ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ Α' – Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. $(a-\beta)(a+\beta)=a^2-\beta^2$
2. $(a\pm\beta)^2=a^2\pm 2a\beta+\beta^2$
3. $(a\pm\beta)^3=a^3\pm 3a^2\beta+3a\beta^2\pm\beta^3$
4. $(a+\beta+\gamma)^2=a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$
5. $a^3\pm\beta^3=(a\pm\beta)(a^2\mp a\beta+\beta^2)$
6. $a^2+\beta^2=(a+\beta)^2-2a\beta$
7. $a^3+\beta^3=(a+\beta)^3-3a\beta(a+\beta)$
8. $(x+a).(x+\beta)=x^2+(a+\beta)x+a\beta$
9. $a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma=\frac{1}{2}(a+\beta+\gamma)[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-a)^2]$
10. Αν $a+\beta+\gamma=0$ *ή* $a=\beta=\gamma$ *τότε :* $a^3+\beta^3+\gamma^3=3a\beta\gamma$
11. $a^n-\beta^n=(a-\beta)(a^{n-1}+a^{n-2}\beta+........+a\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$

ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Έστω f (x)= $ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$, $a,\beta,\gamma\in R$, $\Delta=\beta^2-4a\gamma$ (Διακρίνουσα)

1. Ρίζες τριωνύμου

- $\Delta>0 \longrightarrow$ Το τριώνυμο έχει 2 άνισες ρίζες στον R με ρίζες
$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- $\Delta=0 \longrightarrow$ Το τριώνυμο έχει 1 διπλή ρίζα την $\rho=\frac{-\beta}{2a}$
- $\Delta<0 \longrightarrow$ Το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο σύνολο των πραγματικών.

2. Παραγοντοποίηση Τριωνύμου
- $\Delta>0 \longrightarrow$ τότε: $f(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες.
- $\Delta=0 \longrightarrow$ τότε: $f(x)=\alpha(x-\rho)^2$ όπου ρ η διπλή ρίζα του τριωνύμου.
- $\Delta<0 \longrightarrow$ τότε: Δεν παραγοντοποιείται στον R.

3. Πρόσημο Τριωνύμου ($ax^2+\beta\chi+\gamma>$ *ή* <0)

- $\Delta>0 \rightarrow$ Ομόσημο του α εκτός των ριζών δηλαδή στην ένωση $(-\infty,\rho_1)\cup(\rho_2,+\infty)$ και ετερόσημο του α εντός των ριζών (ρ_1,ρ_2).
- $\Delta=0 \rightarrow$ Ομόσημο του α στο διάστημα $(-\infty,\rho)\cup(\rho,+\infty)$.
- $\Delta<0 \rightarrow$ Ομόσημο του α σε όλο το R.

4. Άθροισμα και γινόμενο ριζών

α) Αν $f(x)= ax^2 + \beta\chi + \gamma$, $a \neq 0$, $\Delta \geq 0$ τότε:

Άθροισμα : $S = \rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha}$

Γινόμενο : $P = \rho_1 . \rho_2 = \dfrac{\gamma}{a}$

β) Για να βρούμε 2 αριθμούς ρ_1, ρ_2 των οποίων γνωρίζουμε το άθροισμα S και το γινόμενο P λύνουμε την εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ (1). Οι λύσεις της (1) είναι οι ζητούμενοι αριθμοί.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

<u>ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΟΡΙΩΝ (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ)</u>

Αν ισχύει για δυο συναρτήσεις, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m$, $l,m \in$ R τότε :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+ g(x))= l+ m$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha . f(x))=\alpha \cdot l$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x). g(x))= l\cdot m$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$, $m \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = l^n$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{l}$, $f(x) \geq 0$ σε περιοχή του x_0 .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν υπάρχει το όριο του αθροίσματος, του γινομένου και του πηλίκου των δυο συναρτήσεων *f(x), g(x)* τότε υπάρχουν πάντα τα όρια των *f(x), g(x)*;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ΟΧΙ Προσοχή στο παρακάτω παράδειγμα. Έστω

$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $g(x) = -\dfrac{|x|}{x}$ τότε : $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+ g(x))=0$ για x_0 =0,

$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x). g(x))=-1$ για x_0 =0

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ για x_0 =0.

Ενώ τα όρια της *f(x), g(x)* στο 0 δεν υπάρχουν διότι: $f(x)=\begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.Ομοίως ισχύει για την *g(x)*.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν Ρ(χ) , Q(χ) δύο πολυώνυμα τότε ισχύουν:

1. $\lim_{x\to x_0} P(\chi)=P(x_0)$, για κάθε $x_0 \in R$
2. $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ για κάθε $x_0 \in R$ με Q(x_0)$\neq 0$

Μερικές φορές μετά την εφαρμογή της (2) προκύπτουν κάποια προβλήματα, για παράδειγμα ο αριθμητής και ο παρανομαστής μηδενίζονται στη θέση χ=x_0. Τότε επεμβαίνω με σκοπό να άρω την απροσδιοριστία ως εξής:

α) Στις ρητές κάνω παραγοντοποίηση , σχήμα HORNER , γνωστές ταυτότητες και μετά κάνω απλοποίηση.

β) Στα ριζικά όπου υπάρχει φαινόμενο συζυγούς παράστασης πολλαπλασιάζω και διαιρώ με αυτή. Παρακολουθήστε τα παρακάτω 2 παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^{ο} : Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-9x+20}$

Εφαρμόζοντας την (2) βλέπω ότι είμαι στην περίπτωση $\frac{0}{0}$. Κάνω παραγοντοποίηση μετά απλοποίηση και προκύπτει:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-9x+20} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x-4)} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)}{(x-4)} = 10$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^{ο} : Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x}$.

Όμοια βλέπουμε ότι είναι η περίπτωση $\frac{0}{0}$.Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση και μετά κάνουμε απλοποίηση. Συνεπώς προκύπτει:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(9+x)-(9-x)}{x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}} = \frac{1}{3}$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

Μια συνάρτηση f(x), με πεδίο ορισμού Α καλείται συνεχής στο σημείο x_0 όταν:

ι) το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της

ιι) υπάρχει το όριο της f(x) στο x_0

ιιι) $\lim_{x\to x_0}$ f(x) = f(x_0)

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

- Μια συνάρτηση ορισμένη στο (α, β) καλείται συνεχής στο (α, β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 που ανήκει στο (α, β).
- Όταν η f(x) ορίζεται σε διάστημα [α, β] τότε καλείται συνεχής στο [α, β] όταν :

  ι) είναι συνεχής στο (α, β)

  ιι) $\lim\limits_{x \to a^+}$ f(x)= f(α) και $\lim\limits_{x \to \beta^-}$ f(x)= f(β)

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ)

Έστω μια συνάρτηση *f(x)* ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Θα λέμε ότι η *f(x)* είναι παραγωγίσιμη στο x_0, όταν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος και συμβολίζεται με $f(x_0)'$. Γεωμετρικά η παράγωγος στο x_0 είναι :{η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της *f(x)* στο x_0}={ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της *f(x)* στο x_0}. Επίσης η παράγωγος της *f(x)* στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της *f(x)* ως προς χ όταν χ= x_0.

ΣΧΕΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f(x) συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α. Αν η f(x) είναι παραγωγίσιμη σε ένα x_0 του Α τότε $\Rightarrow$ η f(x) συνεχής στο x_0 του Α.

Προσοχή!

Το αντίστροφο του Θεωρήματος δεν ισχύει. Πάρτε για παράδειγμα την f(x) = $|x|$. Είναι συνεχής στο x_0=0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0.

Παρατήρηση

Σε κάθε Θεώρημα στα μαθηματικά ισχύει πάντα και το αντιθετοαντίστροφο του Θεωρήματος. Δηλαδή ισχύει ότι:

η f(x) όχι συνεχής στο $x_0 \Rightarrow$ η f(x) όχι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. *(f(x) ± g(x))΄= f(x)΄ ± g(x)΄* [Παράγωγος αθροίσματος και διαφοράς]
2. (α. *f(x))΄=α. f(x)΄* [Παράγωγος γινομένου αριθμού με συνάρτηση]
3. *(f(x). g(x))΄= f(x)΄. g(x)+ f(x). g(x)΄* [Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων]

4. $(\frac{1}{g(x)})' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

5. $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ [Παράγωγος πηλίκου]

6. [f(g(x))]΄= f ΄(g(x)). g΄ (x) [Παράγωγος Σύνθεσης συνάρτησης]

<u>ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</u>

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
(α)΄=0, $\alpha \in \Re$	--
(χ)΄=1	--
$(\chi^{\nu})΄=\nu\, x^{\nu-1}$	$[f(x)^{\kappa}]' = \kappa f(x)^{\kappa-1}\cdot f'(x)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, f(x) ≥ 0
(ημ χ)΄=συν χ	(ημ f(x)) ΄=(συν f(x)) ·f(x)΄
(συν χ)΄= - ημ χ	(συν f(x))΄= - ημ f(x) ·f(x)΄
(ln x)΄=$\frac{1}{x}$	(ln f(x))΄=$\frac{f(x)'}{f(x)}$, f(x)>0
$(e^x)' = e^x$	$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f(x)'$

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ</u>

Έστω *f(x)* συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ. Έστω επίσης Α (x_0 , $f(x_0)$) σταθερό σημείο της γραφικής παράστασης της *f(x)*. Η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης <u>στο σημείο Α</u> δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

ε: y - f(x_0)=f ΄(x_0)·(χ- x_0)

Συνεπώς όταν μας ζητάνε να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο αρκεί να υπολογίσουμε πρώτα την παράγωγο της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο και μετά να αντικαταστήσουμε το σημείο που συνήθως μας δίνουνε στην παραπάνω σχέση. Σε αυτό το σημείο πρέπει να θυμηθούμε κάποιες χρήσιμες προτάσεις πάνω στην παραλληλία και την καθετότητα ευθειών.

<u>ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ - ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΕΥΘΕΙΩΝ</u>

Έστω οι ευθείες ε_1 : y = $\alpha_1 x + \beta_1$ και ε_2 : y = $a_2 x + \beta_2$. Από παλαιότερες τάξεις γνωρίζουμε ότι:

- → {οι ε_1, ε_2 είναι παράλληλες } $\Rightarrow$ {οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι ίσοι} $\Rightarrow$ { $a_1 = a_2$ }.
- → {οι ε_1 και ε_2 είναι κάθετες } $\Rightarrow$ {το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης είναι ίσο με -1} $\Rightarrow$ { $a_1 a_2 = -1$ }

ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ – ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για την εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης ακολουθούμε ένα ένα τα παρακάτω βήματα:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.
- Βρίσκουμε την παράγωγο της και που ορίζεται.
- Υπολογίζουμε τις ρίζες της παραγώγου (αν υπάρχουν).
- Σχηματίζουμε πίνακα με το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης εκατέρωθεν των ριζών της.
- Αν $f\,'(x_0)=0$ για κάποιο $x_0 \in(α,β)$ και $f\,'(χ)>0$ $\forall\, χ\in(α,\ x_0)$ και $f\,'(x\,)<0$ $\forall\ x_0 \in(x_0,β)$ τότε το x_0 είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης.
- Αν $f\,'(x_0)=0$ για κάποιο $x_0 \in(α,β)$ και $f\,'(x)<0$ $\forall\, χ\in(α,\ x_0)$ και $f\,'\,(χ)>0$ $\forall\ x_0 \in(x_0,β)$ τότε το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u> Αναζητούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης μεταξύ των άκρων του διαστήματος που ορίζεται η συνάρτηση, μεταξύ των σημείων που μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο και τέλος των σημείων για τα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Ένα ολικό ακρότατο είναι πάντοτε τοπικό ακρότατο, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.
- Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχουν δεν είναι μοναδικά.
- Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
- Τα άκρα α, β του διαστήματος Δ μπορεί να είναι σημεία τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης.
- Εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ λέγονται τα σημεία του Δ τα οποία δεν είναι άκρα του.
- Αν εκατέρωθεν της ρίζας x_0 της εξίσωσης $f(x_0)\,'=0$ η πρώτη παράγωγος δεν αλλάζει πρόσημο τότε στο σημείο x_0 δεν έχουμε τοπικό ακρότατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να προσδιοριστούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1. φ(x)=$\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}$ 2. τ(x)=$\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x}$

3. h(x)=$\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$ 4. f(x)=$\sqrt[3]{x-2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση : h(x) = x^2-1.
α) για ποιες τιμές του x $\in \Re$ έχουμε : h(x) = 0.
β) για ποιες τιμές του x $\in \Re$ έχουμε : h(x) > 0.
γ) βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: f(x) =$\dfrac{2x}{x^2-1}$,φ(x) = $\sqrt{x^2-1}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση : f(x) = x – 4.
α) για ποιες τιμές του x $\in \Re$, έχουμε : f(x) = 0.
β) να βρεθεί το πεδίο ορισμού της : h(x) = $\dfrac{2x-1}{x-4}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση : f(x) = x^2 - 3·x + 2 . Να βρείτε :
α) το πεδίο ορισμού της.
β) για ποιες τιμές του x$\in \Re$ έχουμε : f(x) = 0.
γ) το πεδίο ορισμού της h(x) = $\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις : f(x) = x^2-4·x-2 h(x) = 3·x-2, x$\in \Re$. Να βρείτε :
α) τον τύπο της f(x)+ h(x) καθώς και το πεδίο ορισμού της.
β) τον τύπο της f(x) ·h(x) καθώς και το πεδίο ορισμού της.
γ) τον τύπο της $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ καθώς και το πεδίο ορισμού της.

6. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

α) f(x) = $\dfrac{x^2-9}{5x^2+3}$ β) f(x) = $\dfrac{6-2x}{x^2+x-12}$ γ) f(x) = $\dfrac{3(x-3)(x+3)}{2(x+3)(x-2)}$

7. Ομοίως :

α) h(x) = $\sqrt{3x-6}$ β) h(x) = $\sqrt{x^8+15}$ γ) h(x) = $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

8. Ομοίως :

α) τ(x)= ln (25-x^2) β) τ(x)= $\dfrac{x-6}{\log(x-4)}$ γ) τ(x)= $\sqrt{\ln(x-1)}$

9. Για τις συναρτήσεις f(x),g(x) γνωρίζουμε ότι ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}$ f(x) = 3 και $\lim\limits_{x\to 0}$ g(x) = -1

Υπολογίστε τα όρια :

ι) $\lim\limits_{x\to 0}$ [2 f(x)- x] ιι) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)+1}{f(x)}$ ιιι) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{f(x)+1}}{g(x)}$

10. Αν $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=1, \lim\limits_{x\to 3} g(x)=2$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-1}{g(x)+2}$

11. Υπολογίστε τα όρια :

ι) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3-x}$ ιι) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{4-x^2}$ ιιι) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{3-x}$

12. Ομοίως :

ι) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{15-5x}{2x-6}$ ιι) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+x-1}{8x^2-2}$ ιιι) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{12-3x^2}{4x+8}$

13. Ομοίως τα όρια :

ι) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ ιι) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ ιιι) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

14. Ομοίως :

ι) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{16-x}$ ιι) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ ιιι) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{2\sqrt{x}-\sqrt{8}}$

15. Ομοίως :

ι) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+4)^3-27}{(x+6)^2-25}$ ιι) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$ ιιι) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1+\frac{2}{x}}{2-\frac{8}{x^2}}$

16. Ομοίως :

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-3x+2}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3-1}{x}$

17. Να προσδιορίσετε την τιμή του α, ώστε να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις

i) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1}, x\neq 1 \\ a, x=1 \end{cases}$ ii) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{2x^2-8}{3x+6}, x\neq -2 \\ a, x=-2 \end{cases}$

iii) f(x) = $\begin{cases} x^2-1, x\neq 5 \\ a, x=5 \end{cases}$

18. Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

α) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}, x\neq 4 \\ 6, x=4 \end{cases}$, β) f(x) = $\begin{cases} 2, x=3 \\ 5x-13, x\neq 3 \end{cases}$

γ) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, x\neq 2 \\ 5, x=2 \end{cases}$

19. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, x\neq 1 \\ 2a-1, x=1 \end{cases}$. Αν $\lim\limits_{x\to a}(3x-2)=10$, να εξετάσετε αν η f(x) είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

20. Δίνεται η f(x) $=\begin{cases} ax^2+\beta x-3, x\neq 1 \\ 12, x=1 \end{cases}$, να βρείτε την τιμή του α ώστε η f(x) να είναι συνεχής και η γραφική παράσταση της να διέρχεται από το σημείο (2,4).

21. Βρείτε τον τύπο της παραγώγου σε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις :

ι) f(x)= χ+ημχ ιι) φ(χ) = e^x+x^2 ιιι) f(x) = $χ^7-x^8+4$

ιν) f(x)= $2\cdot x^2$-1 νι) f(x) = $3\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\ln 5$ νιι) φ(χ)= ln x+ln6

νιιι) φ(χ) = ημχ- ln x ιχ) f(x) = $χ^5 - χ^3 + χ$ χ) f(x) = $3χ^2$-4χ+2

χι) f(x) = $\sqrt{x}$ +συνχ χιι) f(x) = 5χ+3-$χ^4$

22. Ομοίως με τις παρακάτω συναρτήσεις :

ι) f(x)= (χ-1) $\cdot\sqrt{x}$ ιι) f(x)= (χ-1) $\cdot\ x^2$ ιιι) f(x) = $χ^2\cdot$ln x

ιν) f(x)= $\frac{x-1}{x+2}$ ν) f(x)= $\frac{\ln x}{x^2}$ νι) f(x) = $\frac{x^3}{\ln x}$

νιι) f(x) = $x^2\cdot e^x$ νιιι) f(x) = $(x^2+1)\cdot x^5$

ιχ) f(x) = 2 $\cdot e^x$ + χ - $\frac{1}{x}$ χ) f(x) = $-x^2-2\cdot χ+\sqrt{e}$

23. Ομοίως με τις παρακάτω συναρτήσεις :

ι) f(x) = ln (συνχ) ιι) f(x) = $e^{5x^2+2\cdot x}$ ιιι) f(x) = $\sqrt[3]{x^2+5}$

ιν) f(x) = $(2χ+3)^5$ ν) f(x) = e^{3x} νι) f(x) = ημ(συνχ)

νιι) f(x) = $(3χ^2+5)^3$ νιιι) f(x) = $ημ^2χ$ ιχ) f(x) = $συν^3χ$

χ) f(x) = ln $(3χ^2+5)$ χι) f(x) = e^{x^3+5x+1}

24. Ομοίως :

α) f(x) = $ημ^3(4χ)$ β) f(x) = $(5χ^2-3)^5$ γ) f(x) = $\ln(χ^2-4)$

δ) f(x) = $\sqrt{2x^2-4x+5}$ ε) f(x) = $ημ^4χ-συν^4χ$ στ) f(x) = $χ^3\cdot ημ(2χ)$

ζ) f(x) = $\ln(χ^2+1)+e^{x^2-1}$ η) f(x) = $ημ(χ^3)$ θ) f(x) = συν(3χ+1)

ι) f(x) = $\sqrt{x^2-1}$ ια) f(x) = $συν^3(2χ+1)$ ιβ) f(x) = $χ\cdot ημ^3χ$

25. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 :

α) f(x) = $χ^2$-2 , x_0 = -1 β) f(x) = $8χ^4-χ^3$, x_0 = 1

γ) f(x) = $α^3+2α^2\cdot χ^2-χ^3+2$, x_0 = 0 δ) f(x) = $(χ^2-1)\cdot \lnχ$, x_0 = 1 ε) f(x) = ημ(2χ) , $x_0 = \frac{\pi}{8}$ στ) f(x) = $\frac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$

26. Αν f(x) = συνχ – ημχ , να αποδείξετε ότι : f ΄΄(x) + f(x) = 0 , για κάθε $\chi \in \Re$.

27. Αν f(x) = 3 ·συν(5χ) - 7 ·ημ(5χ) , να αποδείξετε ότι : f ΄΄(x) + 25 · f(x) = 0.

28. Αν f(x) = 2χ^2 +χ , να αποδείξετε ότι : χ ·(1+ f ΄(x)) = 2 · f(x).

29. Αν f(x) = $e^{ax} + e^{-ax}$, δείξτε ότι : f ΄΄(x) = α^2 · f(x).

30. Αν f(x) = χ ·ημ(lnχ), δείξτε ότι : χ · f ΄΄(x) + $\frac{2f(x)}{x}$ = f ΄(x).

31. Έστω συνάρτηση f(x) = συν(e^x +α) .Δείξτε ότι : f ΄΄(x) - e^x ·f ΄(x) + e^{2x} ·f(x) = 0

32. Δίνεται η συνάρτηση : f(x) = ημ^2(α·χ), $\chi \in \Re$, $\alpha \in \Re$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει : f ΄΄(x) + 4 α^2·f(x) = 2.

33. Δίνεται η συνάρτηση : f(x) = e^{ax} .

α) να δείξετε ότι : α·f ΄(x) – f ΄΄(x) = 0 , για κάθε $\chi \in \Re$,

β) να βρείτε τις τιμές του α , ώστε να ισχύει η σχέση :

f ΄΄(x) + 2 · f ΄(x) = 3 · f(x), για κάθε $\chi \in \Re$.

34. Αν f(x) = $\frac{\kappa}{4+x^2}$, να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \Re$, για την οποία η εφαπτομένη της f(x) στο σημείο με τετμημένη -1 να είναι κάθετη στην ευθεία : ψ = -5χ+2.

35. Αν f(x) = 3χ^2 –α ·χ+β, να βρείτε τα α , $\beta \in \Re$,ώστε η εφαπτομένη της f(x) στο σημείο (1,4) :

α) να έχει κλίση -2,

β) να διέρχεται από το (3,5),

γ) να σχηματίζει γωνία 60^0, με τον χχ΄,

δ) να είναι παράλληλη στην ευθεία : 4χ+2ψ = 1.

36. Δίνεται η f(x) = $\frac{x^2}{3}$, $x \in \Re$. Να βρείτε :

α) f(3)΄

β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της f(x) στο x =3.

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης.

37. Δίνεται η h(x) = α · x^2 , $x \in \Re$, $\alpha \in \Re$.

α) να βρείτε h(2)΄.

β) τον αριθμό α , ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της h(x) να είναι 4 στο σημείο (2, h(2)).

38. Δίνεται η φ(x) = x^2+1, $x \in \Re$.

α) βρείτε φ(0)΄.

β) βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της φ(x) στο x = 0.

γ) βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της φ(x) στο σημείο (0 , φ(0)).

39. Δίνεται f(x) = 2 x^2-α · x, $x \in \Re$, $\alpha \in \Re$.

α) να βρείτε τον αριθμό f(2)΄.

β) τον αριθμό α , ώστε η εφαπτομένη της f(x) στο σημείο (2, f(2)) να σχηματίζει με τον x x΄ γωνία 45^0.

40. Αν f(x) = $\alpha\chi^3-\beta\chi^2+3\chi+2$, να βρείτε τις τιμές των α , $\beta \in \Re$, ώστε η γραφική παράσταση της f(x) να έχει στο σημείο (-1,2) εφαπτομένη με κλίση -10.

41. Αν f(x) = $\chi^3-4\chi$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της f(x) στα σημεία τομής με τον άξονα χχ΄.

42. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f(x) η οποία σχηματίζει με τον χχ΄ γωνία 45^0, αν f(x) = $2\chi+\chi^2$.

43. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f(x) , όπου f(x) = $\frac{4x^2}{2x+1}$ στα σημεία Μ (x_0 , f(x_0)) στα οποία είναι : f ΄(x_0) = 2 · f(x_0).

44. α) Δίνεται η ευθεία χ=1 και η παραβολή ψ= χ^2 .

ι) Να βρεθεί πόσα κοινά σημεία έχουν οι δυο καμπύλες.

ιι) Να βρεθεί η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο χ_0 =1.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες σημείου πάνω στην ψ= χ^2 -5 , της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της στο σημείο αυτό είναι 3. Στην συνέχεια να βρεθεί ο $\kappa \in R$ ώστε η ψ= 3χ+κ να είναι μια εφαπτομένη της παραπάνω καμπύλης στο σημείο που προσδιορίστηκαν οι συντεταγμένες του.

45. Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^3 - 2\chi^2 + \alpha\chi + \beta$, α, $\beta \in R$. Αν η γραφική παράσταση της περνάει από το Α (0,2) και η εφαπτομένη της στο Α σχηματίζει με τον χ χ΄ γωνία ίση με $\frac{3\pi}{4}$ τότε :

α) Να προσδιοριστούν τα α, β.

β) Να προσδιοριστούν τα σημεία τομής του γραφήματος της φ με τους άξονες.

46. Δίνεται η $f(x) = \chi^3 - \lambda \cdot \chi$, $\lambda \in \Re$, για την οποία ισχύει : $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$.

α) βρείτε τον λ,

β) για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω , βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f(x) στο 2,

γ) να γράψετε την εφαπτομένη της f(x) που είναι παράλληλη στην ψ = 10χ+5.

47. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$,

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της,

β) να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f(x),

γ) να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f ΄(x) στο σημείο $x_0 = 4$,

δ) να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της f(x) στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$ είναι παράλληλη στην ευθεία : ψ = $-\sqrt{2}x + 3$.

48. Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{1+6x}$, να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της,

β) τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f(x) στο σημείο με τετμημένη 4,

γ) τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης της f(x) στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία : ψ = χ +12

δ) το σημείο στο οποίο η παραπάνω εφαπτομένη της f(x) τέμνει τον άξονα ψψ΄.

49. Δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f(x) , h(x) συνδέονται με τη σχέση :

$f(x) = 4\cdot h(x)^3 + 5$. Αν h(4) = 1 και h΄ (4) = -2 να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f(x) , ως προς χ , στο χ = 4.

50. Δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f(x) , h(x) συνδέονται με τη σχέση :

$f(x) = (\ln(h(x))^2)^2 + 10$. Αν h(3) = e , h ΄ (3) = 5, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f(x) , ως προς χ , στο χ = 3.

51. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου V μιας σφαίρας ως προς την επιφάνεια της Ε , τη στιγμή που ο όγκος της είναι $\frac{4\pi}{3}cm^3$.

Δίνονται : $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3, E = 4\pi \cdot R^2$.

52. Αν $f(x) = \chi^2$ και h(x) = ημχ, να βρείτε τις συναρτήσεις :

α) f ΄(x) β) h ΄ (x) γ) f ΄(h(x)) δ) h ΄(f(x))

ε) [f (h(x))]΄ στ) [h(f(x))]΄

53. Αν η συνάρτηση f(x) είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\chi \in \Re$, να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

α) h(x) = f(συνχ) β) $h(x) = ημ(f(x))^3$ γ) $h(x) = [f(συνχ)]^4$

δ) $h(x) = f(\ln(e^{\chi} +1))$

54. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \chi^2-2\chi+3$ β) $h(x) = - \chi^3+6\chi^2 +10$ γ) $f(x) = \chi^3-2\chi^2+4\chi-5$

δ) $h(x) = \chi^2+2\chi+17$ ε) $f(x) = -\chi^3$ στ) $h(x) = \chi^3-12\chi+1$

ζ) $h(x) = (\chi+2)^2\cdot(\chi-1)$ η) $h(x) = -\frac{2}{3}\chi^3+3\chi^2-4\chi+2$

55. Δίνεται η συνάρτηση : $h(x) = -\chi^4+6\chi^2+8\chi+3$

α) να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της τέμνει τον χχ΄

β) στο διάστημα που ορίζουν τα σημεία αυτά να μελετήσετε την h(x) ως προς τη μονοτονία.

56. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \chi^4+2\chi^3$ β) $f(x) = 8\chi^3-12\chi^2+6\chi+6$ γ) $f(x) = (\chi-1)^3\cdot(4\chi+3)^4$

δ) $h(x) = \dfrac{4}{x^2+4}$ ε) $f(x) = \chi^2+\chi^{-2}+1$ στ) $f(x) = 3\chi^4-2\chi^3-9\chi^2+7$

ζ) $\varphi(\chi)=x^4-4x^3-8x^2+3$ η) $g(x)=x^2(x-1)^3$

θ) $f(x)=x^2\ln x$ ι) $t(x)=\dfrac{x}{e^x}$

57. Ομοίως για τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = \chi^3-12\chi$ β) $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ γ) $f(x) = \chi^3\cdot e^{-x^2}$

δ) $h(x) = \ln\sqrt{4-x^2}$ ε) $f(x) = \dfrac{e^x}{2x}$ στ) $h(x) = \chi - \ln\chi$

ζ) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-1}$ θ) $f(x) = ημχ\cdot(1+συνχ)$, $\chi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

58. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2\chi^3-15\chi^2+36\chi+36$

α) βρείτε $f\,'(x)$,
β) βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f(x),
γ) βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f(x).

59. Δίνονται οι συναρτήσεις :
$f(x) = \chi^3-9\chi+1$ $h(x) = \chi^4-8\chi^3-270\chi^2$ $\varphi(\chi) = 2\chi^3-3\chi^2-12\chi-7$

Για καθεμιά να βρείτε :
α) την πρώτη παράγωγο,
β) τα διαστήματα στα οποία αλλάζουν πρόσημο,
γ) τα διαστήματα μονοτονίας,
δ) τα σημεία των τοπικών ακροτάτων.

60. Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης $f(x) = \chi^3-6\chi^2+18\chi+5$ για την οποία ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης γίνεται ελάχιστος.

61. Από όλα τα ορθογώνια που έχουν περίμετρο 16 εκατοστά, ποιο είναι εκείνο που έχει την μικρότερη διαγώνιο ;

62. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = α\cdot(χ+1)^2 -2χ$ με $α\in \Re$ και $χ\in \Re$. Να βρείτε :

α) $f\,'(x)$,
β) τον αριθμό α ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f(x) να είναι 4,
γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης,
δ) το σημείο της εφαπτομένης που βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

63. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{1}{3}χ^3-2χ^2-5χ-2$, $χ\in \Re$. Να βρείτε :

α) την $f\,'(x)$,
β) λύστε την εξίσωση : $f\,'(x) = 0$
γ) βρείτε τα ακρότατα της f(x),
δ) το σημείο της καμπύλης της f(x) όπου η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης. Ποιος είναι αυτός ;

64. Δίνεται η ευθεία : $ψ = -2χ+4$

ι) βρείτε τα σημεία που τέμνει τους άξονες χχ΄ , ψψ΄,
ιι) αν Μ(χ,ψ) σημείο της παραπάνω ευθείας και φέρνουμε τις προβολές Α, Β του Μ στους άξονες χχ΄ , ψψ΄. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ ώστε το ΟΑΒΜ να έχει μέγιστο εμβαδόν.

65. Να βρεθούν τα α , $β\in \Re$ ώστε η συνάρτηση : $f(x) = α\cdot\ln χ^2 + βχ^2-\ln χ +4$, να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία : $χ_1= \frac{1}{2}$, $χ_2 = \frac{1}{4}$ και στην συνέχεια να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων αυτών.

66. Να βρεθούν τα α, $β \in \Re$ ώστε η συνάρτηση : $f(x) = αχ^3+βχ^2-6χ+1$ να έχει ακρότατα στα σημεία $χ_0 = 1$ και $χ_0 = -2$. Έπειτα να μελετήσετε την f(x) ως προς τη μονοτονία.

67. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = αχ^2+βχ+3$, $χ\in \Re$, α, $β \in \Re$. Να βρείτε τα α, β ώστε η f(x) να έχει στο σημείο (2,5) τοπικό ακρότατο και κατόπιν να βρείτε το είδος του.

68. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = αχ^3+βχ^2+4χ+6$, $χ\in \Re$, $α,β \in \Re$.

α) βρείτε α , β ώστε η f(x) να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $χ_1 = 1$, $χ_2 = -1$.

β) βρείτε τις τιμές των ακροτάτων.

69. Έστω η συνάρτηση με τύπο : h(x) = $\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in \Re$. Να βρείτε τα α, β, γ ώστε η f(x) να έχει μέγιστο στο Α(1,3) και f ΄΄(3) = 0.

70. Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα ώστε η θέση του την τυχαία χρονική στιγμή t (σε δευτερόλεπτα) να δίνεται από τον τύπο:

$$s(t)=t^3-12t^2+45t \text{ σε μέτρα.}$$

Να βρείτε:

α) την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος την τυχαία χρονική στιγμή t.

β) την απόσταση των θέσεων του σώματος όταν αυτό είναι ακίνητο.

γ) το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σώμα στη διάρκεια των πρώτων 10 δευτερολέπτων.

71. Μια σφαίρα βάλλεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος Η από το έδαφος στο οποίο θα φτάσει είναι συνάρτηση του χρόνου t και δίνεται από τον τύπο Η=$\varphi(t)=30t-3t^2$, t σε δευτερόλεπτα και το Η σε μέτρα. Να βρείτε:

1. Τη μέση ταχύτητα της σφαίρας στο διάστημα [1,3].
2. Την ταχύτητα της σφαίρας όταν t =3.
3. Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα.
4. Την παράγωγο της $\psi(t)=(\varphi'(t))^2+12\varphi(t)$.

72. Ένα τραίνο καταναλώνει για καύσιμα $\omega^2\frac{1}{4}$ € την ώρα, όπου ω η ταχύτητα του σε χιλιόμετρα /ώρα. Αν τα υπόλοιπα έξοδα του είναι 1600€ την ώρα να βρείτε ποια πρέπεί να είναι η ταχύτητα του για να καλύψει 540 χιλιόμετρα με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

73. Το κόστος παραγωγής της μιας μονάδας ενός προϊόντος, όταν παράγονται χ μονάδες, δίνεται από τον τύπο: $K(\chi)=\frac{100}{x}-5x+40$. Η τιμή πώλησης της μιας μονάδας πρέπει να είναι 40% μεγαλύτερη από την τιμή κόστους. Να βρεθεί:

1. η συνάρτηση των εσόδων από την πώληση χ μονάδων.
2. σε πόσες μονάδες έχουμε μεγιστοποίηση των κερδών.

[Απ. 1. $-7\chi^2+56\chi+140$, 2. χ=4]

74. Μια ώρα μετά την λήψη χ mgr ενός αντιπυρετικού η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από την συνάρτηση: $T(\chi)=\chi^2-\frac{x^3}{4}$, $0<\chi<3$. Να βρεθεί ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού χ, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς χ να γίνει μέγιστος.

75. α) Να χωρίσετε τον αριθμό 8 σε δυο θετικούς προσθετέους ώστε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του γινομένου τους επί την διαφορά τους να είναι μέγιστο.

β) Δίνεται η δ(χ)=$χ^{2}$+(5-α)χ-(α-8). Για ποια τιμή του α το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της δ(χ) είναι ελάχιστο;

[$4+\frac{4}{\sqrt{3}}, 4-\frac{4}{\sqrt{3}}$]

76. Ένας ασθενής είχε τα μεσάνυχτα πυρετό 39^{O} C και μετά από μισή ώρα πήρε ένα αντιπυρετικό. Από τα μεσάνυχτα έως τις 2 π.μ η θερμοκρασία του δίνεται από τη συνάρτηση:

$Θ(t) = \frac{1}{5}e^{t}(\frac{5}{2}-t)+38.5$ σε βαθμούς C , $t \in [0,2]$ ώρες. Να βρεθεί πότε άρχισε να πέφτει ο πυρετός και ποια η μέγιστη τιμή του. (e=2.7)

[Ε. Μ. Ε Τράπεζα θεμάτων]

77. Ένας οικοπεδοφάγος αγόρασε 160 μέτρα σύρμα προκειμένου να καταπατήσει οικόπεδο σε περιοχή η οποία δεν έχει μπει ακόμη στο εθνικό κτηματολόγιο. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι ο στόχος του είναι να καταπατήσει το μέγιστο δυνατό οικόπεδο σε σχήμα ορθογωνίου να βρεθούν οι πλευρές του ορθογωνίου.

[Ε. Μ. Ε Τράπεζα θεμάτων]

78. Εταιρεία παράγει ηλεκτρονικά εξαρτήματα με πάγιο ετήσιο κόστος 4,5 εκατομμύρια € και κόστος ανά μονάδα 1000 € . Η τιμή πώλησης κάθε εξαρτήματος είναι 1800 €.

1. Ποία η συνάρτηση κόστους;
2. Ποία η συνάρτηση κέρδους;
3. Ποίος ο ρυθμός μεταβολής όταν η εταιρεία παράγει $χ_0$ εξαρτήματα;

79. Μια τουριστική επιχείρηση οργανώνει εκδρομές με λεωφορείο. Κάθε τουριστικό λεωφορείο έχει 50 θέσεις. Όταν οι επιβάτες του είναι ακριβώς 30, τότε η εταιρεία ζητά 15€ ανά άτομο. Για να αυξήσει τους επιβάτες κάνει την εξής προσφορά: 'κάθε επιπλέον επιβάτης θα μειώνει κατά 0,3€ την χρέωση κάθε άλλου επιβάτη'. Να βρεθεί το πλήθος των επιπλέον επιβατών που πρέπει να έχει το λεωφορείο, ώστε η επιχείρηση να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της.

80. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f(χ-1)= χ+1997-f(2000) για κάθε $χ \in R$.

α) Να δειχθεί ότι f(2000)=1999

β) Να δειχθεί ότι ο τύπος της f είναι μια ευθεία η οποία εφάπτεται της $g(χ)=χ^{2}-\frac{3}{4}$ στο Μ(1/2, -1/2).

81. Να βρείτε τα α, β $\in$ R ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης της f με τύπο : $f(χ)= (α+1)\cdot\ln(x+1)+β\cdot(χ+1)^{2}+3$, χ>-1 , να έχει στο σημείο Α(0,2) εφαπτομένη παράλληλη στον x x΄.

82. α) Δίνεται η f που είναι παραγωγίσιμη στο R και f΄(3)=-1. Για τη συνάρτηση g(x) ισχύει ότι g(χ)= f(x^2+x+3) να βρεθεί το g΄(0).

β) Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=$1/5χ^5+1/4x^4-2/3x^3-1$.

ι) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης.

ιι) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.

[Ένθετο 'Εξετάσεις' 2002]

83. Για την συνάρτηση f(x)=$2x^2-ax+\beta$ με α,β$\in$R γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f(χ) στο σημείο Α(1, f(1)) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=3.

α) Να βρεθεί η τιμή του α.

β) Αν επιπλέον η παραπάνω εφαπτομένη έχει εξίσωση ψ = 3 · x -1, να υπολογιστεί η τιμή του β.

γ) Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση ψ= 3χ -1.

[Απ. α=1, β=1, (1/6, f(1/6))]

[Ένθετο 'Εξετάσεις'2002]

84. Έστω η συνάρτηση f(x) = x - lnx^2

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της παραπάνω συνάρτησης στο σημείο (x_0, f(x_0)), με x_0>0.

ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε.

ιι) Να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν η εφαπτομένη ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε το x_0 είναι ίσο με :

α: 1 β: 2 γ: e^2 δ: e ε: $\frac{1}{e}$

85. Το πλήθος των επισκεπτών σε μια παραλία του Σαρωνικού την πρώτη εβδομάδα του Ιουνίου που μας πέρασε δίνεται από την συνάρτηση :

$$P\,(χ) = -\frac{1}{6}x^3+7x^2+30x+300,$$

όπου χ η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου με $20 \le x \le 35$. Να βρείτε :

α) για ποια θερμοκρασία είχαμε το μέγιστο πλήθος επισκεπτών;

β) το μέγιστο πλήθος των επισκεπτών.

[Πανελλήνιες ΤΕΛ , 1999]

86. Δίνεται η συνάρτηση φ(χ)= συνχ + ημχ.

α) Να δειχθεί ότι φ(χ)+φ΄΄(χ)=0

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της φ(χ) στο σημείο (0,1).

γ) Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε να ισχύει η σχέση $\lambda\, \varphi'(\frac{\pi}{2})-2\varphi(\frac{\pi}{2})=2$

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2001]

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f.

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2002]

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).

β) Να βρείτε τα : $\lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2002]

89. Η χωρητικότητα σε λίτρα των πνευμόνων ενός ανθρώπου ηλικίας ετών δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{200}x^2+\frac{1}{5}x+4$,$10 \le x \le 35$. Σε ποια ηλικία οι πνεύμονες του ανθρώπου έχουν τη μέγιστη χωρητικότητα;

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Τ. Ε. Ε 2001]

90. Δίνεται η συνάρτηση f: **R**→**R**
με $f(x)=\lambda x^3-x$ όπου λ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει ότι
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

α. Να βρείτε την τιμή του λ .

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Τ. Ε. Ε 2002]

91. Δίνεται η συνάρτηση f: **R**→**R**, με

$$f(x)= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\ln 2\ .$$

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τις τιμές f΄(0) και f΄ (1).

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Τ.Ε. Ε 2002]

92. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R, με τύπο :

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2}$$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

δ) Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.

93. Έστω η θερμοκρασία ενός ψυγείου προσεγγίζεται από τον τύπο :

$$f(x) = 4 - \frac{3x^2}{(x+1)^2}$$

Δείξτε ότι η θερμοκρασία συνεχώς μειώνεται.

94. Μια βιομηχανία παράγει χ τεμάχια ενός προιόντος με ημερήσιο κόστος (σε δεκάδες ευρώ) : Κ (χ) = $\frac{1}{6}x^3 - 10x^2 + 300x + 1500$. Η τιμή πώλησης κάθε τεμαχίου δίνεται από την σχέση : Ε(χ) = 210 – χ. Ποια θα πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή τεμαχίων , δεδομένου ότι δεν ξεπερνά τις 100 μονάδες ώστε να έχουμε μέγιστο κέρδος ;

95. Η τιμή πώλησης μιας ηλεκτρικής συσκευής είναι 15.000 €. Το κόστος της συναρτήσει του χρόνου κατασκευής σε ώρες προσεγγίζεται από την σχέση :

$$K(\chi) = 2\chi^2 + 500\chi^{-1}$$

Πόσες ώρες κατασκευής απαιτούνται για να πραγματοποιηθεί το μέγιστο κέρδος και πόσο είναι αυτό ;

96. Έστω ευθεία ψ = χ-3. Βρείτε σημείο της ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του από τα σημεία Α(1,1) και Β(1,5) να είναι ελάχιστο.

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:
1) R **2) (**-1,1) **3) R**- {-1,1} **4)** (1, + ∞)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)<0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot f(x)\right]$

δ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)) με τον άξονα x΄x .

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2003]

98. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

α) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f(x) στο σημείο Λ(1,1).

β) Από τυχαίο σημείο Μ(χ,ψ) της γραφικής παράστασης της f(x) φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Οχ , Οψ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Μ ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2005]

99. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x\cdot e^x + 3$, όπου χ πραγματικός αριθμός.

α) να δείξετε ότι : $f'(x) = f(x) + e^x - 3$

β) να βρεθεί το όριο : $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-e^x}{x^2-x}$

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2007]

100. Δίνεται η $f(x) = \chi^2 +1$, όπου χ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε :

α) το ρυθμό μεταβολής της f(x) όταν χ = 2

β) το ακρότατο της f(x)

γ) το σημείο $A(\chi_0 , f(\chi_0))$ της γραφικής παράστασης της f(x) , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ψ = 3.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2007]

101. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \kappa x + 2$, κ πραγματικός.

α) αν η γραφική παράσταση της διέρχεται από το Μ(3,8) , βρείτε τον αριθμό κ

β) για κ = -1
ι) αποδείξτε ότι : $f'(x) + f''(x) + 2 = (\chi+1)^2$, για κάθε χ
ιι) να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2008]

102. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου χ πραγματικός αριθμός.

α) να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x f(x)}{x^2-1}$

β) αποδείξτε ότι : $e^x f'(x) = 2 - x$

γ) να βρείτε τα ακρότατα της f(x).

[ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2008]