

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>**

### **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ**

#### **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

### ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΟΔΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ
<p><b>1. ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ</b></p> <p><math>\forall v \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad a_v = a_1 + (v-1) \cdot \omega</math></p> <p><math>\omega</math> : διαφορά προόδου</p>	<p><b>1. ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ</b></p> <p><math>\forall v \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}</math></p> <p><math>\lambda</math> : λόγος προόδου</p>
<p><b>2. ΑΘΡΟΙΣΜΑ</b></p> $S_v = \begin{cases} \frac{a_1 + a_v}{2} \cdot v \\ \frac{2a_1 + (v-1) \cdot \omega}{2} \cdot v \end{cases}, \omega \neq 0$ <p><math>S_v = v \cdot a_1 \quad , \omega = 0</math></p>	<p><b>2. ΑΘΡΟΙΣΜΑ</b></p> $S_v = \begin{cases} \frac{a_1 \cdot (\lambda^v - 1)}{\lambda - 1}, \lambda \neq 1 \\ v \cdot a_1, \lambda = 1 \end{cases}$
<p><b>3. ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΙ ΟΡΟΙ</b></p> <p><math>\alpha, \beta, \gamma</math> διαδοχικοί όροι Α. Π <math>\Leftrightarrow</math></p> $2 \cdot \beta = \alpha + \gamma$	<p><b>3. ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΙ ΟΡΟΙ</b></p> <p><math>\alpha, \beta, \gamma \neq 0</math> διαδοχικοί όροι Γ. Π <math>\Leftrightarrow</math></p> $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$
<p><b>4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ</b></p> <p><math>\alpha, x_1, x_2, \dots, x_v, \beta</math>    Αρ. Πρόοδος</p> <p>Τότε : <math>\omega = \frac{\beta - \alpha}{v + 1}</math> (διαφορά παρεμβολής)</p>	<p><b>4. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ</b></p> <p><math>\alpha, x_1, x_2, \dots, x_v, \beta</math>    Γεωμ. Πρόοδος</p> <p>Τότε : <math>\lambda^{v+1} = \frac{\beta}{\alpha}</math> (λόγος παρεμβολής)</p>

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

**Αν στην εκφώνηση της άσκησης ζητούνται :**

- ❖ Να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι **αριθμητική πρόοδος** πρέπει να δείξουμε ότι η διαφορά :  $a_{v+1} - a_v$  **ισούται με σταθερό αριθμό**, ο οποίος θα είναι και η διαφορά της προόδου.
- ❖ Να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι **γεωμετρική πρόοδος**, πρέπει να δείξουμε ότι το πηλίκο :  $\frac{a_{v+1}}{a_v}$  **ισούται με σταθερό αριθμό**, ο οποίος είναι ο λόγος της προόδου.
- ❖ Αν  $\omega = 0$  σε αριθμητική πρόοδο τότε όλοι οι όροι είναι ίσοι με :  $a_1$ , οπότε :  

$$S_v = v \cdot a_1$$
- ❖ Αν  $\lambda = 1$  σε γεωμετρική πρόοδο τότε όλοι οι όροι είναι ίσοι με :  $a_1$ , οπότε:  

$$S_v = v \cdot a_1$$
- ❖ **Περιττοί το πλήθος άγνωστοι όροι αριθμητικής προόδου** τότε τους συμβολίζουμε ως εξής :  $\dots, x - 3 \cdot \omega, x - 2 \cdot \omega, x - \omega, x, x + \omega, x + 2 \cdot \omega, x + 3 \cdot \omega \dots$  όπου  $\omega$  η διαφορά της προόδου.
- ❖ **Άρτιοι το πλήθος άγνωστοι όροι αριθμητικής προόδου** τότε τους συμβολίζουμε ως εξής :  $\dots, x - 5 \cdot \omega, x - 3 \cdot \omega, x - \omega, x + \omega, x + 3 \cdot \omega, x + 5 \cdot \omega \dots$  όπου  $\omega$  η διαφορά της προόδου.
- ❖ **Περιττοί το πλήθος άγνωστοι όροι γεωμετρικής προόδου** τότε τους συμβολίζουμε ως εξής :  $\dots, \frac{x}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}, x, x \cdot \lambda, x \cdot \lambda^2 \dots (\lambda \neq 0)$ .
- ❖ **Άρτιοι το πλήθος άγνωστοι όροι γεωμετρικής προόδου** τότε τους συμβολίζουμε ως εξής :  $\dots, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x \cdot \lambda, x \cdot \lambda^3 \dots (\lambda \neq 0)$ .
- ❖ μεταξύ των αριθμών  $\gamma, \delta$  να παρεμβάλουμε  $n$  το πλήθος αριθμούς ώστε μαζί τους αριθμούς  $\gamma, \delta$  να δημιουργείται αριθμητική πρόοδος με  $n+2$  το πλήθος όρους τότε, έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι ζητούμενοι αριθμοί. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι ο  $\gamma$  και ο τελευταίος ο  $\delta$ , το πλήθος των όρων είναι  $n+2$ . Συνεπώς ισχύει :  $\delta = \gamma + (n+1) \cdot \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{\delta - \gamma}{n+1}$ , όπου  $\omega$  η διαφορά της προόδου.

- ❖ μεταξύ των αριθμών  $\gamma, \delta$  να παρεμβάλουμε  $n$  το πλήθος αριθμούς ώστε μαζί τους αριθμούς  $\gamma, \delta$  να δημιουργείται γεωμετρική πρόοδος με  $n+2$  το πλήθος όρους τότε, έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι ζητούμενοι αριθμοί. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι ο  $\gamma$  και ο τελευταίος ο  $\delta$ , το πλήθος των όρων είναι  $n+2$ . Συνεπώς ισχύει :
- $$\delta = \gamma \cdot \lambda^{n+1} \Leftrightarrow \lambda^{n+1} = \frac{\delta}{\gamma} \quad (1).$$

Για την λύση της (1) διακρίνω τις περιπτώσεις :

**Περίπτωση 1** :  $n+1$  άρτιος και  $\gamma, \delta$  ομόσημοι.

Η (1) έχει 2 ρίζες τις :  $\lambda = \pm \sqrt[n+1]{\frac{\delta}{\gamma}}$ , έχουμε λοιπόν 2 γεωμετρικές προόδους.

**Περίπτωση 2**  $n+1$  άρτιος και  $\gamma, \delta$  ετερόσημοι.

Η (1) είναι αδύνατη, άρα το πρόβλημα δεν έχει λύση.

**Περίπτωση 3**  $n+1$  περιττός και  $\gamma, \delta$  ομόσημοι

Η (1) έχει λύση την :  $\lambda = \sqrt[n+1]{\frac{\delta}{\gamma}}$ .

**Περίπτωση 4**  $n+1$  περιττός και  $\gamma, \delta$  ετερόσημοι

Η (1) έχει λύση την :  $\lambda = -\sqrt[n+1]{-\frac{\delta}{\gamma}}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι πρώτοι όροι της ακολουθίας :  $a_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ .
2. Ομοίως της ακολουθίας :  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ .
3. Δίνεται η ακολουθία :  $a_n = 3n-4, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Να εξεταστεί αν ο 41 είναι όρος της ακολουθίας.
4. Να ορισθεί ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας :  $a_n = 3 \cdot 5^n, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ .
5. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις :

**α**) οι αριθμοί -5, 5, 15 με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι Α. Π.



21. Σε Α. Π ισχύει  $\omega=2a_1$ , να αποδείξετε ότι :  $\frac{S_\mu}{S_\nu} = \frac{\mu^2}{\nu^2}$  .
22. Σε μια αριθμητική πρόοδο ( $a_\nu$ ) με θετικούς όρους να αποδείξετε ότι :
- $$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{\nu-1}} + \sqrt{a_\nu}} = \frac{\nu-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_\nu}} .$$
23. Σε μια αριθμητική πρόοδο ( $a_\nu$ ) δείξτε ότι ισχύει η σχέση :
- $$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{\nu-1} a_\nu} = \frac{\nu-1}{a_1 a_\nu} .$$
24. Να βρεθούν οι γωνίες κυρτού πενταγώνου αν γνωρίζουμε ότι είναι διαδοχικοί όροι Α. Π και η μικρότερη γωνία του είναι  $60^\circ$  .
25. Η μικρότερη γωνία κυρτού πολυγώνου είναι  $60^\circ$  και κάθε άλλη  $20^\circ$  μεγαλύτερη της προηγούμενης της. Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.
26. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που είναι διαδοχικοί όροι Α. Π, αν το άθροισμα τους είναι 33 και το γινόμενο τους 1287.
27. Να βρεθεί ο  $\nu$ -στός όρος μιας Γ. Π της οποίας ο τέταρτος όρος είναι -4 και ο ενδέκατος  $\frac{1}{64}$  .
28. Μεταξύ των αριθμών 3 και 192 να παρεμβληθούν πέντε αριθμοί έτσι ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας Γ. Π.
29. Σε Γ. Π δίνονται  $a_1=4$ ,  $a_\nu=972$ ,  $S_\nu=1456$ . Να βρεθεί ο  $\nu$ .
30. Να βρεθεί ο  $x$  ώστε οι αριθμοί  $5x-9$ ,  $2x+3$ ,  $3x-1$  να είναι διαδοχικοί όροι Γ. Π
31. Ο όγδοος όρος μιας Γ. Π είναι 384 και ο λόγος είναι 2. Να βρείτε το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της.
32. Ο πρώτος όρος μιας Γ. Π είναι 5 και ο έβδομος 3645. Να βρείτε το άθροισμα των επτά πρώτων όρων της.
33. Για ποια τιμή του  $x$  ο αριθμός  $\sqrt[4]{10x-26}$  είναι γεωμετρικός μέσος των αριθμών  $\sqrt{x-8}$ ,  $\sqrt{x-1}$  .
34. Να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων μιας Γ. Π όταν  $a_2+a_6=34$  και  $a_3+a_7=68$  .
35. Να βρεθεί γεωμετρική πρόοδος αν  $S_4=40$ ,  $S_8=3280$ .

36. Να βρεθεί Γ. Π αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της είναι 26 και το άθροισμα των επομένων τριών όρων της είναι 702.
37. Να βρεθεί Γ. Π αν οι τρεις πρώτοι όροι της έχουν άθροισμα 21 και ο πρώτος όρος της με τον τέταρτο όρο της έχουν άθροισμα 27.
38. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα :
- $$S_1 = 9+99+999+\dots\dots\dots+99\dots\dots9$$
- $$S_2 = 1+11+111+\dots\dots\dots+1111\dots\dots1$$
- $$S_3 = 5+55+555+\dots\dots\dots+5555\dots\dots5$$
39. Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα.  
**α )** αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.  
**β )** στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό και προκαλεί καταστροφή  $3^3 \cdot 10$  βακτηριδίων κάθε ώρα.  
**ι )** να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.  
**ii )** μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια ;
- [ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2000 ]
40. Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha_1 = \sin 2\alpha$ ,  $\alpha_2 = \sin^2 \alpha$ ,  $\alpha_3 = 1$  όπου γωνία  $\alpha$  ικανοποιεί την σχέση :  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  .  
**α )** να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους Α. Π.  
**β )** να βρείτε τη διαφορά  $\omega$   
**γ )** να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου.
- [ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2002 ]
41. Έστω μια αριθμητική πρόοδος της οποίας ο δεύτερος όρος είναι ίσος με 9 και ο τρίτος με 13.  
**α )** να βρεθεί η διαφορά  $\omega$  και ο  $\alpha_1$  .  
**β )** να βρεθεί ο  $\alpha_{100}$  .  
**γ )** να βρεθεί το  $S_{100}$  .
42. **α )** Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού  $x$  για τις οποίες οι αριθμοί :  $x-4$ ,  $x+4$ ,  $3x-4$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.  
**β )** Αν ο  $x+4$  είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος (α) να βρείτε τον  $\alpha_1$  .  
**γ )** Να βρείτε το  $S_{10}$  της προόδου του ερωτήματος (α).
43. Δίνονται οι αριθμοί : 1,  $\eta\mu x + 1$ ,  $\eta\mu x + 3$ , όπου  $x \in \mathfrak{R}$  .  
**α )** να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί με την σειρά που δίνονται δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Αν  $0 \leq x \leq \pi$  και οι αριθμοί  $1, \eta\mu x + 1, \eta\mu x + 3$  με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε :

ι) να αποδείξετε ότι  $x = \frac{\pi}{2}$ .

ii) να βρείτε τον λόγο της προόδου.

44. Αν  $a_2 = \sigma\upsilon\nu \theta, a_3 = \sqrt{2} \cdot \eta\mu\theta, a_4 = \sqrt{3} \cdot \epsilon\phi\theta$ , όπου  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , είναι όροι γεωμετρικής προόδου.

α) να δείξετε ότι  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,

β) να βρείτε τον  $\lambda$  και τον  $a_1$  της προόδου,

γ) να βρείτε το  $S_4$  της παραπάνω προόδου.

45. Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά ;

β) πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο ;

γ) σε μια παράσταση τα εισιτήρια της 7<sup>ης</sup> σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 30 € το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο την παράσταση αυτή ;

46. Ο κατασκευαστής μιας πολυκατοικίας 12 ορόφων με πυλωτή, καθόρισε ως τιμή πώλησης του πρώτου ορόφου 1200 € το τετραγωνικό μέτρο και για κάθε επόμενο όροφο 100 € το τετραγωνικό μέτρο ακριβότερα από τον προηγούμενο όροφο.

α) πόσο πωλείται το διαμέρισμα ανά τετραγωνικό μέτρο στον 10<sup>ο</sup> όροφο ;

β) πόσο πωλείται ένα διαμέρισμα 82 τετραγωνικά μέτρα στον 12<sup>ο</sup> όροφο ;

γ) αν ο κάθε όροφος έχει 200 τετραγωνικά μέτρα, πόσα χρήματα θα εισπράξει ο κατασκευαστής από την πώληση όλων των διαμερισμάτων ;

47. Παρατηρήθηκε ότι η ποσότητα πετρελαίου που διαρρέει προς τη θάλασσα από ένα βυθισμένο δεξαμενόπλοιο διπλασιάζεται κάθε μέρα ( λόγω αύξησης του ρήγματος που προκάλεσε η διαρροή ). Το πετρέλαιο που διέρρευσε κατά την διάρκεια της πρώτης μέρας ήταν 20 τόνοι.

α) πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν κατά την διάρκεια της 7<sup>ης</sup> μέρας ;

β) πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν συνολικά κατά τις 7 πρώτες μέρες;

γ) αν η διαρροή σταματήσει στο τέλος της 7<sup>ης</sup> μέρας και το κόστος καθαρισμού είναι 1000 € ανά τόνο, πόσο θα κοστίσει ο καθαρισμός της θάλασσας από την ρύπανση που προκάλεσε το δεξαμενόπλοιο ;

48. Η τιμή αγοράς μιας φωτογραφικής μηχανής είναι μεγαλύτερη από 620 € και μικρότερη από 640 €. Κατά την αγορά της συμφωνήθηκαν τα εξής :

- Να δοθεί προκαταβολή 120 €.

- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.

- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά  $\omega$  € .

- Η τέταρτη δόση να είναι 48 €.

α) να εκφράσετε το ποσό της 1<sup>ης</sup> δόσης ως συνάρτηση του  $\omega$ .

β) να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του  $\omega$ .



γ ) να βρείτε το  $\omega$ .

δ ) να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

ε ) να βρείτε την τιμή αγοράς της φωτογραφικής μηχανής.

[ Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 1999 ]

**49.** Έστω δυο κοινωνίες βακτηριδίων A και B. Αν συμβολίσουμε με  $A_0$  τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας A και με  $B_0$  τον αρχικό πληθυσμό της B, τότε ισχύει :

$9 \cdot A_0 = 10^{11} \cdot B_0$ . Ο πληθυσμός της A μειώνεται κάθε μία ώρα κατά  $\frac{1}{100}$  του αρχικού

πληθυσμού της, ενώ ο πληθυσμός της B αυξάνεται ανά ώρα με γεωμετρική πρόοδο και λόγο  $\lambda$ . Οι δυο πληθυσμοί γίνονται ίσοι 10 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

α ) να αποδείξετε ότι ο λόγος που αναφέρεται στον πληθυσμό B είναι :  $\lambda = 10$

β ) πέντε ώρες μετά την αρχική στιγμή ο B είναι  $9 \cdot 10^{10}$ . Να δείξετε ότι ο αρχικός πληθυσμός της B είναι  $9 \cdot 10^5$ .

γ ) να βρείτε τον πληθυσμό της κοινωνίας A, 99 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

**50.** Η διάρκεια κατασκευής μιας σήραγγας του ΜΕΤΡΟ ήταν 110 μέρες. Το μηχάνημα διάνοιξης κατά τις πρώτες 50 μέρες εργασίας διάνοιγε καθημερινά μήκος σήραγγας ίσο με αυτό της προηγούμενης μέρας και 2 μέτρα επιπλέον. Κατά τις επόμενες 60 ημέρες το μήκος διάνοιξης καθημερινά ήταν ίσο με τα  $\frac{3}{4}$  του μήκους διάνοιξης της προηγούμενης μέρας. Αν το μήκος της σήραγγας που διάνοιξε το μηχάνημα την πρώτη μέρα ήταν 4 μέτρα, να βρείτε το μήκος της σήραγγας κατά τις πρώτες 70 μέρες εργασίας καθώς και μετά το πέρας των εργασιών.

**51.** Οι μαθητές της Β' τάξης Ενιαίου Λυκείου των Αθηνών ρώτησαν τον καθηγητή των Μαθηματικών πόσες ασκήσεις Άλγεβρας θα διδαχθούν και πόσος χρόνος μελέτης θα απαιτηθεί για την προετοιμασία τους για τις εξετάσεις. Εκείνος τους απάντησε ως εξής :

« Όλες οι ασκήσεις θα είναι αριθμημένες. Η πρώτη άσκηση θα φέρει τον αριθμό 1 και η τελευταία τον αριθμό  $2^{99}$ . Οι αριθμοί των ασκήσεων θα αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικές προόδου με άθροισμα ίσο με  $2^{100} - 1$ . Ο χρόνος μελέτης κάθε άσκησης από τις 20 πρώτες θα είναι ίσος με τα  $\frac{11}{10}$  του χρόνου μελέ-

της της προηγούμενης άσκησης. Για την πρώτη άσκηση θα απαιτηθούν 10 λεπτά μελέτης, ενώ για την κάθε μια από τις υπόλοιπες ο χρόνος μελέτης θα είναι 12 λεπτά ».

α ) να βρείτε το πλήθος των ασκήσεων.

β ) να βρείτε τον αριθμό που φέρει η  $20^{11}$  άσκηση.

γ ) να βρείτε τον χρόνο μελέτης που θα χρειαστεί για τις 20 πρώτες ασκήσεις.

δ ) να βρείτε τον χρόνο μελέτης που θα χρειαστεί για όλες τις ασκήσεις.

**52.** Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\frac{\pi}{8}$ ,  $\beta$ , με  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \beta \neq 0$ , οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α ) να δείξετε ότι  $(1 + \epsilon \phi \alpha) \cdot (1 + \epsilon \phi \beta) = 2$ .

**β )** αν  $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{4}$ , να δείξετε ότι οι αριθμοί :  $\epsilon\phi\alpha$ ,  $\epsilon\phi\frac{\pi}{4}$ ,  $\epsilon\phi(\alpha+2\beta)$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**γ )** να βρείτε το  $S_{2004}$  της γεωμετρικής προόδου του ερωτήματος (β), αν  $\alpha_1 = \epsilon\phi\alpha$ .

[ Ένθετο « Ο υποψήφιος » 2003 ]

**53.** Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο  $a_n = -11 + 2n$  με πρώτο όρο  $\alpha_1$ .

**α )** να αποδείξετε ότι η  $a_n$  είναι αριθμητική πρόοδος με  $\alpha_1 = -9$  και  $\omega = 2$ .

**β )** να βρείτε το άθροισμα :  $S = a_{12} + \dots + a_{21}$  της παραπάνω προόδου.

[ Πανελλήνιες Εξετάσεις 2003 ]

**54.** Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με περίμετρο 18 ισχύει ότι  $\sin A = -\frac{1}{4}$  και οι πλευρές  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

**55. α )** Να βρεθεί το άθροισμα  $S_{30}$ , των 30 πρώτων διαδοχικών, θετικών λύσεων της εξίσωσης :  $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ ,

**β )** να βρεθεί ο  $n$  ος όρος των παραπάνω θετικών διαδοχικών λύσεων και να βρεθεί ποια από αυτές ισούται με  $\frac{2003\pi}{3}$ ,

**γ )** να λυθεί η εξίσωση :  $a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x - 11\pi = 0$ , όπου  $a_3, a_4, a_5$  διαδοχικές λύσεις της παραπάνω προόδου.

**56.** Κάποιος αποφάσισε να αγοράσει με δόσεις ένα αυτοκίνητο 30.000 €. Έδωσε προκαταβολή 5000 €, και συμφώνησε να πληρώσει το υπόλοιπο σε 5 ακέριες δόσεις, έτσι ώστε κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά σταθερό αριθμό €. Αν το γινόμενο των 5 δόσεων ήταν 945.000 €, να βρεθεί το ποσό της δόσης.

**57.** Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει :  $a_{13} + \dots + a_{40} = 1260$ . Αν ο πρώτος όρος ισούται με το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης :  $x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$ , να βρεθεί ο 100 ος όρος της προόδου.

**58.** Δίνονται οι αριθμοί :  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ ,  $\alpha_3 = -2\eta\mu^2\alpha$ , με  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

**α )** ναδειχθεί ότι οι  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  αποτελούν τρεις πρώτους διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου

**β )** να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$  αν το  $S_4 = -2$ , όπου το  $S_4$  το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου

**γ )** αν  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , να υπολογιστεί το  $S_{103}$ , των 103 πρώτων όρων της Α.Π

**δ )** να βρεθεί ο βαθμός του πολωνύμου :

$$P(x) = S_5 \cdot x^5 + S_4 \cdot x^4 + S_3 \cdot x^3 + S_2 \cdot x^2 + S_1 \cdot x + 2005$$