

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

### ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

- ❖ Έστω διάνυσμα  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του ισούται με :  $\lambda_{\vec{a}} = \frac{y_1}{x_1}$ .
- ❖ Έστω δυο σημεία  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  μιας ευθείας  $\epsilon$ , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ισούται με :  $\lambda_{\epsilon} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .
- ❖ Δίνεται η ευθεία  $\epsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ισούται με :  $\lambda = -\frac{A}{B}$ .

### ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

Έστω δυο ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . Αν η  $\epsilon_1$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_1$  και η  $\epsilon_2$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_2$ , τότε ισχύουν :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \parallel \epsilon_2 &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ \epsilon_1 \perp \epsilon_2 &\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

### ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

- ❖ Όταν γνωρίζω ένα σημείο  $A = (x_1, y_1)$ , και τον συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας  $\epsilon$ , τότε η εξίσωση της είναι :

$$\epsilon : y - y_1 = \lambda \cdot (x - x_1)$$

- ❖ Έστω δυο σημεία,  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ , μιας ευθείας  $\epsilon$ , τότε :
  - Αν  $x_1 \neq x_2$ , η  $\epsilon$  δεν είναι παράλληλη στον  $\psi\psi'$  και η εξίσωση της είναι :

$$\epsilon : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

- Αν  $x_1 = x_2$ , η  $\epsilon$  είναι  $\parallel$  στον  $\psi\psi'$  και η εξίσωση της είναι :

$$\epsilon : x = x_1$$

- Αν  $y_1 = y_2$ , η  $\epsilon$  είναι  $\parallel$  στον  $\chi\chi'$  και η εξίσωση της είναι :

$$\epsilon : y = y_1$$

- ❖ Όταν γνωρίζω ένα σημείο  $A = (x_1, y_1)$ , μιας ευθείας  $\varepsilon$  και επίσης η ευθεία αυτή είναι  $\parallel$  στον  $\psi\psi'$  τότε η εξίσωση της είναι :

$$\varepsilon : x = x_1$$

- ❖ Όταν γνωρίζω ένα σημείο  $B = (x_2, y_2)$ , μιας ευθείας  $\varepsilon$  και επίσης η ευθεία αυτή είναι  $\parallel$  στον  $\chi\chi'$ , τότε η εξίσωση της είναι :

$$\varepsilon : y = y_2$$

- ❖ Αν μια ευθεία διέρχεται από το  $(0, 0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  τότε η εξίσωση της είναι :

$$\varepsilon : y = \lambda \cdot x$$

### ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ Η ΚΑΘΕΤΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ .

- ❖ Το διάνυσμα  $\vec{a} = (B, -A)$  είναι  $\parallel$  στην  $\varepsilon$ .
- ❖ Το διάνυσμα  $\vec{\beta} = (A, B)$  είναι  $\perp$  στην  $\varepsilon$ .

Προσέξτε ότι ισχύει :  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

### ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ , και ένα σημείο  $M = (x_1, y_1)$ , το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ . Τότε η απόσταση του  $M$  από την ευθεία  $\varepsilon$  συμβολίζεται με  $d(M, \varepsilon)$ , και ισούται με :

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ φυσικά } d(M, \varepsilon) \geq 0 \text{ πάντοτε.}$$

### ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Δίνονται τρία σημεία  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ ,  $\Gamma = (x_3, y_3)$ , του επιπέδου, τα οποία δεν είναι συνευθειακά. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται από τον τύπο :

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) \right|, \text{ όπου } \det \text{ η ορίζουσα των διανυσμάτων } \overline{AB}, \overline{A\Gamma}.$$

### ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Δίνονται οι ευθείες :  $\epsilon_1 : A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$  ,  $\epsilon_2 : A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$  . Για να εξετάσω τις σχετικές θέσεις των δυο ευθειών υπολογίζω τις ορίζουσες :

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}. \text{ Διακρίνω τις περιπτώσεις :}$$

- ❖ Αν  $D \neq 0$ , τότε οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο, του οποίου οι συντεταγμένες είναι :  $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ .
- ❖ Αν  $D = D_x = D_y = 0$ , τότε οι ευθείες συμπίπτουν ή ταυτίζονται.
- ❖ Αν ισχύει :  $D=0$  και  $D_x \neq 0$  ή  $D_y \neq 0$ , τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

### ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Έστω ότι δίνονται οι ευθείες :  $\epsilon_1 : A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$  ,  $\epsilon_2 : A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$  . Για να υπολογίσουμε τις διχοτόμους των γωνιών τους αρκεί να θεωρήσουμε ένα σημείο  $M(x,y)$  της διχοτόμου των ευθειών. Τότε οι αποστάσεις του σημείου  $M$  από τις παραπάνω ευθείες είναι ίσες. Δηλαδή :

$$d(M, \epsilon_1) = d(M, \epsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|A_1x + B_1y + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Μετά από πράξεις προκύπτουν οι εξισώσεις δυο ευθειών, έστω  $\delta_1, \delta_2$ . Αυτές είναι της διχοτόμου της οξείας γωνίας και της διχοτόμου της αμβλείας γωνίας. Τότε παίρνουμε ένα σημείο  $P$  πάνω στην  $\epsilon_1$  ή στην  $\epsilon_2$ , και υπολογίζουμε τις αποστάσεις  $d(P, \delta_1)$  και  $d(P, \delta_2)$ .

- Αν  $d(P, \delta_1) < d(P, \delta_2)$ , τότε η  $\delta_1$  είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας.
- Αν  $d(P, \delta_1) > d(P, \delta_2)$ , τότε η  $\delta_2$  είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας.
- Αν  $d(P, \delta_1) = d(P, \delta_2)$ , τότε οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι κάθετες.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις :

i ) Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1 : \psi = (\lambda + 1)\chi$  και  $\epsilon_2 : \psi = (3 - \lambda)\chi + 10$ . Αν  $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$  τότε  $\lambda = \dots\dots\dots$

ii ) Έστω  $\varphi$  η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία  $\epsilon$  με τον  $\chi\chi'$ . Τότε :  $\varphi \in [\dots, \dots)$

iii ) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $A = (x_1, y_1)$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a} = (1, \lambda)$  έχει εξίσωση  $\epsilon : \dots\dots\dots$

iv ) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $A(-3, 2)$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $\chi - 2\psi + 7 = 0$  έχει εξίσωση  $\epsilon : \dots\dots\dots$

v ) Η ευθεία που διέρχεται από το  $A(-3, 2)$  και είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{a} = (5, 0)$  έχει εξίσωση  $\epsilon : \dots\dots\dots$

vi ) Η ευθεία  $\psi = 2\chi + 10$  τέμνει τους άξονες  $\chi\chi'$  και  $\psi\psi'$  στα σημεία A και B αντίστοιχα. Το εμβαδόν του τριγώνου (OAB) είναι :  $\dots\dots\dots$

vii ) Αν οι ευθείες  $\psi = (\lambda^2 + 3\lambda + 3)\chi + 6$  και  $\psi = \lambda\chi + 2$  είναι κάθετες, η τιμή του  $\lambda$  είναι  $\dots\dots\dots$

2. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις :

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1. Η ευθεία AB με $A(3, 2)$ και $B(-5, -6)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 και σχηματίζει με τον $\chi\chi'$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ .  | Σ | Λ |
| 2. Αν $\epsilon \parallel \psi\psi'$ και $A(1, 5)$ είναι σημείο της $\epsilon$ . Η εξίσωση της $\epsilon$ είναι $\psi = 5$ .  | Σ | Λ |
| 3. Η ευθεία $3\chi + \psi - 4 = 0$ έχει $\lambda = 3$ .   | Σ | Λ |
| 4. Ένα διάνυσμα κάθετο προς την ευθεία $(\lambda - 1)\chi - (2 - \lambda)\psi + \lambda - 2 = 0$ είναι : $\vec{a} = (\lambda - 1, \lambda - 2)$ , ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο της παραπάνω ευθείας είναι το : $\vec{\beta} = (2 - \lambda, \lambda - 1)$ . | Σ | Λ |
| 5. Το σημείο $A(2, -3)$ απέχει από την ευθεία $3\chi - 4\psi + 2 = 0$ απόσταση ίση με 4.  | Σ | Λ |
| 6. Η απόσταση των ευθειών $4\chi - 3\psi - 7 = 0$ και $-4\chi + 3\psi - 23 = 0$ είναι ίση με 6.   | Σ | Λ |
| 7. Αν σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι : $\det(\overline{AB}, \overline{AG}) = -10$ τότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με -5.   | Σ | Λ |
| 8. Η ευθεία που διέρχεται από το $A(5, -6)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{a} = (3, 1)$ έχει εξίσωση : $\psi = -3\chi + 9$ .   | Σ | Λ |

3. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν με τον  $\chi\chi'$  οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία :
- i ) A(-7,-3) B(4,8)      ii ) A(2,1) B(8,-5)  
 iii ) A(3,-6) B(3,-1)      iv ) A(5,2) B(-7,2)
4. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(-1,4) και :
- α ) σχηματίζει με τον  $\chi\chi'$  γωνία  $\frac{\pi}{6}$ .  
 β ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a} = (-2,4)$ .  
 γ ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a} = (0,5)$ .
5. Να βρεθεί ο αριθμός  $\kappa \in \mathbb{R} - \{-2,0,2\}$  , ώστε οι ευθείες :  $\epsilon_1 : (\kappa-2)\chi + \kappa\psi = -7$  και  $\epsilon_2 : (\kappa-40)\chi + (\kappa^2 - 4)\psi - 5\kappa + 1 = 0$  να είναι κάθετες.
6. Δίνονται τα σημεία A(4,2) , B(5,4) , Γ(3,5) , Δ(2,3). Ναδειχθεί ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
7. Δίνονται τα σημεία A(1,-1) , B(-2,8) , Γ(3,-7).  
 i ) να αποδείξετε ότι τα A, B , Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.  
 ii ) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.
8. Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1 : \psi = (2\alpha^2 + \alpha + 1)\chi + \alpha + 4$  και  $\epsilon_2 : \psi = (\alpha^2 - \alpha + 4)\chi + \alpha - 5$  αντίστοιχα.  
 α ) να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των παραπάνω ευθειών.  
 β ) να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η  $\epsilon_2$  να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.  
 γ ) να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες  $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$  .
9. Αν A(-1,3) , B(4,2) και Γ(-2,-6) , να βρεθούν οι εξισώσεις των υψών του τριγώνου ABΓ.
10. Θεωρούμε τα σημεία B(-3,-7) και Γ(3,1) και τις ευθείες  $\epsilon_1 : 3\chi - \psi + 2 = 0$  και  $\epsilon_2 : 2\chi + \psi - 7 = 0$ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο A. Να βρείτε :
- α ) το συντελεστή της BΓ ευθείας , τη γωνία που σχηματίζει η BΓ με τον  $\chi\chi'$  και την εξίσωση της BΓ.  
 β ) τις συντεταγμένες του A.  
 γ ) την εξίσωση της διαμέσου AM του ABΓ και τη γωνία των ευθειών AM και BΓ.  
 δ ) την εξίσωση του ύψους ΓΔ του ABΓ.
11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το (4,-5) και είναι :
- α ) παράλληλη στην  $\epsilon_1 : 4\chi - \psi + 7 = 0$   
 β ) κάθετη στην  $\epsilon_2 : 5\chi + \psi - 7 = 0$ .
12. Δίνεται το σημείο A(-3,1) και η ευθεία  $\epsilon : 4\chi + \psi - 6 = 0$ . Να βρείτε :

α ) την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon_1$  που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην  $\epsilon$  .

β ) τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου Σ του A ως προς την  $\epsilon$

13. Αν  $A(1,3)$  ,  $B(-3,-1)$  ,  $\Gamma(5,1)$  , να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών των διαμέσων του τριγώνου ABΓ.

14. Δυο από τα ύψη ενός τριγώνου ABΓ έχουν εξισώσεις :

$$\epsilon_1 : 3\chi + \psi - 11 = 0$$

$$\epsilon_2 : \chi - \psi + 3 = 0$$

Αν  $A(2,1)$  , να βρείτε :

α ) τις συντεταγμένες των B, Γ

β ) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ και του ύψους ΑΗ.

15. Αν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ABΓ είναι AB:  $5\chi - \psi = 17$ , ΑΓ:  $7\chi + 4\psi = 13$  , ΒΓ:  $2\chi + 5\psi = 23$ , να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών A, B , Γ του τριγώνου.

16. Αν  $A(0,5)$  είναι η κορυφή ορθογωνίου παραλληλογράμμου και δυο πλευρές του έχουν εξισώσεις  $3\chi - 4\psi - 3 = 0$  και  $4\chi + 3\psi - 4 = 0$ , να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.

17. Δίνεται η εξίσωση  $(3\lambda - 1)\chi + (\lambda - 1)\psi + 4 - 8\lambda = 0$  . Να αποδείξετε ότι :

α ) η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του  $\lambda$ .

β ) η παραπάνω ευθεία διέρχεται από σταθερό σημείο καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $\mathfrak{R}$  .

18. Δίνεται η εξίσωση :  $(\mu^2 - 1)\chi + (\mu^2 - 3\mu + 2)\psi + \mu - 5 = 0$ .

α ) για ποιες τιμές του  $\mu$  η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία ;

β ) για ποιες τιμές του  $\mu$  η παραπάνω εξίσωση διέρχεται από το  $(0,0)$  ;

γ ) να βρείτε τις τιμές του  $\mu$  ώστε η παραπάνω ευθεία να είναι // στον  $\psi\psi'$  .

19. Δίνεται η εξίσωση :  $(\alpha^2 + \beta^2)\chi - (\alpha + 2\beta)\psi + 5 = 0$ . Να βρείτε :

α ) τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  ώστε η εξίσωση να παριστάνει ευθεία.

β ) τις τιμές των  $\alpha$  ,  $\beta$  ώστε η εξίσωση να διέρχεται από το  $A(1,2)$ .

20. Δίνονται οι ευθείες :  $\epsilon_1 : \chi + 2\psi + 6 = 0$   $\epsilon_2 : 3\chi + \psi - 2 = 0$ . Να βρείτε :

α ) το σημείο τομής των ευθειών.

β ) των οξεία γωνία που σχηματίζουν.

21. Δίνεται η ευθεία  $\epsilon : \chi + 2\psi + 3 = 0$ .

α ) ποια η μορφή κάθε ευθείας παράλληλης στην  $\epsilon$  ;

β ) να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην  $\epsilon$  και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4 τ.μ.

22. Δίνονται οι εξισώσεις

$$\lambda\chi + (\lambda + 1)\psi + 1 = 0 \quad \text{και} \quad (\lambda + 1)\chi + 4\lambda\psi + \lambda - 2 = 0.$$

- α ) να αποδείξετε ότι κάθε μια από αυτές παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathcal{R}$  .  
 β ) να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε οι παραπάνω ευθείες να είναι παράλληλες.

- 23.** Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1 : 2\lambda x - \psi + 2 = 0$  και  $\epsilon_2 : (1+2\lambda)x + (2\lambda-1)\psi + 2 = 0$   
 α ) να αποδείξετε ότι κάθε μια από αυτές παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathcal{R}$  .  
 β ) να αποδείξετε ότι οι δυο ευθείες τέμνονται για κάθε  $\lambda \in \mathcal{R}$  .  
 γ ) να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών.  
 δ ) να αποδείξετε ότι οι δυο ευθείες διέρχονται από δυο σταθερά σημεία.
- 24.** Δυο πλευρές ενός τραπεζίου έχουν εξισώσεις  $\epsilon_1 : 3x + 4\psi - 7 = 0$  και  $\epsilon_2 : 3x + 4\psi + 13 = 0$ . Να βρείτε :  
 α ) το μήκος του ύψους του τραπεζίου  
 β ) την εξίσωση της διαμέσου του τραπεζίου.
- 25.** Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1 : x + 2\psi + 3 = 0$  και  $\epsilon_2 : 2x + \psi - 6 = 0$ . Να βρείτε :  
 α ) το σημείο τομής των ευθειών.  
 β ) τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών των δυο ευθειών.
- 26.** Να βρεθεί η απόσταση των παραλλήλων ευθειών  $\epsilon_1 : 3x - 4\psi + 2 = 0$  και  $\epsilon_2 : 3x - 4\psi + 5 = 0$ .
- 27.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,2) Β(4,5) και Γ(6,-8). Να βρεθεί το μήκος του ύψους ΑΚ.
- 28.** Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_k : kx - 3\psi + k + 3 = 0$ . Να βρεθεί ποια από αυτές έχει την ιδιότητα, η αρχή των αξόνων να απέχει απ' αυτή απόσταση ίση με 1.
- 29.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία  $\epsilon : 4x + 3\psi - 21 = 0$  και απέχουν απ' αυτή απόσταση 2.
- 30.** Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας  $\epsilon : x + \psi - 2 = 0$  που απέχουν από την ευθεία  $\epsilon_1 : 4x + 3\psi + 10 = 0$  απόσταση ίση με 3.
- 31.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν ίση απόσταση από τις ευθείες  $\epsilon_1 : 3x + 4\psi - 5 = 0$  και  $\epsilon_2 : 3x + 4\psi + 2 = 0$ .
- 32.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην  $\epsilon : 2x + 7\psi - 3 = 0$  και σχηματίζει με τον  $\chi\chi'$  και  $\psi\psi'$  τρίγωνο με εμβαδόν 7 τ.μ
- 33.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το (0,0) και σχηματίζει με τις ευθείες  $\epsilon_1 : x + \psi - 3 = 0$  και  $\epsilon_2 : x = 0$  ένα τρίγωνο που έχει εμβαδόν 9 τ.μ

- 34.** Δίνεται η εξίσωση :  $\chi^2 + \psi^2 + 2\chi\psi - 2\chi - 2\psi - 3 = 0$ .  
 α ) να αποδείξετε ότι αυτή παριστάνει δυο παράλληλες ευθείες.  
 β ) να βρείτε την απόσταση των παραπάνω ευθειών.  
 γ ) να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των παραπάνω ευθειών.
- 35.** Δίνονται τα σημεία A(-2,-1) και B(2,2).  
 α ) αν Γ(2,6) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.  
 β ) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : (ΜΑΒ)=(ΓΑΒ).
- 36.** Δίνεται το παραλληλόγραμμο ABΓΔ με κορυφές A(-2,2) , B(-1,4) , Γ(5,-4).  
 α ) να βρείτε την τέταρτη κορυφή του.  
 β ) να υπολογίσετε το εμβαδόν ABΓΔ.  
 γ ) να υπολογίσετε το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην ΒΓ.
- 37.** Αν το σημείο A(-2,-1) είναι κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ , η βάση του ΒΓ έχει εξίσωση  $\chi - 7\psi + 45 = 0$  και το εμβαδόν του είναι 50 τ.μ , να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών AB και ΑΓ.
- 38.** α ) Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathfrak{R}$  η σχετική θέση των ευθειών  $\epsilon_1 : \mu\chi - (\mu+1)\psi - 1 = 0$  και  $\epsilon_2 : \chi - 2\psi + \mu - 2 = 0$ .  
 β ) Αν οι ευθείες  $\epsilon_1$  ,  $\epsilon_2$  τέμνονται να δειχθεί ότι το σημείο τομής Κ κινείται σε σταθερή ευθεία.
- 39.** Για τις διάφορες τιμές του  $\mu$  , να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών  
 $\epsilon_1 : 2\mu\chi + \psi + 1 = 0$        $\epsilon_2 : \chi + 2\mu\psi + 1 = 0$        $\epsilon : \chi + \psi + 2\mu = 0$
- 40.** Δίνονται τα σημεία A(1,2) , B(2,-3) , Γ(3,2). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του Γ ως προς την ευθεία που ορίζουν τα σημεία Α και Β.  
 [ Πανελλήνιες Εξετάσεις 1978 ]
- 41.** Δίνονται τα σημεία A(1,1) , B(-1,3) , Γ(2,-4).  
 α ) να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του ύψους του ABΓ που διέρχεται από το Α.  
 β ) να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του ABΓ που διέρχεται από το Β.  
 γ ) να βρεθεί το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.  
 [ Πανελλήνιες Εξετάσεις 1980 ]
- 42.** Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφή A(2,1) και οι ευθείες των δυο υψών του είναι :  $3\chi + \psi - 11 = 0$  και  $\chi - \psi + 3 = 0$ . Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου και οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.  
 [ Γενικές Εξετάσεις 1984 ]
- 43.** Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας  $\epsilon_1 : (\lambda - 1)\chi + (\lambda + 1)\psi - \lambda - 3 = 0$ , όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.  
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.



β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία  $K(2, 2)$ ,  $L(-1, 5)$  και  $M(1, 3)$ . Να βρείτε της εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία  $K$ ,  $L$  και  $M$ .

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία  $K$  και  $L$  βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο  $M$ .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο  $\Phi$  και τα πλοία  $L$  και  $M$ .

[ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2000 ]

44. Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές  $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$ ,  $B(1, 2)$  και  $\Gamma(2, 3)$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $\lambda \neq -2$ .

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A$  κινείται σε ευθεία, καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$ .

B. Εάν  $\lambda = 1$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

[ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2003 ]

45. Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς– Ηράκλειο Κρήτης.

Σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  του ταξιδιού η θέση  $M$  του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  είναι:

$M(2 + kt, \lambda + 2t)$ , όπου  $k, \lambda \in \mathbb{R}$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 5$  το πλοίο διέρχεται από το σημείο  $A(7, 13)$ .

α) Να βρείτε τις τιμές των  $k, \lambda$ .

β) Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon) : y = 2x - 1$ .

γ) Ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1 κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

[ Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων 2003 ]

46. Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon_1 : x - \sqrt{3}y + 6 = 0$ .

α) να βρείτε τις γωνίες που σχηματίζει με τους άξονες.

β) να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζει με τους άξονες.

γ) να βρεθεί η ευθεία που είναι συμμετρική της  $\varepsilon_1$  ως προς τον  $OX'$ .

47. Δίνονται τα σημεία  $A(0, 2)$  και  $B(4, 0)$ .

α) να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από τα  $A, B$ .

β) αν  $M$  το μέσο του  $AB$ , και  $K$  η προβολή της αρχής  $(0, 0)$  στην  $\varepsilon$  να υπολογιστεί η απόσταση  $MK$ .

γ) να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκουν όλα τα  $N$  τα οποία ικανοποιούν τη σχέση  $\overline{NA}^2 = \overline{NB}^2 - 12$ .

δ) ποια η σχετική θέση της γραμμής του (γ) ερωτήματος με την  $\varepsilon$ ;