ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{Ο}$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΑΠΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΤΑΞΕΙΣ

α) Ταυτότητες

1. $(a-\beta)(a+\beta)=a^2-\beta^2$
2. $(a\pm\beta)^2=a^2\pm 2a\beta+\beta^2$
3. $(a\pm\beta)^3=a^3\pm 3a^2\beta+3a\beta^2\pm\beta^3$
4. $(a+\beta+\gamma)^2=a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$
5. $a^3\pm\beta^3=(a\pm\beta)(a^2\mp a\beta+\beta^2)$
6. $a^2+\beta^2=(a+\beta)^2-2a\beta$
7. $a^3+\beta^3=(a+\beta)^3-3a\beta(a+\beta)$
8. $a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma=\frac{1}{2}(a+\beta+\gamma)[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-a)^2]$
9. Αν $a+\beta+\gamma=0$ *ή* $a=\beta=\gamma$ *τότε :* $a^3+\beta^3+\gamma^3=3a\beta\gamma$
10. $a^\nu-\beta^\nu=(a-\beta)(a^{\nu-1}+a^{\nu-2}\beta+.........+a\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$

β) Τριώνυμο

Έστω f (x)= $ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$, $a,\beta,\gamma\in R$, $\Delta=\beta^2-4a\gamma$ (Διακρίνουσα)

1. Ρίζες τριωνύμου

- $\Delta>0$ $\longrightarrow$ Το τριώνυμο έχει 2 άνισες ρίζες στον R με ρίζες
$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- $\Delta=0$ $\longrightarrow$ Το τριώνυμο έχει 1 διπλή ρίζα την $\rho=\frac{-\beta}{2a}$
- $\Delta<0$ $\longrightarrow$ Το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο σύνολο των πραγματικών.

2. Παραγοντοποίηση τριωνύμου

- $\Delta>0$ $\longrightarrow$ τότε: f(x)=α (x-ρ_1)(x-ρ_2) όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες.
- $\Delta=0$ $\longrightarrow$ τότε: f(x)=α $(x-\rho)^2$ όπου ρ η διπλή ρίζα του τριωνύμου.
- $\Delta<0$ $\longrightarrow$ τότε: Δεν παραγοντοποιείται στον R.

3. Πρόσημο Τριωνύμου $(ax^2 + \beta\chi + \gamma > \acute{\eta} < 0)$

- Δ>0 → Ομόσημο του α εκτός των ριζών δηλαδή στην ένωση $(-\infty, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$ και ετερόσημο του α εντός των ριζών (ρ_1, ρ_2).
- Δ=0 → Ομόσημο του α στο διάστημα $(-\infty, \rho) \cup (\rho, +\infty)$.
- Δ<0 → Ομόσημο του α σε όλο το R.

<u>γ) Η εξίσωση :</u> $x^\nu = a$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- ν άρτιος και α >0 → $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[\nu]{a}$
- ν άρτιος και α <0 → $x^\nu = a \Leftrightarrow$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

- ν περιττός και α >0 → $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$
- ν περιττός και α <0 → $x^\nu = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|a|}$

<u>Σχόλιο :</u> Θυμίζουμε επίσης την ιδιότητα των δυνάμεων : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, μ, ν $\in \aleph$.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

<u>1. ΟΡΙΣΜΟΙ</u>

<u>Μονώνυμο :</u> Κάθε αλγεβρική παράσταση της μορφής $\frac{1}{2}a^3k^2\lambda$ οπού η μόνη πράξη που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών είναι ο πολλαπλασιασμός, καλείται μονώνυμο. Το $\frac{1}{2}$ ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου και το υπόλοιπο $\alpha^3 k^2 \lambda$ ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

<u>Πρόσθεση – Αφαίρεση μονωνύμων :</u> Για να προσθέσουμε τώρα δυο μονώνυμα πρέπει να έχουν τα ίδια κύρια μέρη. Ομοίως με την πρόσθεση γίνεται και η αφαίρεση.

<u>Πολυώνυμο :</u> Κάθε παράσταση της μορφής: $a_\nu \cdot x^\nu + a_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + ...+ a_1 \cdot x + a_0$ συμβολίζεται με Ρ (x). (πολυώνυμο = πολλά μονώνυμα)

Σταθερό πολυώνυμο : Το P (x) = α_0, $\alpha_0 \neq 0$ καλείται σταθερό πολυώνυμο.

Μηδενικό πολυώνυμο : Το P (x)= 0 καλείται μηδενικό.

Βαθμός Πολωνύμου : Ο μεγαλύτερος εκθέτης του x ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου P (x).

Ίσα Πολυώνυμα : Δυο πολυώνυμα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο βαθμό και ίσους τους αντίστοιχους συντελεστές τους.

Βαθμός πρόσθεσης και αφαίρεσης Πολυωνύμων : Αν βαθμός του P (x) είναι μ και βαθμός του Q(x) είναι ν και μ$\geq$ν τότε βαθμός του P (x) $\pm$ Q(x) είναι ή μηδενικό πολυώνυμο ή πολυώνυμο βαθμού ρ$\leq$ μ.

Βαθμός Πολλαπλασιασμού Πολυωνύμων : Ο βαθμός του P (x)·Q(x) είναι μ+ν

Τιμή πολυωνύμου : Ο πραγματικός αριθμός P (ρ) που προκύπτει από το πολυώνυμο P (x) αν αντικαταστήσουμε το x με τον πραγματικό αριθμό ρ καλείται τιμή του P (x).

Ρίζα πολυωνύμου : Κάθε πραγματικός αριθμός ρ με P (ρ) =0 καλείται ρίζα του P (x).

2. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ (ταυτότητα διαίρεσης)

Αν Δ(x) και δ(x) είναι πολυώνυμα με δ(x)$\neq$ 0, τότε υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x) τέτοια ώστε :

$$\Delta(x) = \delta(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x), \qquad 0 \leq \text{βαθμός } \upsilon(x) < \text{βαθμού } \delta(x)$$

Δ(x) : διαιρετέος δ(x) : διαιρέτης π(x) : πηλίκο υ(x) : υπόλοιπο.

ΘΕΩΡΗΜΑ (υπολογισμός υπολοίπου)

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P (x) με το x-ρ είναι το σταθερό πολυώνυμο : **υ = P (ρ).**

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω P (x) πολυώνυμο. Το x-ρ είναι παράγοντας του P (x) $\Leftrightarrow$ P (ρ) =0.

Παρατήρηση : Σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. Το P (x) διαιρείται με το x - ρ.
2. Το x - ρ διαιρεί το P (x).
3. Το x - ρ είναι παράγοντας του P (x).
4. Η διαίρεση του P (x) με το x - ρ είναι τέλεια.
5. Ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P (x).
6. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P (x) με το x - ρ είναι μηδέν.
7. P (ρ) = 0.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ακεραίων ριζών)

Έστω πολυωνυμική εξίσωση : $a_\nu \cdot x^\nu + a_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές .
Ο ακέραιος ρ $\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\Rightarrow$ ο ρ είναι ρίζα του σταθερού όρου $α_0$.

Σχόλιο : Το αντίστροφο του Θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή κάθε διαιρέτης του $α_0$ δεν είναι κατά ανάγκη και ρίζα του πολυωνύμου P (x).

3. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ερώτηση : **Ποια είναι τα βήματα που ακολουθούμε για να λύσουμε μια κλασματική εξίσωση;**

Με προσοχή ακολουθούμε τα εξής 5 βήματα:

Βήμα $1^{Ο}$: Παίρνουμε περιορισμούς. Οι παρανομαστές πρέπει να είναι $\neq 0$ για να ορίζονται τα κλάσματα.

Βήμα $2^{Ο}$: Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρανομαστών .

Βήμα $3^{Ο}$: Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ε. Κ. Π και κάνουμε απλοποιήσεις.

Βήμα $4^{Ο}$: Μετά από πράξεις καταλήγουμε σε εξίσωση $1^{ΟΥ}$ ή $2^{ΟΥ}$ βαθμού που λύνουμε όπως παραπάνω.

Βήμα $5^{Ο}$: Δεν ξεχνάμε να τσεκάρουμε τη λύση, με τους περιορισμούς. Δεχόμαστε αυτές που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η κλασματική εξίσωση: $\frac{x-2}{2x} = \frac{2}{x-2} + \frac{4}{x^2 - 2x}$

Βήμα 1^{Ο} : Παίρνουμε περιορισμούς. Πρέπει $2\chi \neq 0$, $2-\chi \neq 0$, $\chi^2 -2\chi \neq 0$

- $2\chi \neq 0 \Rightarrow \chi \neq 0$ (1)
- $\chi-2 \neq 0 \Rightarrow \chi \neq 2$ (2)
- $\chi^2 -2\chi \neq 0 \Rightarrow \chi(\chi-2) \neq 0 \Rightarrow \chi \neq 0$ και $\chi-2 \neq 0 \Rightarrow \chi \neq 0$ και $\chi \neq 2$ (3)

Η (1) και (2) και (3) συναληθεύουν για $\chi \neq 0$ και $\chi \neq 2$.

Βήμα 2^{Ο} -3^{Ο} : Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π. Καταρχήν αναλύουμε τους παρανομαστές.
Ο ένας παρανομαστής $\chi^2 -2\chi=\chi\cdot(\chi-2)$, ο δεύτερος $\chi-2$, ο τρίτος 2χ.
Ε. Κ. Π αυτών είναι το γινόμενο των κοινών και των μη κοινών παραγόντων, οπότε
Ε. Κ. Π= $(2\chi)\cdot(\chi-2)$. Πολλαπλασιάζω τώρα κάθε όρο με το Ε. Κ. Π

$$(2\chi)(\chi-2)\,\frac{x-2}{2x} = (2\chi)(\chi-2)\frac{2}{x-2} + \frac{4}{x^2-2x}\,(2\chi)(\chi-2) \Rightarrow (\chi-2)^2 = 2\cdot(2\chi) + 4\cdot 2$$

Βήμα 4^{Ο} : Λύνουμε την εξίσωση που θα προκύψει μετά από πράξεις

$$\Rightarrow (\chi^2 -4\chi+4)=4\chi+8 \Rightarrow \chi^2 -8\chi-4 = 0 \Rightarrow \Delta= 64+16=80$$

$$\chi_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{80}}{2}$$

Βήμα 5^{Ο} : Δεχόμαστε και τις δυο λύσεις γιατί επαληθεύουν τους περιορισμούς.

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ

Ερώτηση : Ποια είναι τα βήματα που ακολουθούμε για να λύσουμε μια εξίσωση με ριζικά ;

Με προσοχή ακολουθούμε τα εξής 5 βήματα:

Βήμα 1^{Ο} : Παίρνουμε περιορισμούς. Οι ποσότητες που είναι μέσα στις ρίζες πρέπει να είναι ≥ 0 για να ορίζονται οι ρίζες.

Βήμα 2^{Ο} : Απομονώνουμε το ριζικό.

Βήμα 3^{Ο} : Υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δυο μέλη της εξίσωσης.

Βήμα 4^{Ο} : Μετά από πράξεις καταλήγουμε σε εξίσωση 1^{ΟΥ} ή 2^{ΟΥ} βαθμού που λύνουμε με γνωστούς τρόπους.

Βήμα 5^{Ο} : Δεν ξεχνάμε να τσεκάρουμε τη λύση, με τους περιορισμούς. Αντικαθιστούμε την λύση που βρήκαμε στην αρχική εξίσωση για να δούμε αν την επαληθεύει. Δεχόμαστε αυτές που την επαληθεύουν.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{3x-2}=4$

Βήμα 1Ο : 3x-2 $\geq 0 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

Βήμα 2Ο - 3Ο - 4Ο :: $(\sqrt{3x-2})^2 = 4^2 \Rightarrow 3x-2 = 16 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$.

Βήμα 5Ο : $\sqrt{3\cdot 6-2}=\sqrt{18-2}=\sqrt{16}=4$. Δεκτή η x = 6 (επαληθεύει και τον περιορισμό).

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Έστω P (x) = $a_\nu \cdot x^\nu + a_{\nu-1}\cdot x^{\nu-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$. (με ακέραιους συντελεστές)

- Αν ρ είναι ρίζα του P (x) τότε μπορούμε να γράψουμε: P (x) = (x - ρ)· Π (x) όπου Π (x) πολυώνυμο βαθμού ν-1.

- Αν το P (x) έχει ρίζα ακέραιο τότε αυτή είναι διαιρέτης του $α_0$. Ενώ αν έχει ρίζα ρητό $\frac{\kappa}{\lambda}$, τότε ο κ είναι διαιρέτης του $α_0$ και ο λ διαιρέτης του $α_\nu$.
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P (x) με το α $\cdot x$ + β, α $\neq 0$ είναι το :
  Υ = P ($-\frac{\beta}{a}$). → (Άσκηση 2 Βιβλίου σελ. 73)
- Αν το P (x) διαιρείται δια του x-α και δια του x-β όπου α $\neq$ β τότε διαιρείται και με το γινόμενο (x-α) ·(x-β). → (Αποδείξτε το !)

- Για να λυθεί μια πολυωνυμική εξίσωση χρησιμοποιούμε :
  α) παραγοντοποίηση
  β) σχήμα Χορνερ
  γ) μετασχηματισμούς ή συνδυασμό των παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν P (x) = x^3-2x και Q (x) = x^2-3 x-1, να βρεθεί το πολυώνυμο P (x)-Q (x).

2. Να βρεθεί ο $\lambda \in \Re$ ώστε το πολυώνυμο P (x)=(λ+2) x^3-(λ^2+λ-2) x+λ^2-4, να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2+2x+5$. Να βρεθεί ο $\kappa\in\Re$ αν $P(\kappa-1)=13$.

4. Να βρεθούν οι πραγματικοί α, β, γ ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = 3x^2-7x+5$ και $Q(x) = \alpha x(x+1)+\beta x+\gamma$ να είναι ίσα.

5. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ ώστε το πολυώνυμο :
$P(x)=(2\alpha+1)x^2+(3\beta-1)x+2\gamma+\beta-\alpha$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

6. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$ ο βαθμός του πολυωνύμου
$P(x)=(\lambda^4-8\lambda)x^4+(4-\lambda^2)x^2+(\lambda+2)x+\lambda$.

7. Να βρεθούν τα κ, $\lambda\in\Re$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3+\kappa x^2+(\lambda-2)x+6$ να έχει ρίζες το $x=-1$ και $x=2$.

8. Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει :
$(2\chi+1)\cdot P(x)=2x^3-9x^2-3x+1$ για κάθε $x\in\Re$.

9. Να γίνουν οι διαιρέσεις :
ι) $(x^4-7x^3+2x-15):(x^2+5)$ ιι) $(x^6-3x^5-x^4+2x^3-x+1):(x^3+x-1)$

10. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):Q(x)$ όπου :
$P(x) = 2000x^{2000}+1999x^{1999}+1998x^{1998}+1997x^{1997}$ και $Q(x) = x+1$.

11. Να βρεθεί ο $\kappa\in\Re$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(\kappa-2)x^3-2\kappa x^2-x+\kappa$ να έχει παράγοντα τον $x-2$.

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4-5x^3+8x^2-7x+3$. Να δειχθεί ότι το $P(x)$ έχει παράγοντες τους $x-1$ και $x-3$.

13. Να δειχθεί ότι το $Q(x)= x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου :
$P(x) = x^{2\nu+1}-(2\nu+1)x^{\nu+2}+(2\nu+1)x^{\nu+1}-1$.

14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3+\lambda x^2-20x+6$, $\lambda\in\Re$. Να βρεθεί ο λ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-3$.

15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-3)^{\kappa}+(x-2)^{\lambda}-1$, κ, $\lambda\in\aleph-\{0\}$. Να δείξετε ότι το $x-3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

16. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3+\lambda x^2+23x-15$, $\lambda\in\Re$ έχει ρίζα τον αριθμό $\rho=1$, να βρεθούν οι άλλες ρίζες του.

17. Το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-\beta x^2-5x+4$ διαιρούμενο με το $x+2$ δίνει υπόλοιπο 6, διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο 2. Να βρεθούν τα α, $\beta\in\Re$.

18. Να βρεθεί το $P(x)$ βαθμού 2^{ου} το οποίο διαιρείται με το $Q(x)= x-1$ και ικανοποιεί τις συνθήκες : $P(1)+P(-1) = P(0)$ και $P(0) = 6$.

19. Να βρεθεί ο $κ \in \Re$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$:Q (x) να είναι -1 όπου: $P(x) = x^3 - 2κx^2 + (κ-2)x + κ^2$ και Q (x)= x-κ.

20. Να γίνει η διαίρεση $P(x)$:Q (x) όπου : $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + κx + λ$, κ, $λ \in \Re$ και Q (x)= $x^2 - 2x + 3$. Να βρεθούν τα κ, λ ώστε η διαίρεση να είναι τέλεια.

21. Πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το Q (x)= $x^2 - 4x + 3$ και δίνει υπόλοιπο $υ(x) = 3x - 5$. Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x)$: $(x-1)$ και $P(x)$: $(x-3)$.

22. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $x-1$ και με το $x-2$ και δίνει υπόλοιπο 2 και -3 αντίστοιχα. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x^2 - 3x + 2)$.

23. Να λυθούν οι εξισώσεις :

ι) $x^3 + 4x^2 - 8x + 24 = 0$

ιι) $x^4 - 4x^3 + 12x - 9 = 0$

ιιι) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$

ιv) $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$

24. Να λυθούν οι ανισώσεις :

ι) $3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 > 0$

ιι) $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 < 0$

ιιι) $4x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + < 0$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γρ. παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x\,x'$.

26. Να βρεθεί ο $κ \in \Re$ ώστε η εξίσωση : $3x^3 - 2κx^2 + 4κx - 5 = 0$, να έχει ρίζα τον αριθμό ρ= 3.

27. Να βρεθούν τα α, $β \in \Re$ ώστε η εξίσωση : $αx^3 + 2x^2 - βx + 4 = 0$, να έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 2.

28. Να βρεθούν αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων : $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ και $g(x) = \frac{9}{x}$, $x \in \Re - \{0\}$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Να βρεθούν τα διαστήματα τα οποία η $f(x)$ είναι πάνω από τον $x\,x'$.

30. Να λυθούν οι εξισώσεις :

ι) $\frac{x^2}{5} = \frac{45}{x^2 - 16}$

ιι) $\frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{x}{x^2 + 2}$

ιιι) $x^6 + 5x^3 - 24 = 0$

ιv) $\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 2x - 3$

31. Ομοίως οι εξισώσεις :

ι) $\dfrac{x-8}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 6$ ιι) $\sqrt{x+32} = 16 - \sqrt{x}$

ιιι) $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x-10}$

32. Αν για το πολυώνυμο P (x) = $a_\nu \cdot x^\nu + a_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ με ακέραιους συντελεστές γνωρίζουμε ότι : P (0) =13 και P (1) =2004, να υπολογιστεί :

ι) ο σταθερός όρος

ιι) το άθροισμα : $α_\nu + a_{\nu-1} + ... + a_1$

ιιι) ένας συμμαθητής σου ισχυρίστηκε ότι : P (2)•P (7)•P (21) = 0 είναι σωστός ο ισχυρισμός του ;

[Ένθετο 'Παιδεία' 2003]

33. Αν τα πολυώνυμα P (x) = αx^3+2x+9 , Q (x)= βx^4 -γx^2 +x+11 έχουν κοινή ακέραια αρνητική ρίζα ενώ η διαίρεση του Q (x) με το x+2 δίνει υπόλοιπο -127 τότε :

ι) να βρείς την κοινή ακέραια αρνητική ρίζα

ιι) να υπολογιστούν τα α, β ,γ

ιιι) για ποια x η γραφική παράσταση του P(x) βρίσκεται πάνω από τον $x\,x'$.

[Ένθετο 'Παιδεία' 2003]

34. Το πολυώνυμο P (x) = x^3-2x^2 +x+1 διαιρούμενο με το αx+β δίνει υπόλοιπο 1 και η γρ. παράσταση του αx+β τέμνει την ευθεία ψ = 3 στο σημείο Μ (2, 3) τότε :

ι) να βρεθούν τα α, β $\in$ Z -{0}

ιι) να γίνει η ευκλείδεια διαίρεση P (x) : (αx+β)

[Ένθετο 'Παιδεία' 2003]

35. α) Ποιο πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού πρέπει να προσθέσουμε στο P (x) = x^4 +3x^3- 6x^2 +2x-7 ώστε να προκύψει πολυώνυμο Q (x) τέτοιο ώστε να έχει παράγοντα x^2 +4.

β) Αποδείξτε ότι το Q (x) έχει παράγοντα το x-2.

[Ένθετο 'Παιδεία' 2002]

36. Έστω το πολυώνυμο f (x) = 3x το οποίο διαιρεί τα πολυώνυμα :
P (x) = x^3+αx^2 +βx+γ και Q (x)= P (-1)x^3 +P (0)x^2 +P (1)x+P (2).
Αν δυο ρίζες του P (x) είναι αριθμοί αντίθετοι μεταξύ τους και η καθεμία διπλάσια μιας ρίζας του Q (x), τότε να βρείτε :

α) τις ρίζες των P (x) , Q (x).

β) τα πολυώνυμα P (x) , Q (x).

[Ένθετο 'Ο υποψήφιος' 2001]

37. Δίνονται τα πολυώνυμα f (x) = x^2 -3x+2 και P (x) = $(x-1)^{3\nu} + (x-2)^\nu - 1$. Να βρείτε τις τιμές του ν$\in \aleph$ -{0} για τις οποίες οι ρίζες του f (x) είναι και ρίζες του P (x).

[Ένθετο 'Ο υποψήφιος' 2001]

38. Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης κάθε μονάδας ενός προϊόντος συναρτήσει του πλήθους x μονάδων παραγωγής σύμφωνα με τον τύπο :
$\Pi(x) = 34+43x+12x^2$ €. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής μιας μονάδας ενός προϊόντος είναι $K(x) = x^3$€. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 4 € για κάθε μονάδα προϊόντος τότε :

α) να γράψετε τη συνάρτηση που εκφράζει το κέρδος $P(x)$ της βιομηχανίας συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής και να βρείτε το κέρδος από την πώληση 2 μονάδων του προϊόντος .

β) να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε η είσπραξη να είναι μεγαλύτερη του κόστους.

[Ένθετο ‘Ο υποψήφιος’ 2001]

39. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-4x+4$.

α) να αποδείξετε ότι το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.
β) να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.
γ) να λύσετε την εξίσωση $x^3+4 = x^2+4x$
δ) να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

[Πανελλήνιες Εξετάσεις 1999]

40. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3-3x^2+2x-6$.

α) να βρείτε την τιμή του για $x=3$
β) να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$.
γ) να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$.

[Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2000]

41. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3+2x^2-x-\lambda$ για το οποίο ισχύει $P(1)=0$.

α) να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.
β) να γραφεί στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

Μια ρίζα του $P(x)$ είναι η :
Α: $x=0$ **Β:** $x=3$ **Γ:** $x=-2$ **Δ:** $x=2$ **Ε:** $x=-3$.
γ) να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$.

[Πανελλήνιες Εξετάσεις 2000]

42. Δίνεται το $P(x)=\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$ όπου $\alpha, \beta \in \Re$.

α) αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με 2 τότε να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$.
β) για τις τιμές που βρήκατε να λύσετε την $P(x)=0$

[Πανελλήνιες Εξετάσεις 2000]

43. Δίνεται το $P(x) = x^3-x^2+3x-3$.

α) να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$
β) να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$
γ) να λυθεί η $P(x) = 0$.

[Πανελλήνιες Εξετάσεις 2001]

44. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
α) να βρείτε την αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -1$.
β) να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.
γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.
[Πανελλήνιες Εξετάσεις 2002]

45. Δίνεται το $P(x) = \kappa x^3 - (\kappa+\lambda) x^2 + \lambda x + 1$.
α) αν $P(-\frac{1}{2}) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.
β) αφού αντικαταστήσετε τις τιμές που βρήκατε στο πολυώνυμο να κάνετε την διαίρεση $P(x) : (2x+1)$ και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης.
γ) να λύσετε την $P(x) > 7$ για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.
[Πανελλήνιες Εξετάσεις 2002]

46. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού για το οποίο ισχύει η σχέση :

$$(x-\pi)\cdot P(\sigma\upsilon\nu\, x) - 2x\cdot P(\eta\mu x) = x - 2\pi, \text{ για κάθε } x \in \Re .$$

α) να υπολογιστούν τα $P(0)$, $P(1)$.
β) να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x$.
γ) αν το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης είναι το $3x-1$ να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 3x^2 - x$.

47. Δίνονται τα πολυώνυμα :
$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + x + 2$, $Q(x) = \beta x^2 + \gamma x + 1$,
$K(x) = x^3 + (2\beta+\gamma) x^2 - 10x + 4\beta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ και $x \in \Re$.
Το $P(x)$ έχει ρίζα το -1, το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : (x-2)$ είναι 15 και η αριθμητική τιμή του $K(x)$ για $x=1$ είναι 6.
α) να αποδείξετε ότι: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$.
β) να λύσετε
ι) την εξίσωση : $P(x) = Q(x)$
ιι) την ανίσωση : $P(x) < K(x)$
ιιι) την εξίσωση : $2\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 1 = 0$.

48. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 1,$$

όπου k πραγματικός αριθμός.

α) Για k=–3, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο (x–3) .

β) Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το πολυώνυμο P(x) έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

γ) Για k=0, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 . [Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων 2003]

49. Να βρεθεί το σύνολο τιμών του $\alpha \in \Re$, ώστε το πολυώνυμο :

Ρ (x) = $x^3 - \dfrac{(\sqrt{3}\cdot \eta\mu a - \sigma\upsilon\nu a)^2}{2}\cdot x^2 + x - 6$, να έχει παράγοντα τον x - 2.

50. Δίνεται το πολυώνυμο : Ρ (x) = $\sqrt{a-2}\cdot x^3 - 2ax^2 + 2\sqrt{a}\cdot x - \sqrt{a}$, με α $\in \Re$.
Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης : Ρ (x) : (x -1) ισούται με 2-2α , βρείτε :

ι) την τιμή του α και το υπόλοιπο της διαίρεσης.

ιι) να λύσετε την εξίσωση : Ρ (x) = - $\dfrac{5}{2}$,για την παραπάνω τιμή του α.

51. Αν ισχύει : Ρ (1-2· x) = 3·Ρ (x) + 8 και Ρ (1) = κ , για κάποιο πολυώνυμο Ρ (x), να βρεθεί η τιμή του κ ώστε : Ρ (-5) = 23.