτικό Δείγμα : Εκείνο το δείγμα το οποίο επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μονάδα του να έχει την ίδια δυνατότητα επιλογής.
- Συχνότητα : Έστω χ_i , $i=1,2,\dots,n$ δείγμα μεγέθους n μιας τυχαίας μεταβλητής X. Συχνότητα καλείται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή χ_i στο σύνολο των παρατηρήσεων. Ισχύει : $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ $k \leq n$
- Σχετική Συχνότητα : Καλείται το πηλίκο της συχνότητας n_i με το μέγεθος του δείγματος n . Δηλαδή $f_i = \frac{n_i}{n}$ και ισχύουν οι σχέσεις :

$$1. \quad 0 \leq f_i \leq 1 \quad \text{και} \quad 2. \quad f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

- Αθροιστικές Συχνότητες: Όταν εξετάζουμε ποσοτικές μεταβλητές εκτός από τα n_i , f_i υπολογίζουμε τις αθροιστικές συχνότητες N_i και τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i . Ισχύουν οι σχέσεις :

$$1. \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = N_k$$

$$2. \quad n_k = N_k - N_{k-1}$$

$$3. \quad f_k = F_k - F_{k-1}.$$

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Ανάλογα με την μεταβλητή φτιάχνουμε και τα αντίστοιχα διαγράμματα.

- Ραβδόγραμμα : Αποτελείται από ορθογώνιες στήλες με βάσεις στον οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα. Χρησιμοποιείται σε ποιοτικές μεταβλητές.
- Διάγραμμα Συχνοτήτων : Χρησιμοποιείται για περιγραφή ποσοτικών μεταβλητών. Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i) προκύπτει το πολύγωνο συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων.
- Κυκλικό Διάγραμμα : Χρησιμοποιείται τόσο σε ποιοτικές όσο και ποσοτικές μεταβλητές. Τα τόξα του υπολογίζονται σύμφωνα με τον τύπο: $\omega_i = v_i \frac{360}{v}$.
- Ιστόγραμμα Συχνοτήτων : Χρησιμοποιείται σε ομαδοποιημένα δεδομένα. Αποτελείται από ορθογώνια (ιστούς) η βάση των οποίων είναι ίση με το πλάτος της κλάσης και το ύψος είναι τέτοιο ώστε το εμβαδόν του ορθογώνιου να ισούται με την συχνότητα της κάθε κλάσης.

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

- ΒΗΜΑ 1^ο : Εκλογή του αριθμού των κλάσεων ή των ομάδων. Χρησιμοποιούμε τον πίνακα του βιβλίου στην σελ. 72.
- ΒΗΜΑ 2^ο : Προσδιορισμός πλάτους των κλάσεων σύμφωνα με τον τύπο $c = \frac{R}{k}$ όπου R είναι το εύρος και k ο αριθμός των κλάσεων. Στρογγυλοποιούμε προς τα πάνω αν χρειαστεί.
- ΒΗΜΑ 3^ο : Κατασκευή κλάσεων. Ξεκινάμε από την μικρότερη παρατήρηση και προσθέτουμε κάθε φορά το πλάτος.
- ΒΗΜΑ 4^ο : Γίνεται η διαλογή των παρατηρήσεων. Συχνότητα κάθε κλάσης εδώ καλείται το πλήθος των παρατηρήσεων v_i που προκύπτει από την i κλάση.

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

Μέτρα που μας δίνουν τη θέση του ‘κέντρου’ των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και είναι η μέση τιμή \bar{x} , η διάμεσος δ , και (η επικρατούσα τιμή M_0). Οι τύποι τους φαίνονται στα τυπολόγια.

ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Τέτοια μέτρα είναι το εύρος R, η διακύμανση S^2 , η τυπική απόκλιση S, και το (ενδοτεταρτομοριακό εύρος). Ομοίως οι τύποι τους φαίνονται στα τυπολόγια.

ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ (εκτός ύλης)

Καλείται η ευθεία $y = \alpha + \beta \cdot x$ που προσαρμόζει καλύτερα τα σημεία (x, y) των μεταβλητών X, Y όπου α, β παράμετροι που πρέπει να εκτιμηθούν ώστε η ευθεία που θα προκύψει να δίνει την καλύτερη σχέση εξάρτησης που υπάρχει μεταξύ x, y .

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ (εκτός ύλης)

Η μέθοδος που συνίσταται στον προσδιορισμό των α, β ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων (σφαλμάτων) των (x_i, y_i) από την ευθεία καλείται μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων. Τα δε α, β καλούνται εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Ένα από τα σημεία που διέρχεται η $\psi = \alpha + \beta x$ είναι το (\bar{x}, \bar{y}) .
- Γεωμετρική Ερμηνεία της Εκτιμήτριας α : Η τιμή της εκτιμήτριας α παριστάνει την τεταγμένη του σημείου στο οποίο η ευθεία παλινδρόμησης τέμνει τον yy' , δηλαδή είναι η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής y για $x = 0$.
- Γεωμετρική Ερμηνεία της Εκτιμήτριας β : Με αύξηση της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά μια μονάδα, οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής Y αυξάνονται ή μειώνονται κατά β μονάδες. (Αν $\beta > 0$ έχω αύξηση και μείωση αν $\beta < 0$). Η απόδειξη προκύπτει ως εξής:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω x_1 και x_2 δυο παρατηρήσεις ενός δείγματος με

$$x_2 = x_1 + 1, \quad \text{τότε } y_1 = \alpha + \beta x_1 \text{ και } y_2 = \alpha + \beta x_2 =$$

$$\alpha + \beta (x_1 + 1) = \alpha + \beta + \beta x_1. \quad \text{Τότε } y_2 - y_1 = \beta$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για να αποδείξουμε ότι μια κατανομή είναι **κανονική** αποδεικνύουμε ένα από τα εξής: **α) $\bar{x} = \delta = M_0$** ή **β) $R = 6s$**

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot v_i}{n}$ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i}{n}$
ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΓΙΑ ΜΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ	δ= μεσαία παρατήρηση όταν ν=περιττός
	δ= ημιάθροισμα των δυο μεσαίων παρατηρήσεων όταν ν=άρτιος
ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ (ΟΡΙΣΜΟΣ)	$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$
ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{n}$
	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - \left(\sum_{i=1}^k x_i \cdot v_i\right)^2 \frac{1}{n}}{n}$
ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ	$s = \sqrt{S^2}$
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ	$CV = \frac{s}{\bar{x}}$
ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΓΡ. ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ	$a = \bar{y} - \beta \cdot \bar{x}$
	$\beta = \frac{n \sum_i x_i y_i - \left(\sum_i x_i\right) \left(\sum_i y_i\right)}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η κατανομή των σχετικών συχνοτήτων των βαθμών 300 φοιτητών του Μαθηματικού τμήματος που πέρασαν το μάθημα της Στατιστικής δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Βαθμός χ_i	5	6	7	8	9	10
Σχ. Συχνότητα	0.16	0.4	0.15	0.12	0.09	0.08

Να υπολογίσετε:

- α) Πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό 5.
- β) Πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό μεγαλύτερο του 6.
- γ) Πόσοι που πέρασαν το μάθημα έχουν πάρει βαθμό μέχρι 7.
- δ) Πόσοι πήραν 9 ή 10.
- ε) Να βρεθούν $N_i, F_i, F_i \%$.
- ζ) Να γίνει το ιστόγραμμα των συχνοτήτων.

2. Η κατανομή των αθροιστικών συχνοτήτων N_i μιας μεταβλητής χ είναι :

X_i	15	16	17	18	19	20
N_i	8	12	15	32	40	50

Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων $f_i, f_i \%, v_i, N_i, F_i$.

[www.hms.gr/ Τράπεζα θεμάτων Ε.Μ.Ε]

3. Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος Υπηρεσίας [-)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	10	15	12	15	18	18	12

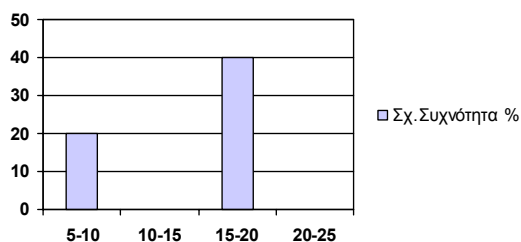
- α) Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;
- β) Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί όταν συμπληρώσει 35 χρόνια :

ι) Πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν τα επόμενα 12,5 χρόνια;

ιι) Πόσοι τελικά πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα 5 χρόνια ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμείνει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2000]

4. Στο παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, που αναφέρεται στα ποσά προστίμων σε € 50 παραβατών, σβήστηκαν κατά λάθος τα ορθογώνια των κλάσεων (10-15) και (20-25).



Είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει ποσό κάτω των 5 € ή άνω των 25 € και ότι η συχνότητα της κλάσης (20-25) είναι τριπλάσια από τη συχνότητα της κλάσης (10-15).

- α) Να κατασκευαστούν τα ορθογώνια αυτά.
- β) Να κατασκευαστεί ο πίνακας συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
[Προτεινόμενα θέματα Φροντιστηρίων]

5. Το πλήθος των επιτυχόντων στα Α.Ε. Ι κατά το έτος 2000, που αποφοίτησαν από το Λύκειο των Αθηνών, δίνεται κατά κατεύθυνση στον παρακάτω πίνακα.

χ_i	v_i	f_i	$f_i \%$	$F_i \%$
Θετική Κατεύθυνση	24		48	
Τεχνολογική Κατεύθυνση				80
Θεωρητική Κατεύθυνση				
Σύνολο				-

- α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας.
- β) Να γίνει το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
- γ) Να γίνει το κυκλικό διάγραμμα των σχετικών συχνοτήτων %.

6. Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Κόμμα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
x_i	v_i	f_i
A		0,15
B	150	0,30
Γ		0,35
Δ		
Σύνολο		

- α) Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν στο τμήμα αυτό.
- β) Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα σε αυτό το εκλογικό τμήμα.

γ) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2002 ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ]

7. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής X. Να γράψετε στο τετράδιο σας συμπληρωμένο τον πίνακα .

ΚΛΑΣΕΙΣ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ O_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i	ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΧ.ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ $F_i \%$
1-5				20
5-9				50
9-13				85
13-17				95
17-21		2		
ΣΥΝΟΛΟ			1	

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2001]

8. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ηλικίες των επισκεπτών ενός Αρχαιολογικού Μουσείου μια βροχερή μέρα. Συμπληρώστε τον πίνακα.

Ηλικία [-)	Επισκέπτες v_i	f_i	$F_i \%$
16-20			5
20-24	40	0,2	
24-28			35
28-32			55
32-36	20		
36-40			95
40-44			

9. Υπολογίστε στον διπλανό πίνακα τα x_4, v_4 , έτσι ώστε :

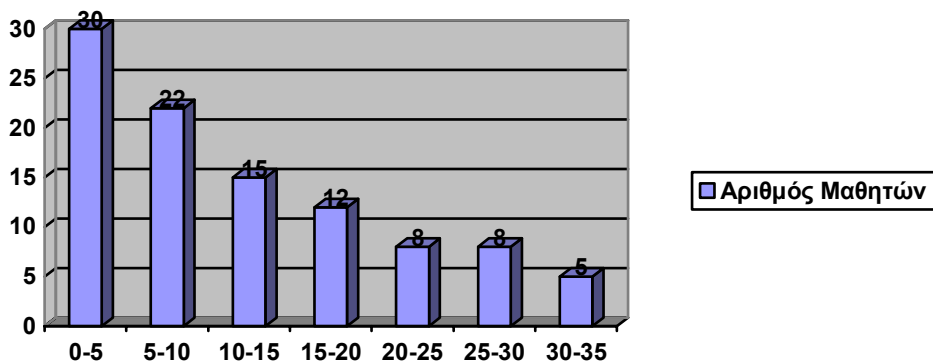
- ι) να υπάρχουν δυο επικρατούσες τιμές και
 ιι) η μέση τιμή να είναι 9,62

x_i	v_i
6	7
8	5
10	10
x_4	v_4

10. Στο παρακάτω ιστόγραμμα δίνεται η ομαδοποιημένη κατανομή των απουσιών των μαθητών μιας τάξης Γυμνασίου στη διάρκεια του πρώτου τριμήνου.

α) Κατασκευάστε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων και υπολογίστε τη μέση τιμή των απουσιών του τμήματος.

β) Κατασκευάστε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων.



11. Οκτώ διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν μέση τιμή 16 . Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί καθώς και η διάμεσος τους .

12. Η μέση τιμή και η διάμεσος επτά αριθμών είναι 8. Οι πέντε από αυτούς είναι : 2, 5, 10, 11, 14. Να βρεθούν οι άλλοι δυο.

13. Ο μέσος όρος στα Μαθηματικά των μαθητών μιας τάξης ενός Λυκείου είναι 14. Στην τάξη αυτή ήρθαν από άλλο σχολείο δυο μαθητές με βαθμούς: ο ένας 19 και ο άλλος 13. Ο νέος μέσος όρος είναι 14,2. Να βρεθεί ο αρχικός αριθμός των μαθητών της τάξης.

[www.hms.gr/ Τράπεζα θεμάτων Ε.Μ.Ε]

14. Η κατανομή 150 μαθητών ενός Λυκείου ως προς τις ώρες μελέτης ανά βδομάδα έχει μέση τιμή $\bar{x}=25$. Αν οι 40 μαθητές της Α' Λυκείου μελετούν κατά μέσο όρο 18 ώρες την εβδομάδα, ενώ οι 50 μαθητές της Β' Λυκείου κατά 22 ώρες, να βρεθεί ο μέσος χρόνος μελέτης των μαθητών της Γ' Λυκείου.

[Ευκλείδης Β' τεύχος 42]

15. Η μέση ηλικία 16 αγοριών και 12 κοριτσιών μιας τάξης είναι 15,2 χρόνια. Εάν η μέση ηλικία των κοριτσιών είναι 14,8 χρόνια , να βρείτε τη μέση ηλικία των αγοριών.

16. Το μέσο ύψος 9 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 205 εκατοστά.

α) για να ψηλώσει την ομάδα ο προπονητής πήρε έναν παίκτη ύψους 216 εκατοστά. Ποιο είναι τώρα το μέσο ύψος της ομάδας ;

β) Αν ο προπονητής ήθελε να φτάσει το μέσο ύψος της ομάδας του στα 208 εκατοστά, τι ύψος θα έπρεπε να έχει ο νέος παίκτης ;

17. Στην ομάδα μπάσκετ 12 παικτών το μέσο ύψος είναι 2,02 μέτρα. Να βρεθεί το μέσο ύψος της ομάδας αν :

α) αποδεσμευτεί ένας παίκτης με ύψος 1,90.

- β) δοθεί μεταγραφή σε δύο παίκτες με ύψος 2,05 και 1,95 αντίστοιχα.
 γ) φύγει ένας παίκτης με ύψος 1,90 και έλθει ένας με ύψος 2,10.
 δ) θέλουμε η ομάδα να έχει μέσο ύψος 2,04 μέτρα, τι ύψος πρέπει να έχει ο παίκτης που θα έλθει στην ομάδα.

18. Ένα κείμενο υπαγορεύτηκε σε 80 καθηγητές. Από την εξέταση των γραπτών ως τους τα ορθογραφικά λάθη συμπληρώθηκε ο παρακάτω πίνακας:

χ_i	v_i
0	5
1	10
2	25
3	20
4	15
5	5

α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή των λαθών.

β) Να βρεθεί η διάμεσος.

19. Ο διευθυντής ενός σχολείου ανέθεσε σε έναν μαθηματικό να κάνει μια στατιστική μελέτη σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών του σχολείου στα μαθηματικά. Ο εργένης και αφηρημένος μαθηματικός έβαλε για πλύσιμο μαζί με το πουκάμισο του και το χαρτί, στο οποίο είχε κάνει τη μελέτη. Από τα υπολείμματα του πλυμένου χαρτιού κατασκευάζει τον πίνακα που φαίνεται δίπλα. Ακόμα θυμάται με σιγουριά ότι κανένας μαθητής δεν πήρε κάτω από 7 μονάδες. Μπορείτε να τον συμπληρώσετε;

Βαθμός [-)	v_i	f_i	$f_i \%$
0-2,5			
2,5-5			
5-7,5	12		
7,5-10		0,08	
10-12,5			
12,5-15	288		
15-17,5			21,6
17,5-20	18		
Σύνολο	750		

20. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [-)	Αθροιστική Σχ. Συχνότητα.
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75
75-85

α) Αν γνωρίζετε ότι η σχ. συχνότητα της 3^{ης} κλάσης είναι διπλάσια της σχ. συχνότητας της 1^{ης} κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην 3^η και 4^η κλάση.

β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2001]

21. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα ορθογραφικά σφάλματα μαθητών της Γ' Λυκείου κατά την υπαγόρευση ενός κειμένου. Ο μέσος όρος των λαθών είναι $\bar{x}=2,63$

όπου X η μεταβλητή των λαθών. Από τον πίνακα αυτόν έχουν σβηστεί οι συχνότητες των τιμών $\chi=2, \chi=3$.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΛΑΘΩΝ χ_i	ΠΟΣΟΣΤΟ $f_i \%$	ΑΘΡ. ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ $F_i \%$
1	16	16
2	47
3	74
4	26	100
ΣΥΝΟΛΟ	100	--

α) Να υπολογιστεί η διακύμανση.

β) Αν ο πληθυσμός του δείγματος είναι $n=100$ να υπολογιστεί η διάμεσος.

[www.hms.gr/ Τράπεζα θεμάτων Ε. Μ. Ε]

22. Να γράψετε στο τετράδιο σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

χ_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	$\chi_i v_i$	$v_i (\bar{\chi} - \chi_i)^2$
1	10				10	
2				35		
3						
ΣΥΝΟΛΟ	50	1	100			

α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο.

β) Να δειχθεί ότι $s^2=0,49$.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2000]

23. Σε μία εταιρεία το 68% των υπαλλήλων παίρνει μέσο εβδομαδιαίο μισθό 250 €, το 28% παίρνει μέσο εβδομαδιαίο μισθό 300 € και τα υπόλοιπα 8 άτομα παίρνουν μέσο εβδομαδιαίο μισθό 350 €. Να βρείτε :

α) τα πλήθος των υπαλλήλων της εταιρείας.

β) τον μέσο εβδομαδιαίο μισθό όλων των υπαλλήλων της εταιρείας,

[Απ. 1. 200 2. 268 €]

24. Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων

x_i	Συχνότητα (v_i)	$v_i x_i$	Σχετική Συχνότητα (f_i)	Σχετική Συχνότητα % ($f_i \%$)
1	12			
2	15			
3	8			
4	5			
5	10			
Αθροίσματα				

α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

β. Να βρείτε τη μέση τιμή.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001 Τ.Ε. Ε]

25. Ρωτήσαμε 50 εργαζόμενους μιας εταιρείας ως προς τις μηνιαίες αποδοχές τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στις δύο πρώτες στήλες του παρακάτω πίνακα:

Αποδοχές σε Ευρώ (x_i)	Αριθμός εργαζομένων (v_i)	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική Συχνότητα (f_i)	Σχετική αθροιστική συχνότητα	$v_i x_i$
800	6				
900	17				
1000	12				
1100	8				
1200	7				
Αθροίσματα	50				

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις κενές στήλες.

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2002 ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ Τ. Ε. Ε]

26. Η μέση τιμή του βάρους των μαθητών ενός τμήματος είναι 60 κιλά. Αν ο συντελεστής μεταβολής είναι 0,2 και $v_1(x_1 - \bar{x})^2 + v_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + v_k(x_k - \bar{x})^2 = 3600$.

α) να βρεθεί η διακύμανση

β) ο αριθμός των μαθητών n .

[Ένθετο ' Ο υποψήφιος ' 2003]

27. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής με τις αντίστοιχες συχνότητες. Μια συχνότητα χάθηκε. Να βρεθεί η συχνότητα που λείπει σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

α) η μέση τιμή είναι 8,6.

β) υπάρχουν δυο επικρατούσες τιμές.

x_i	5	6	7	8	10	12	20
v_i	2	4	1	;	2	2	1

28. Σε μια μεγάλη πολυκατοικία κατοικούν 50 άτομα. Η ηλικία τους κυμαίνεται από 15 μέχρι 65 χρόνια. Αν γνωρίζουμε ότι 10 άτομα έχουν ηλικία κάτω από 25 χρόνια, 15 άτομα έχουν ηλικία κάτω από 35 χρόνια, 10 άτομα έχουν ηλικία 55 χρόνια και άνω και 15 άτομα έχουν ηλικία ίση και μεγαλύτερη από 45 χρόνια. Ζητούνται :

α) να παρασταθούν τα δεδομένα σε ένα πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

β) να υπολογιστεί η μέση τιμή.

γ) να υπολογιστεί η διακύμανση.

δ) να υπολογιστεί η επικρατούσα τιμή.

[Ένθετο ‘ Ο υποψήφιος ’ 2003]

29. Σε ένα δείγμα μεγέθους 20 οι τιμές μιας μεταβλητής είναι 3, 4, 5, 7, 8, ψ . Η τιμή ψ είναι διαφορετική από τις άλλες και δεν είναι μικρότερη. Επίσης έχουμε τον πίνακα :

x_i	3	4	5	7	8	Ψ
v_i	2	5	2	4	;	;

- α) αν το εύρος είναι 6 να βρεθεί ο ψ ,
 β) να βρεθούν οι συχνότητες των τιμών 8 και ψ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις (ξεχωριστά)
 ι) η μέση τιμή είναι 6,25
 ιι) υπάρχουν δυο επικρατούσες τιμές,
 γ) να βρεθεί η διάμεσος.

30. Η καθυστέρηση σε λεπτά 400 πτήσεων μιας αεροπορικής εταιρίας δίνεται στον διπλανό πίνακα.

- α) Ποια είναι η επικρατούσα τιμή;
 β) Προσθέστε στον πίνακα την στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων και υπολογίστε τη διάμεσο.
 γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή.
 δ) Βρείτε την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβλητότητας. Είναι ο πληθυσμός ομοιογενής;

Καθυστέρηση [-)	Πτήσεις v_i
0-20	60
20-40	53
40-60	87
60-80	53
80-100	61
100-120	86
Άθροισμα	400

31. Σε ένα δείγμα 30 μαθητών της Α' Γυμνασίου βρήκαμε μέσο βάρος 50 κιλά και τυπική απόκλιση 7 κιλά. Σε ένα άλλο δείγμα 20 μαθητών της Α' Λυκείου βρήκαμε μέσο βάρος 75 κιλά και τυπική απόκλιση 7 κιλά. Να βρεθεί ποιος πληθυσμός έχει την μεγαλύτερη ομοιογένεια.

32. Σε ένα τεστ στο μάθημα της Στατιστικής με άριστα το 20 οι 57 μαθητές δυο τάξεων πήραν τις παρακάτω βαθμολογίες:

ΒΑΘΜΟΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
[0,2)	4
[2,4)	1
[4,6)	3
[6,8)	5
[8,10)	8
[10,12)	12
[12,14)	14
[14,16)	5
[16,18)	3
[18,20]	2

Οι μισθοί των εργαζομένων στο τμήμα Β είναι :
950, 900, 1060, 980, 920, 945, 975, 930, 900, 940.

Να βρείτε :

- α) Το άθροισμα των μηνιαίων μισθών του τμήματος Α.
- β) Τη μέση τιμή, το εύρος και την επικρατούσα τιμή των μισθών του τμήματος Β.
- γ) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2002 ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ]

38. Οι βαθμοί των 11 μαθητών μιας τάξης ενός Τ.Ε.Ε. σε ένα μάθημα είναι:

12, 12, 9, 15, 12, 16, 17, 7, 19, 18, 17.

Για τα δεδομένα αυτά:

- α. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.
- β. Να βρείτε τη μέση τιμή.
- γ. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.
- δ. Να βρείτε τη διάμεσο.
- ε. Να βρείτε τη διακύμανση.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2002 Τ. Ε. Ε]

39. Σε μία πόλη σημειώθηκαν κατά τον Μήνα Μάιο οι παρακάτω θερμοκρασίες σε βαθμούς Κελσίου:

18, 19, 23, 25, 27, 23, 21, 20, 22, 22.

Να βρεθεί η μέση τιμή των θερμοκρασιών, το εύρος και η τυπική απόκλιση.

40. Το βάρος 10 μαθητών σε κιλά είναι :

52, 50, 57, 52, 61, 50, 50, 52, 57, 50

Να υπολογίσετε :

- α) τη μέση τιμή β) τη διάμεσο γ) το εύρος

41. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την ηλικία 100 εργαζομένων μιας επιχείρησης.

Ηλικία	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)
Συχνότητα	30	45	20	5

- α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- β) Να βρεθεί η μέση τιμή, η διακύμανση και ο συντελεστής μεταβλητότητας των δεδομένων του πίνακα. Είναι το δείγμα ομοιογενές ;

γ) Να βρεθεί :

- ι) ο αριθμός των εργαζομένων που είναι τουλάχιστον 30 ετών.
- ii) το ποσοστό των εργαζομένων με ηλικία μικρότερη των 40 ετών.

[Ένθετο « Ο υποψήφιος » 2003]

42. Οι τιμές δέκα προϊόντων σε ένα κατάστημα είναι :

7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14 σε ευρώ.

Να υπολογίσετε για τις τιμές των παραπάνω προϊόντων :

- α) τη μέση τιμή.
- β) την επικρατούσα τιμή.
- γ) τη διάμεσο.
- δ) τη διακύμανση.
- ε) να βρεθεί το πλήθος των προϊόντων με τιμή τουλάχιστον 12 ευρώ.

43. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις πωλήσεις σε χιλιάδες € που πραγματοποιήθηκαν από τους πωλητές μιας εταιρείας.

Πωλήσεις x_i	Αρ. Πωλητών v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1000	20					20
2000		0,10				
3000			60			
4000					15	
5000	20					
6000		0,05				

- α) να συμπληρωθούν τα κενά του πίνακα.
- β) να βρεθεί αριθμός των πωλητών που έκαναν πωλήσεις μέχρι 3000 €.
- γ) να βρεθεί ο αριθμός των πωλητών που έκαναν πωλήσεις από 2000 μέχρι και 5000 €.
- δ) να βρεθεί το ποσοστό των πωλητών που έκαναν πωλήσεις αξίας τουλάχιστον 4000 €.
- ε) να βρεθεί η μέση τιμή του δείγματος.
- στ) αν στην εταιρεία προσληφθούν 40 υπάλληλοι και ο καθένας κάνει πωλήσεις αξίας 4000 €, να βρεθεί η νέα μέση τιμή του δείγματος.

[Ένθετο « Ο υποψήφιος » 2003]

44. Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές :

5, 3, 3ω, 3, 2ω, 3, 3ω, ω με $\omega > 0$

α) αν η μέση τιμή τους είναι 4 , να αποδείξετε ότι $\omega = 2$

β) για $\omega = 2$, να βρείτε :

- ι) το εύρος των τιμών.
- ii) την επικρατούσα τιμή.
- iii) την τυπική απόκλιση.

[ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2003 Τ. Ε. Ε]

45. Τα δέκα τμήματα της Γ Λυκείου μιας σχολικής μονάδας έχουν το εξής πλήθος μαθητών :

30, 26, 22, 30, 28, 36, 28, 23, 25, 32

Να βρείτε :

- α) τη μέση τιμή β) τη διάμεσο γ) το εύρος
- δ) την επικρατούσα τιμή.

46. Ένα δείγμα τριών παρατηρήσεων έχει διάμεσο 13, εύρος 9 και μέση τιμή 14. Να βρεθούν οι τρεις αυτές παρατηρήσεις.

47. Ο πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών που έχουν οι οικογένειες μιας πολυκατοικίας της Θεσσαλονίκης.

Αριθμός Παιδιών x_i	0	1	2	3	4	5
Οικογένειες V_i	1	7	11	4	1	1

Να υπολογίσετε :

- α) τη μέση τιμή β) τη διάμεσο γ) το εύρος
- δ) την τυπική απόκλιση ε) τον συντ. μεταβλητότητας

48. Ο πίνακας παρουσιάζει τις ηλικίες των υπαλλήλων ενός εργοστασίου κατασκευής χρωμάτων :

Ηλικία [-)	Υπάλληλοι V_i
20-30	5
30-40	14
40-50	11

50-60	8
60-70	2

Να υπολογίσετε :

- α) τη μέση τιμή β) την τυπική απόκλιση γ) τον συντ. μεταβλητότητας

49. Οι μέγιστες ημερήσιες θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν στην Θεσσαλονίκη σε 10 διαδοχικές μέρες ήταν :

15, 15, 16, 18, 18, 16, 17, 18, 17, 20

Να υπολογιστούν :

- α) η μέση τιμή β) τη διάμεσο γ) το εύρος
 δ) τη διασπορά ε) την επικρατούσα τιμή.

50. Ο πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα Φυσικής :

Βαθμός x_i	8	10	13	16	17	19
v_i	4	2	5	8	3	2

Να υπολογίσετε :

- α) το ποσοστό των μαθητών που πήραν το πολύ 10,
 β) το ποσοστό των μαθητών που πήραν τουλάχιστον 16,
 γ) τη μέση τιμή των βαθμών ,
 δ) τη διάμεσο των βαθμών,
 ε) την επικρατούσα τιμή,
 στ) το εύρος.

51. α) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	v_i	N_i	$f_i \%$
4		11	
5		19	
6		26	
7		35	
8		40	
9		50	
Άθροισμα			

- β) Ποια είναι η επικρατούσα τιμή, και ποια η διάμεσος;
 γ) Υπολογίστε την μέση τιμή.

52. Για την μεταβλητή X του παρακάτω πίνακα γνωρίζουμε ότι :

- ι) υπάρχουν δυο επικρατούσες τιμές και
- υ) η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 10,76$.

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
5	6	
7	5	
10	v_3	
13	16	
x_5	7	
Άθροισμα		

- α) Υπολογίστε v_3, x_5 .
- β) Ποια τιμή είναι η διάμεσος;
- γ) Υπολογίστε την σχ.συχνοτήτα $f_3\%$.

53. α) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα, ο οποίος αναφέρεται στη βαθμολογία 200 μαθητών σε ένα μάθημα, στο οποίο εξετάστηκαν για την είσοδο τους σε μία ιδιωτική σχολή:

Βαθμός x_i	Συχνότητα v_i	N_i	$x_i \cdot v_i$
1		22	
2		27	
3			63
4			68
5		102	
6	48		
7		186	
8			
Άθροισμα	200		1000

- β) Υπολογίστε τη μέση βαθμολογία.
- γ) Η σχολή αποφάσισε να δεχθεί το 25% των υποψηφίων. Τι βαθμό πρέπει να έχει κάποιος για να εισαχθεί;

54. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων στον οποίο καταγράφεται ο αριθμός των τερμάτων που σημειώθηκαν σε κάθε έναν από τους 20 πρώτους αγώνες του πρωταθλήματος ποδοσφαίρου.

- α) Να υπολογίσετε τις συχνότητες v_2, v_4 του πίνακα αν γνωρίζεται ότι η v_2 είναι διπλάσια της v_4 .
- β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή.
- γ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Αρ.Τερμάτων x_i	Αγώνες v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0	4			
1				
2	5			
3				
4	2			
Σύνολο				

δ) Να βρείτε το ποσοστό των αγώνων στους οποίους σημειώθηκαν τουλάχιστον 2 τέρματα.

ε) Να βρείτε το πλήθος των αγώνων στους οποίους σημειώθηκαν ακριβώς 3 τέρματα.

55. Δίνεται ο πίνακας που αφορά μια μεταβλητή X . Γνωρίζουμε ότι : το εύρος είναι 10 και η μέση τιμή είναι 11.

α) Υπολογίστε την τιμή x_5 .

β) Αποδείξτε ότι : $\alpha = 9$ και $\beta = 8$.

γ) Ποια η διάμεσος ;

δ) Αποδείξτε ότι η τυπική απόκλιση είναι ίση με $\frac{\sqrt{197}}{4}$.

χ_i	v_i	$\chi_i \cdot v_i$
5	4	
7	5	
10	6	
13	α	
x_5	β	
Άθροισμα	32	

56. Σε ένα ινστιτούτο αδυνατίσματος οι πελάτες είναι χωρισμένοι σε τρεις ομάδες. Στην ομάδα Α συμμετέχουν 24 άτομα με μέσο βάρος 135 κιλά, στην ομάδα Β βρίσκονται 21 άτομα με συνολικό βάρος 2.310 κιλά, ενώ στην ομάδα Γ το μέσο βάρος είναι 92 κιλά. Το συνολικό βάρος των πελατών είναι 8,77 τόνοι.

α) Ποιο το μέσο βάρος στην ομάδα Β;

β) Πόσα κιλά ζυγίζουν συνολικά τα άτομα των ομάδων Α και Β;

γ) Πόσα άτομα συμμετέχουν στην ομάδα Γ;

δ) Ποιο είναι το μέσο βάρος όλων των πελατών;

57. Οι βαθμοί 50 μαθητών της Γ' Λυκείου υπολογίστηκαν σε ένα βαθμολογικό κέντρο σε κλίμακα 0-20 και παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Διαστήματα [-)	Μαθητές v_i	O_i	$v_i \cdot O_i$
0-2	3		
2-4	4		
4-6	4		
6-8	5		
8-10	5		
10-12	5		
12-14	6		
14-16	7		
16-18	6		
18-20	5		
Άθροισμα	50		

α) Αποδείξτε ότι ο μέσος βαθμός είναι : 11

β) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση.

γ) Είναι το δείγμα ομοιογενές;

58. Συμπληρώστε καθέναν από τους παρακάτω πίνακες :

x_i	v_i	N_i	f_i
2		40	
4	50		
6			
8			40
10	25	250	
Άθροισμα			

x_i	v_i	$f_i \%$	f_i
1			
3	12	6	16
5			50
7			
Άθροισμα			

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε:

ι) τη διάμεσο, ιι) την επικρατούσα τιμή, ιιι) τη μέση τιμή.

59. Στον πρώτο όροφο μιας τριώροφης οικοδομής υπάρχουν 4 διαμερίσματα με μέσο όρο 3 κατοίκους ανά διαμέρισμα, στον δεύτερο όροφο 4 διαμερίσματα με μέσο όρο 2,5 κατοίκους ανά διαμέρισμα και στον τρίτο, 3 διαμερίσματα με μέσο όρο 4 κατοίκους ανά διαμέρισμα.

α) Πόσοι ένοικοι υπάρχουν στην πολυκατοικία;

β) Ένας ένοικος του 2^{ου} μετακόμισε. Ποιος είναι τώρα ο μέσος όρος κατοίκων ανά διαμέρισμα σε όλη την οικοδομή ;

60. Η κατανομή του βάρους σε κιλά 270 μαθητών ενός σχολείου δίνεται στον παρακάτω πίνακα :

Βάρος [-)	Μαθητές v_i
54-60	18
60-66	46
66-72	71
72-78	73
78-84	42
84-90	20
Άθροισμα	270

α) Αποδείξτε ότι το μέσο βάρος είναι 72 κιλά.

β) Ποια η διάμεσος;

γ) Αν καθένα από τα 150 κορίτσια του σχολείου χάσει από 3 κιλά και καθένα από τα 120 αγόρια πάρει από 1,5 κιλό, ποιο είναι το νέο μέσο βάρος των μαθητών;

61. Σε ένα κατάστημα υπάρχουν τριών ειδών φιστίκια, αρίστης ποιότητας, που πουλιούνται 2,5 € , 2,7 € και 3€ το κιλό, ανάλογα με το είδος. Το αφεντικό μέτρησε τις ποσότητες από κάθε είδος και έφτιαξε τον παρακάτω πίνακα :

Τιμή ανά κιλό χ_i	Ποσότητα σε κιλά ν_i	$\chi_i \cdot \nu_i$
2,5	α	
2,7	20	
3	β	
Άθροισμα	50	137

- α) Ποια η μέση τιμή πώλησης ;
 β) Αποδείξτε ότι $\alpha = 14$, $\beta = 16$.
 γ) Συμπληρώστε τον πίνακα.
 δ) Αν πουληθούν 10 κιλά από τα φθηνότερα φιστίκια, ποια θα είναι η μέση τιμή πώλησης των υπολοίπων ;

62. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την ηλικία 100 εργαζομένων μιας επιχείρησης.

Ηλικία	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)
Συχνότητα	30	45	20	5

- α) Να κατασκευαστεί ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
 β) Να βρεθεί η μέση τιμή, η διακύμανση και ο συντελεστής μεταβλητότητας των δεδομένων του πίνακα. Είναι το δείγμα ομοιογενές ;
 γ) Να βρεθεί :
 ι) ο αριθμός των εργαζομένων που είναι τουλάχιστον 30 ετών.
 ιι) το ποσοστό των εργαζομένων με ηλικία μικρότερη των 40 ετών.

63. Ο παρακάτω πίνακας καταγράφει σε κλάσεις τα κέρδη ενός δείγματος κατασκευαστικών επιχειρήσεων το 2001 σε εκατοντάδες χιλιάδες €.

Κέρδη σε Εκατοντάδες Χιλιάδες €	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)
Αριθμός Επιχειρήσεων	60	85	30	20	15

Να υπολογιστούν:

1. Το μέσο κέρδος των επιχειρήσεων.
2. Το ποσοστό των επιχειρήσεων που βρίσκονται στο επικρατέστερο διάστημα κερδών.
3. Ο αριθμός των επιχειρήσεων του δείγματος οι οποίες κέρδη 100 χιλιάδες € έως 500 χιλιάδες €.
4. Το ποσοστό των επιχειρήσεων που δηλώνουν από 200 χιλιάδες € έως 600 χιλιάδες € ή από 300 χιλιάδες € έως 800 χιλιάδες €.

[Απ. 1. 3.5 3. 130 4.135]

64. Σε ένα Λύκειο φοιτούν 300 μαθητές και η μέση βαθμολογία τους στα Μαθηματικά το Α' Τετράμηνο είναι 15. Στο Β' Τετράμηνο ένας ορισμένος αριθμός μαθητών αύξησε την βαθμολογία του κατά 4 μονάδες ο καθένας, ενώ οι υπόλοιποι μείωσαν τη βαθμολογία τους κατά 2 μονάδες ο κάθε μαθητής. Να βρείτε πόσοι μαθητές βελτίωσαν τη βαθμολογία τους και πόσοι την χειροτέρευσαν, αν γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία στο Β' Τετράμηνο έγινε 17.

[Ένθετο 'Ο υποψήφιος' 2003]

65. α) Ένα δείγμα $\{ w_1, w_2, \dots, w_n \}$ δίνει τα βάρη σε κιλά n ατόμων. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις.

1. Η μέση τιμή εκφράζεται σε κιλά.
2. Η διακύμανση εκφράζεται σε κιλά.
3. Η τυπική απόκλιση εκφράζεται σε κιλά.
4. Ο συντελεστής μεταβολής εκφράζεται σε κιλά.

Αν \bar{x} είναι η μέση τιμή του δείγματος να δειχθεί ότι $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$

β) Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του παραπάνω δείγματος (n παρατηρήσεων) είναι 8 και 10 αντίστοιχα. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος:

$$\{-6 w_1 + 4, -6 w_2 + 4, \dots, -6 w_n + 4\}$$

γ) Η μέση τιμή 100 αριθμών είναι 24 και η μέση τιμή των 60 πρώτων απ' αυτούς είναι 16. Να βρεθεί η μέση τιμή των υπολοίπων.

δ) Αν για σύνολο n παρατηρήσεων είναι : $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 55$, $s = \sqrt{2}$, $\bar{x} = 3$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και S τυπική απόκλιση του δείγματος. Να υπολογιστεί ο n .

[Απ. Β2. 36 Β3. 5]
[Ένθετο 'Ο υποψήφιος' 2002]

66. Δίνονται οι παρατηρήσεις x_i με $i=1,2,\dots,40$. Δέκα απ' αυτές μειώνονται κατά 4 και 6 από αυτές μειώνονται κατά 8 και προκύπτουν έτσι οι παρατηρήσεις y_i όπου $i=1,2,\dots,40$.

α.) να βρείτε την μέση τιμή των παρατηρήσεων y_i αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων x_i είναι 25.

β.) να βρείτε την διακύμανση και την τυπική απόκλιση των y_i αν $\sum_{i=1}^{40} y_i^2 = 36400$.

γ.) να εξετάσετε αν το δείγμα των y_i είναι ομοιογενές.

[Απ. Α. 25,2 Β. 16,58 Γ. Δεν είναι ομοιογενές]
[Ευκλείδης Β' τεύχος 44]

67. Η κατανομή του χρόνου (x σε λεπτά) που χρειάζεται να κάνει ο συρμός του ηλεκτρικού σιδηρόδρομου μεταξύ των σταθμών Καλλιθέας – Ομόνοιας είναι κανονι-

κή. Αν για 100 διαδρομές μεταξύ αυτών των σταθμών έχουμε $\sum_{i=1}^{100} x_i \cdot v_i = 1000$ και

$\sum_{i=1}^{100} x_i^2 \cdot v_i = 10081$ τότε να υπολογιστούν:

1. Ο μέσος χρόνος που χρειάζεται ο ηλεκτρικός σιδηρόδρομος για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή.

2. Η τυπική απόκλιση των παραπάνω διαδρομών.

3. Να εξεταστεί αν η κατανομή είναι ομοιογενής.

Για την παραπάνω κατανομή χρόνων να βρεθούν:

4. Το πλήθος των διαδρομών που χρειάστηκε τουλάχιστον 10 λεπτά ο ηλεκτρικός να διανύσει την απόσταση Καλλιθέα – Ομόνοια.

5. Το ποσοστό των διαδρομών που χρειάστηκε από 8.2 έως 11.8 λεπτά ο ηλεκτρικός να διανύσει την απόσταση Καλλιθέα – Ομόνοια.

[Απ. 1. 10 λεπτά 2. 0.9 3. 9% 4. 50 διαδρομές 5. 95%]

68. Έστω η μεταβλητή X με τιμές : t_1, t_2, \dots, t_v .

α) αν \bar{x} είναι η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση, να δείξετε ότι η μεταβλητή:

$$\psi = \frac{2002t_i - 2003 \cdot \bar{x}}{s}, \quad i=1,2,\dots,v, \quad \text{ισχύει } \bar{\psi} = -\frac{1}{CV_x}.$$

β) Αν υποθέσουμε ότι η κατανομή είναι κανονική, το εύρος είναι 12 και ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV_x = 0.20$, να βρεθεί η μέση τιμή της μεταβλητής ψ καθώς και η τυπική της απόκλιση.

[Ένθετο ‘Ο υποψήφιος’ 2003]

69. Η κατανομή των αθροιστικών συχνοτήτων N_i μιας μεταβλητής x είναι :

X_i	15	16	17	18	19	20
N_i	8	12	15	32	40	50

α.) να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων $f_i, f_i \%, v_i, v_i f_i$.

β.) να υπολογιστεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκεται:

1. Στο διάστημα 16 έως και 19.
2. Είναι τουλάχιστον 17
3. Είναι το πολύ 18

[www.hms.gr/ Τράπεζα θεμάτων Ε.Μ.Ε]

70. Η μέση θερμοκρασία στην πόλη της Καβάλας κατά το μήνα Σεπτέμβριο είναι $30^{\circ}C$ με τυπική απόκλιση $2^{\circ}C$. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των ημερών που έχουν:

1. θερμοκρασία πάνω από 32° .
2. θερμοκρασία κάτω από 26° .
3. θερμοκρασία τουλάχιστον 30° .
4. θερμοκρασία μεταξύ 26° και 32° .

[Ευκλείδης Β' τεύχος 42]

71. Μια βιομηχανία κατασκευάζει λαμπτήρες με μέσο χρόνο ζωής 1800 ώρες και τυπική απόκλιση $s=150$ ώρες. Η κατανομή των λαμπτήρων ως προς τον χρόνο ζωής τους είναι κανονική. Τι ποσοστό αναμένεται να έχει χρόνο ζωής :

1. το πολύ 1800 ώρες.
2. άνω των 1950 ωρών.
3. από 1500 έως 1950 ώρες.
4. κάτω από 1500 ώρες.

[www.hms.gr/ Τράπεζα θεμάτων Ε.Μ.Ε]

72. Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για το χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

1. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος διαδρομής των μαθητών και η τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.
2. Να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
3. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4000 πόσοι θα κάνουν τη διαδρομή σε χρόνο από 14 έως 16 λεπτά;
4. Μια μέρα λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρεθεί πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001]

73. Εξετάσαμε ένα δείγμα μαθητών μιας τάξης ως προς το βάρος τους και διαπιστώθηκε ότι κυμαίνονται από 45 έως 75 κιλά , ενώ η κατανομή των βαρών είναι κανονική.

- α) να βρεθεί η μέση τιμή και το εύρος ,
- β) να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές ,
- γ) αν το άθροισμα των βαρών είναι 1800 κιλά , να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος
- δ) τι ποσοστό μαθητών έχει βάρος το οποίο κυμαίνεται από 50 έως 60 κιλά ;

74*. Δίνεται $y = a + \beta \cdot x$ η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της y πάνω στην x η οποία διέρχεται από το σημείο $E(4,0)$. Αν μεταξύ των μέσων τιμών των δειγμάτων y , x ισχύει η σχέση $\bar{y} = \bar{x} - 4$ με $\bar{x} \neq 4$ να εκτιμήσετε το y όταν $x=12$.

[Απ. 8] [Ευκλείδης Β' τεύχος 44]

75*. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=x^2+6$ και $h(x)=\frac{x^3}{3}+x^2$.

Ο Παραπάνω Πίνακας δίνει τη βαθμολογία με άριστα το 10 των μαθητών μιας τάξης Φροντιστηρίου στα Μαθηματικά και τη Φυσική.

Μαθηματικά X	$h'(-1/2)$	2	$h'(1/2)$	4	$h'(3/2)$
Φυσική Y	$f'(5)$	$h'(5/2)$	λ	$f'(2)-1$	$f'(1)$

Αν η παλινδρόμηση της y στη x είναι : $y = 11.2 - 2 \cdot x$

1. Να βρεθεί ο βαθμός λ του μαθητή στη φυσική

2. Να βρεθεί ο αναμενόμενος βαθμός της Φυσικής όταν ο βαθμός στα Μαθηματικά είναι 3.

[Απ. 1.λ=4 2. 5.2]
[Ενθετο 'Εξετάσεις' 2002]

76*. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει σε τετραγωνικά μέτρα τα μεγέθη 10 διαμερισμάτων στον Καρέα και τα αντίστοιχα ποσά ενοικίου:

X	Μέγεθος σε m ²	45	55	65	75	85	95	100	110	120	130
Y	Μηνιαίο ενοίκιο σε €	65	80	85	90	100	110	140	150	180	200

1. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να βρείτε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης της Y στην X.

2. Ποίο εκτιμάτε ότι θα είναι το ύψος του ενοικίου μιας κατοικίας 115 m² ;

3. Αν ήσασταν ιδιοκτήτης ενός διαμερίσματος 80 m² και σας έδιναν ενοίκιο ίσο με 95 € θα το νοικιάζατε; Να αιτιολογήσετε.

4. Κάποιο διαμέρισμα ξέρουμε ότι νοικιάζεται προς 143 €. Πόσα m² είναι;

[www.hms.gr/ Τράπεζα θεμάτων Ε.Μ.Ε]

77. Έστω ένα δείγμα 100 παρατηρήσεων x_i όπου $i=1,2,\dots,100$ με συντελεστή μεταβολής 10% για τον οποίο ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 646400$$

α.) Να βρείτε την μέση τιμή του δείγματος.

β.*) Θεωρούμε επιπλέον με παρατηρήσεις :

$$y_1 = 2x_1 + 1, y_2 = 2x_2 + 1, \dots, y_{100} = 2x_{100} + 1$$

Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων και την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων με Y πάνω στην X.

[Διαγωνίσματα Μαθηματικών Γ. Μπαϊλάκης]

78. Σε μια εταιρεία εργάζονται n υπάλληλοι που έχουν εβδομαδιαίους μισθούς x_i όπου $i=1,2,\dots,n$, των οποίων η μέση τιμή είναι 400 € και η τυπική απόκλιση είναι 200 €.

1. Να βρεθεί η μέση τιμή των x_i^2 όπου $i=1,2,\dots,n$

2. Έστω ότι η εταιρεία κάνει αύξηση κάθε υπαλλήλου εξίσου κατά γ € όπου $0 \leq \gamma \leq 200$. Να εξετάσετε αν οι νέοι μισθοί αποτελούν ομοιογενές δείγμα.

3*. Έστω ότι η εταιρεία τροποποιεί με μισθούς σε y_i όπου $i=1,2,\dots,n$. με μέση τιμή 350 € και $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 16 \cdot 10^4$ σε €. Να βρείτε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων των σημείων (x_i, y_i) για $i=1,2,\dots,n$.

79. α) Ένα δείγμα περιέχει τις τιμές : $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$, της μεταβλητής X με σχετικές συχνότητες : $\frac{1}{4} + \omega^2, \frac{\omega}{4}, \frac{\omega^2}{4}, \frac{1}{8}\omega, 1 - 3\omega^2$, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός ω .

β) Δίνεται ο πίνακας της μεταβλητής X :

χ_i	2	3	5	9	10
f_i	0,05	0,20	f_3	0,15	f_5

Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες των κλάσεων 3 και 5 αν γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή του δείγματος είναι 5,8.

80. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.
- Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.
- Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;
- Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2003]

81. Οι βαθμοί (με άριστα το 20) που έγραψαν 40 μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα ομαδοποιήθηκαν σε 5 κλάσεις με πλάτος 4. Προέκυψαν τα εξής στοιχεία :

- ❖ τέσσερις μαθητές είχαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16 και άλλοι τέσσερις είχαν βαθμό κάτω από 4,
- ❖ δεκαπέντε μαθητές είχαν βαθμό κάτω από 10,
- ❖ η διάμεσος της κατανομής ήταν 12,
- ❖ η μέση βαθμολογία της τάξης ήταν 11. Ζητείται :

- να συμπληρώσετε τον πίνακα συχνοτήτων
- να βρείτε εύρος, διασπορά και τυπική απόκλιση,
- είναι το δείγμα ομοιογενές;
- είναι η κατανομή κανονική;

82. Στην « Αττική οδό » εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα , τα οποία διανύουν 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανύμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα :

Κλάσεις σε χλμ	Κέντρο κλάσης χ_i	v_i σε χιλιά- δες οχή- ματα	f_i %	N_i	F_i %
5-15		60			
15-25					68
25-35				180	
35-45					
Σύνολο		200			

- α) να μεταφέρετε στο τετράδιο σας το παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο
 β) να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα (χ_i , f_i %) και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων
 γ) να βρείτε τη μέση τιμή
 δ) να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2004]

83. Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν , συντάχθηκε ο πίνακας

Αριθμός Βιβλίων χ_i	Αριθμός Μαθητών v_i
0	$\alpha + 4$
1	$5\alpha + 8$
2	4α
3	$\alpha - 1$
4	2α
Σύνολο	50

- α) υπολογίστε την τιμή του α
 β) βρείτε τη μέση τιμή των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές
 γ) βρείτε τη διάμεσο των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές
 δ) την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006]

84. Θεωρούμε δυο δείγματα A και B με παρατηρήσεις :

$$\text{Δείγμα A : } 12 , 18 , t_3 , t_4 , \dots, t_{25}$$

$$\text{Δείγμα B : } 16 , 14 , t_3 , t_4 , \dots, t_{25}$$

$$\text{Δίνεται ότι : } t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$$

α) να δείξετε ότι $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$

β) αν s_A^2 η διακύμανση του δείγματος A και s_B^2 η διακύμανση του B, να αποδείξετε ότι : $s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}$

γ) αν ο συντελεστής μεταβολής του A είναι ίσος με $\frac{1}{15}$, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του B.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2007]

85. Σε δείγμα n παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n , μιας μεταβλητής X είναι $\bar{x} = 8$, $s_x^2 = 4$.

α) αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτουν αντιστοίχως από τις x_1, x_2, \dots, x_n , όταν κάθε μια αυξηθεί κατά 10% τότε :

ι) εξετάστε αν το δείγμα y_1, y_2, \dots, y_n είναι ομοιογενές.

ιι) να συγκριθούν τα δυο δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

β) αν $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$

ι) να βρεθούν \bar{z} , s_z^2 .

ιι) εξετάστε αν ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των z_i , με $i = 1, 2, \dots, n$.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2007]

86. Στο παρακάτω δείγμα 10 παρατηρήσεων : 1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6, α , 6 είναι $\bar{x} = 4$.

α) βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α

β) για $\alpha = 9$, ι) βρείτε τη διάμεσο, ιι) βρείτε τη διακύμανση

γ) αν όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2008, τότε ποια θα είναι η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων ;

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2008]

87. Για δυο τύπους μπαταριών A και B επιλέχθηκαν δυο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα :

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- α) να βρείτε τη μέση τιμή διάρκειας ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας τύπου Β
- β) αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 € και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 € , ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε ; (αιτιολογήστε)
- γ) να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις της διάρκειας ζωής των δυο τύπων μπαταριών.
- δ) να βρείτε ποιος από τους δυο τύπους Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του. Δίνεται $\sqrt{11}=3,3$.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2008]

*** Οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο είναι εκτός ύλης .**