ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

1. Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής αποτελείται από δυο βήματα :

Βήμα 1^{ο} : Δείχνουμε ότι η πρόταση P(ν) είναι αληθής για το μικρότερο φυσικό για τον οποίο ζητείται να αποδειχθεί ,

Βήμα 2^{ο} : Δεχόμαστε ότι η P(ν) ισχύει για έναν αυθαίρετο θετικό ακέραιο και δείχνουμε ότι ισχύει η σχέση : P(ν + 1), δηλαδή δείχνουμε ότι ισχύει για ν +1

2. Στις ανισοτικές σχέσεις πολλές φορές λαμβάνουμε υπόψη μας τη μεταβατική ιδιότητα (αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$)

3. Θυμίζουμε ότι :

α) το άθροισμα των ν διαδοχικών θετικών είναι :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \nu = \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2}, \text{ για κάθε } \nu \in \aleph^*$$

β) το άθροισμα των ν πρώτων θετικών περιττών είναι :

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2\nu-1) = \nu^2, \text{ για κάθε } \nu \in \aleph^*$$

4. Ανισότητα Bernoulli : Έστω $-1 \leq \alpha \neq 0$. Τότε για κάθε ακέραιο $\nu \geq 2$ ισχύει :

$$(1+\alpha)^{\nu} > 1 + \nu\alpha$$

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

1. Ευκλείδεια διαίρεση του α με τον β λέγεται η διαδικασία εύρεσης του πηλίκου π και του υπολοίπου υ .

$$\alpha = \beta \cdot \pi + \upsilon \ , \ 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

2. Τα δυνατά υπόλοιπα του α με τον $\beta > 0$ είναι οι αριθμοί : 0 , 1 , ….β-1

3. Το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός .

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

1. Ο β διαιρεί τον α ($\beta \mid \alpha$) σημαίνει :

ι) το υπόλοιπο της διαίρεσης α : β είναι 0

ιι) υπάρχει ακέραιος αριθμός κ τέτοιος , ώστε : $\alpha = \kappa \cdot \beta$

ιιι) ο β είναι παράγοντας του α

ιν) ο α διαιρείται από τον β

ν) ο α είναι πολλαπλάσιο του β (α = πολβ)

2. Ισχύουν τα παρακάτω :

α) άρτιος $\pm$ άρτιος = άρτιος
β) περιττός $\pm$ περιττός = άρτιος
γ) άρτιος $\pm$ περιττός = περιττός
δ) περιττός $\pm$ άρτιος = περιττός

3. Αν $\alpha , \beta , \gamma \in Z$ με $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ και $\alpha = \beta \cdot \gamma$, τότε : $\beta \mid \alpha$ και $\gamma \mid \alpha$

4. Αν $\alpha , \beta , \gamma \in Z$ με $\alpha \mid (\beta+\gamma)$ και $\alpha \mid \beta$, τότε : $\alpha \mid \gamma$

5. Αν $\alpha , \beta \in Z$, τότε : $(\alpha-\beta) \mid (\alpha^{\nu}-\beta^{\nu})$, $\nu \in \aleph^{*}$

$(\alpha+\beta) \mid (\alpha^{\nu}+\beta^{\nu})$, ν περιττός φυσικός

$(\alpha+\beta) \mid (\alpha^{\nu}-\beta^{\nu})$, ν άρτιος φυσικός

Από τα παραπάνω προκύπτουν οι χρήσιμες σχέσεις :

ι) $\alpha^{\nu}-\beta^{\nu} = πολ(\alpha-\beta) \Rightarrow \alpha^{\nu} = πολ(\alpha-\beta) + \beta^{\nu}$, $\nu \in \aleph^{*}$

ιι) $\alpha^{\nu}+\beta^{\nu} = πολ(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha^{\nu} = πολ(\alpha+\beta) - \beta^{\nu}$, ν περιττός φυσικός

ιιι) $\alpha^{\nu}-\beta^{\nu} = πολ(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha^{\nu} = πολ(\alpha+\beta) + \beta^{\nu}$, ν άρτιος φυσικός

ιν) $(\alpha+\beta)^{\nu} = πολ\alpha + \beta^{\nu}$, $\nu \in \aleph^{*}$

ν) $(\alpha-\beta)^{\nu} = πολ\alpha + (-1)^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$, $\nu \in \aleph^{*}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι : $1\cdot6+2\cdot9+3\cdot12+\ldots+\nu\cdot(3\nu+3)=\nu(\nu+1)(\nu+2)$ για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 2$.

2. Να αποδείξετε ότι : $2^3+4^3+6^3+\ldots(2\nu)^3=2\nu^2(\nu+1)^2$, για κάθε $\nu\in \aleph^*$.

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha_\nu=4^\nu+15\nu-1$ είναι πολλαπλάσιο του 9 για κάθε $\nu\in\aleph^*$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in Z$, ώστε ο αριθμός $A=\dfrac{5a+2}{4}$ να είναι ακέραιος.

5. Για κάθε πραγματικό α με $\alpha < 1$ και $\nu\in\aleph^*$ ισχύει : $(1-\alpha)^\nu \geq 1-\nu\alpha$.

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in\aleph^*$ ισχύει : $4^\nu+8^\nu+9^\nu > 18\nu$.

7. Για κάθε φυσικό ν να αποδείξουμε ότι :
ι) $15^\nu \geq (1+2\nu)(1+4\nu)$
ιι) $64^\nu \geq (1+7\nu)^2$.

8. Να αποδείξετε ότι : $\left(\dfrac{6\nu-5}{6\nu}\right)^\nu \geq \dfrac{1}{6}$, για κάθε $\nu\in\aleph^*$.

9. Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης στις παρακάτω περιπτώσεις :

ι) α=48 και β=-9
ιι) α=-48 και β= 9
ιιι) α= -48 και β= -9

10. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι οι οποίοι διαιρούμενοι με το 4 δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου.

11. Αν ο θετικός ακέραιος α δεν διαιρείται με τον αριθμό 5 να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές του υπολοίπου της διαίρεσης του α^2 με το 5.

12. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, να σημειώσετε την σωστή απάντηση :

α) Η ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του -41 με το -9 είναι :
Α: -41=(-9)·3-14 **Β:** -41=(-9) ·6+13 **Γ:** -41=(-9) ·4-5 **Δ:** -41=(-9) ·5+4

β) Το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων είναι :
Α: περιττός **Β:** θετικός **Γ:** άρτιος **Δ:** αρνητικός

γ) Αν ο α είναι περιττός , τότε ο $α^2$ έχει τη μορφή :
Α: 4λ, $λ\in Z$ **Β:** 2λ+1,$λ\in Z$ **Γ:** 2λ, $λ\in Z$ **Δ:** 8λ+1, $λ\in Z$

δ) Αν α = β+γ , χ│α και χ│γ , τότε λανθασμένη είναι η σχέση :
Α: χ│β **Β:** αγ│χ **Γ:** χ│αβ **Δ:** χ│(α-γ)

ε) Αν α│β και β│α , τότε :
Α: α=β **Β:** α= -β **Γ:** $|a|<|\beta|$ **Δ:** $|a|=|\beta|$

στ) Αν α│β και $β\neq 0$, τότε :
Α: α<β **Β:** β<α **Γ:** $|a|<|\beta|$ **Δ:** $|a|\leq|\beta|$

13. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις :

1.	Η σχέση 29=(-4)(-6)+5 είναι η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του 29 με το -4.	Σ	Λ
2.	Κάθε περιττός αριθμός έχει τη μορφή : 2λ-1 , $λ\in Z$.	Σ	Λ
3.	Το γινόμενο δυο ακεραίων είναι πάντα άρτιος.	Σ	Λ
4.	Το τετράγωνο κάθε περιττού έχει τη μορφή : 8λ+1,$λ\in Z$.	Σ	Λ
5.	Αν α│β, τότε α│λβ, $λ\in Z$.	Σ	Λ
6.	Αν α│β και β│α, τότε α=β.	Σ	Λ
7.	Αν α│β και χ│ψ , τότε αχ│βψ.	Σ	Λ
8.	Αν χ │α και χ │β , τότε χ │λα+μβ, λ,μ $\in Z$.	Σ	Λ
9.	Αν α │(β-γ) , τότε α │β ή α │γ.	Σ	Λ

14. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις ώστε να είναι αληθείς :

α) Αν α │β και β │γ , τότε……………..
β) Ο αριθμός χ(χ+1) είναι …………για κάθε χ $\in Z$.
γ) Αν ο α είναι περιττός, τότε ο $α^2$ έχει τη μορφή……………με λ $\in Z$.
δ) Η ταυτότητα του -50 με το -8 είναι ………………..
ε) Αν α │β και β │α τότε……………………
στ) Αν δ $\in \aleph^*$, δ │(5α+2) και δ │(7α+3) , τότε δ=……………
ζ) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού αριθμού είναι …………,ενώ το γινόμενο τους είναι………………
η) Αν α │β και $β\neq 0$, τότε……………………

15. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή.

α) Αν α=λβ+υ είναι η ταυτότητα του α με το $\beta \neq 0$, τότε:
Α: (β,υ)=(λ,υ) **Β:** (α,β)=(β,λ) **Γ:** (α,β)=(β,υ)

β) Αν $\lambda \in Z$, τότε ο (2λ-1,2λ+1) είναι ίσος με :
Α: 2 **Β:** 1 ή 2 **Γ:** 3

γ) Αν (α,β)=δ, τότε :
Α: $\alpha \mid \delta$ **Β:** (α,δ)=β **Γ:** $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta}\right)=1$

δ) Αν $\alpha \mid \gamma$, $\beta \mid \gamma$ και (α,β)=1 , τότε :
Α: $\alpha\beta \mid \gamma$ **Β:** $\alpha\gamma \mid \beta$ **Γ:** $\gamma \mid \alpha\beta$

ε) Αν (5ν+1,6ν+1)=δ όπου $\nu \in Z$, τότε:
Α: δ=2 **Β:** δ=1 **Γ:** δ=3

στ) Ο Μ.Κ.Δ των 279 και 125 είναι ο :
Α: 2 **Β:** 7 **Γ:** 1

16. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

1.	Αν (α,β)=δ και $\chi \mid \alpha$ και $\chi \mid \beta$, τότε $\chi \mid \delta$	Σ	Λ
2.	Αν $\alpha \mid \beta\gamma$ και $\alpha \mid \beta$, τότε (α,γ)=1.	Σ	Λ
3.	Αν $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha\beta \mid \gamma$.	Σ	Λ
4.	Αν $2 \mid \alpha$ και $5 \mid \alpha$, τότε $10 \mid \alpha$	Σ	Λ
5.	Αν $\alpha \mid \beta\gamma$ και υπάρχουν $\chi,\psi \in Z$, ώστε αχ+βψ=1, τότε $\alpha \mid \gamma$.	Σ	Λ
6.	Αν $\alpha \mid \beta$ τότε (α,β)=α.	Σ	Λ

17. Στην ευκλείδεια διαίρεση του α με τον 72, το υπόλοιπο είναι 64. Να βρείτε το υπόλοιπο του α με τον 18, $\alpha \in Z$.

18. Να βρείτε όλους τους φυσικούς α οι οποίοι στην ευκλείδεια διαίρεση του 60 με τον α δίνουν υπόλοιπο 12.

19. Αν $13 \mid (3\alpha+5)$ και $13 \mid (44-3\beta)$, να αποδείξετε ότι $13 \mid (\alpha+\beta)$.

20. Αν α , $\beta \in Z$ και οι αριθμοί α +3 και 30 –β διαιρούνται με το 9 , να αποδείξετε ότι και ο αριθμός α + β διαιρείται με το 9.

21. Αν ο φυσικός χ >1 διαιρεί τους ακεραίους α^2+1 και α+2 , να αποδείξετε ότι χ = 5.

22. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $α = 3^{2ν+1} + 2^{ν+2}$ διαιρείται με το 7 , για κάθε $ν \in ℵ^*$.

23. Να αποδείξετε ότι για κάθε $ν \in ℵ^*$ ο αριθμός $10^ν + 3 \cdot 4^{ν+2} + 5$ διαιρείται με το 9.

24. 1) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Αν $7 \mid (α+5)$ και $7 \mid (40-β)$ τότε:

α. $7 \mid (α+β)$,
β. $7 \mid (α+β+1)$,
γ. $7 \mid (α+β+2)$,
δ. $7 \mid (α+β-3)$.

2) Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.
3) Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

[Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2001]

25. Έστω $α, β \in ℵ^*$, ώστε $αβ \mid (α+β)$.

ι) να αποδείξετε ότι $α \mid β$ και $β \mid α$.
ιι) να βρείτε τις δυνατές τιμές των α, β .

26. Αν ο φυσικός δ διαιρεί τους αριθμούς $4α^2 + 3α - 5$ και $2α^2 + α - 2$, να αποδείξετε ότι :

ι) $δ \mid (α-1)$ ιι) $δ \mid (3α-2)$ ιιι) $δ=1$

27. Δίνονται οι αριθμοί 245 και 95.

ι) να βρείτε τον Μ.Κ.Δ τους.
ιι) να γράψετε τον δ ως γραμμικό συνδιασμό των 245, 95.

28. α) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

β) Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\dfrac{α(α^2+1)}{2}$ είναι ακέραιος.

γ) Αν ο α είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\dfrac{α(α^2+1)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

[Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2002]

29. Δίνονται οι ακέραιοι α και β με (α, β) =5. Οι ευκλείδειες διαιρέσεις μέχρι να προκύψει υπόλοιπο μηδέν, οι οποίες χρειάζονται στον αλγόριθμο του Ε-υκλείδη για την εύρεση του (α, β), δίνουν πηλίκα 8, 2 και 3 αντίστοιχα. Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

30. Δίνονται οι αριθμοί α = 4373 και β = 826.

α) να βρείτε τον (4365, 819) και να τον γράψετε ως γραμμικό συνδυασμό των α, β.

β) στην ευκλείδεια διαίρεση των α, β με τον φυσικό χ $\neq$ 0 παίρνουμε αντίστοιχα υπόλοιπα 8 και 7. Να βρείτε τον αριθμό χ.

31. Δίνονται οι αριθμοί α= κ-1 και β= 3κ+1, όπου κ$\in Z$.

α) αν ο α είναι περιττός, να δείξετε ότι και ο β είναι περιττός.

β) να προσδιορίσετε τις τιμές του κ ώστε ο α να διαιρεί τον β.

γ) να αποδείξετε ότι :
ι) (2α+1,β-3)=1 ιι) [2 α+1,β-3] = 6κ^2 -7κ+2

32. Αν ο α είναι άρτιος ακέραιος , να αποδείξετε ότι :

α) (α+1)^2 -1 = 4λ , λ$\in Z$ β) $\frac{a^2+(a+1)^2+(a+3)^2-2a+2}{4}$ =3μ, όπου μ $\in Z$.

33. α) Αν ο ακέραιος αριθμός λ δεν διαιρείται με το 3 , να αποδείξετε ότι ο λ^2 +5 είναι πολλαπλάσιο του 3.
β) να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του ακεραίου κ, ο ακέραιος κ(κ^2 +5) είναι πολλαπλάσιο του 3.

34. Δίνονται οι αριθμοί α = 2κ+2 και β =6κ+7, όπου κ $\in Z$. Να αποδείξετε ότι :

α) οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους,

β) το υπόλοιπο του 2β-α με το 10 είναι 2,

γ) αν ο κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε ο α+β-2 είναι πολλαπλάσιο του 7.

35. Δίνονται οι ακέραιοι χ ,ψ και ω για τους οποίους ισχύει : 3χ-7ψ+18ω=0. Να δείξετε ότι :

α) $3 \mid ψ$ και $7 \mid (χ+6ω)$ β) $7 \mid (χ-ω)$.

36. Δίνεται το πολυώνυμο $P(χ) = αχ^2 + βχ + γ$, με α, β , γ $\in Z$. Έστω ότι : $7 \mid P(χ)$, για κάθε χ $\in Z$. Να αποδείξετε ότι :

α) $7 \mid γ$

β) $7 \mid (α+β)$ και $7 \mid (α-β)$

γ) $7 \mid α$ και $7 \mid β$

δ) αν P(7) =0 , τότε $21 \mid P(10)$.

37. Δίνεται το πολυώνυμο $P(χ) = αχ^3 + βχ^2 + γχ + δ$ με α, β , γ, δ $\in Z$. Αν $7 \mid P(χ)$ για κάθε χ$\in Z$, να αποδείξετε ότι :

α) $7 \mid δ$ β) $7 \mid (α+β+γ)$ γ) $7 \mid (α-β+γ)$

δ) $7 \mid β$ και $7 \mid (α+γ)$ ε) $7 \mid α$ και $7 \mid γ$.

38. Έστω α$\in$Z. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $α^3$ παίρνει την μορφή
$α^3 = 8k$ όπου k$\in$Z ή $α^3 = 2k+1$ όπου k$\in$Z .

β) Ο αριθμός $α(α^2+1)$ είναι άρτιος.

[Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2003]

39. Δίνονται οι ακέραιοι α= 5λ+2 και β = 6μ+1, όπου λ, μ $\in Z$.

α) Ποιο το υπόλοιπο του α με το 5 και ποιο του β με το 6 ;

β) Αν α=β, να δείξετε ότι μ = 5ρ + 1, όπου ρ$\in Z$.

γ) Ένας αριθμός χ διαιρούμενος με το 5 δίνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενος με το 6 δίνει υπόλοιπο 1. Να αποδείξετε ότι ο χ διαιρούμενος με το 30 δίνει υπόλοιπο 7.