ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Από προηγούμενες τάξεις γνωρίζουμε τις παρακάτω ιδιότητες :

1. $\alpha^1 = \alpha$

2. $\alpha^0 = 1$

3. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

4. $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

5. $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha.\beta)^\nu$

6. $\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = (\dfrac{\alpha}{\beta})^\nu$

7. $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$

8. $(\dfrac{\alpha}{\beta})^{-\nu} = (\dfrac{\beta}{\alpha})^\nu$

9. $(\alpha^\mu)^\nu = (\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\mu\nu}$

10. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, $\mu, \nu \in \aleph$.

ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ – ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω $f(x)$ συνάρτηση και Α το πεδίο ορισμού της.

- Η $f(x)$ καλείται <u>γνησίως αύξουσα</u> όταν για κάθε $x_1, x_2 \in$ Α ισχύει :

  αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ή ισοδύναμα
  αν $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- Η $f(x)$ καλείται <u>γνησίως αύξουσα</u> όταν για κάθε $x_1, x_2 \in$ Α ισχύει :

  αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ή ισοδύναμα
  αν $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ (1-1)

Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το Α καλείται ένα προς ένα όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in$ Α ισχύει :

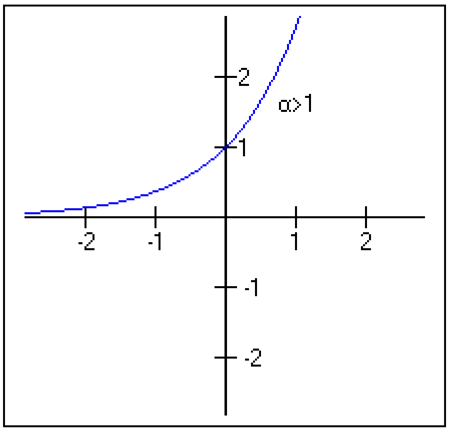
- αν $x_1 \neq x_2$, τότε $\Rightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα
- αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$.

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η συνάρτηση : $\mathbf{f(x) = α^{x}, α \neq 1}$ καλείται εκθετική. Η μορφή της αλλάζει ανάλογα με την τιμή που παίρνει η παράμετρος α. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

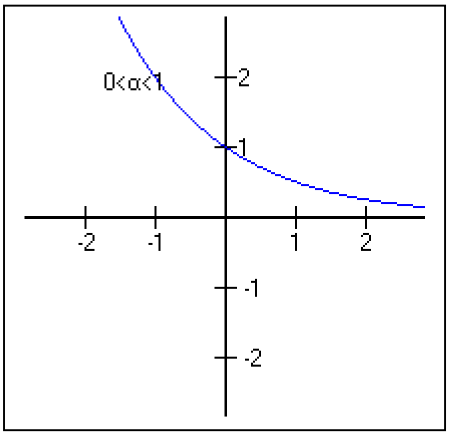
❖ **α > 1, τότε:**

- Πεδίο ορισμού : $\Re$
- Σύνολο τιμών : $(0, +\infty)$
- Γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- Έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Ox'.
- Τέμνει τον ψ ψ΄ στο σημείο (0,1)
- Είναι ‘1-1’ συνάρτηση.



❖ **0<α<1, τότε :**

- Πεδίο ορισμού : $\Re$
- Σύνολο Τιμών : $(0,+\infty)$
- Γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
- Έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα $x\,x'$.
- Τέμνει τον ψ ψ΄ στο (0,1).
- Είναι συνάρτηση ‘1-1’.



ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

1. Ορισμοί

Οι λογάριθμοι ορίζονται ως εξής :

ι) $α^{x} = \theta \Leftrightarrow x = \log_{a} \theta$ **(Λογάριθμοι με βάση τον αριθμό α)**

ιι) $10^{x} = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta$ **(Δεκαδικοί Λογάριθμοι)**

ιιι) $e^{x} = \theta \Leftrightarrow x = \ln \theta$ **(Λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e)**

2. Ιδιότητες

Για α, θ_1, θ_2, θ >0 και επίσης α ≠ 1 ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες λογαρίθμων :

α) $\log_a \alpha^x = x$

β) $\log_a 1 = 0$,

γ) $\log_a \alpha = 1$

δ) $\alpha^{\log_a \theta} = \theta$,

ε) $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

στ) $\log_a \theta^k = \kappa \cdot \log_a \theta$

ζ) $\log_a\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$

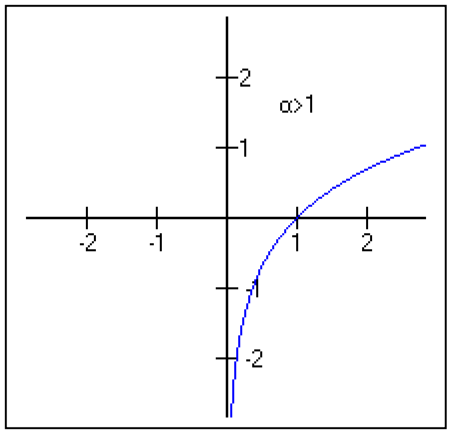
η) $\log_a \theta = \dfrac{\log_\beta \theta}{\log_\beta a}$, β>0

Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η συνάρτηση : $\mathbf{f}(x) = \log_a x$, **α ≠ 1,** καλείται λογαριθμική. Η μορφή της αλλάζει ανάλογα με την τιμή που παίρνει η παράμετρος α. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

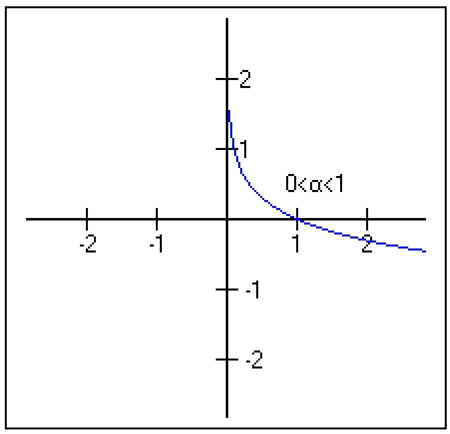
❖ **α > 1, τότε :**

- Πεδίο ορισμού : (0, + ∞)
- Σύνολο Τιμών : ℜ
- Γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.
- Έχει ασύμπτωτο τον Οψ΄.
- Τέμνει τον $x\ x'$ στο (1,0).
- Είναι συνάρτηση ‘1-1’



❖ **0<α<1, τότε:**

- Πεδίο ορισμού : (0, + ∞)
- Σύνολο Τιμών : ℜ
- Γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
- Έχει ασύμπτωτο τον Οψ.
- Τέμνει τον $x\ x'$ στο (1,0).
- Είναι συνάρτηση ‘1-1’.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Περίπτωση Ι : $\alpha^{f(x)} = \beta$

- Το β γράφεται σαν δύναμη του α, τότε :

$\alpha^{f(x)} = \beta \Rightarrow a^{f(x)} = a^{\kappa} \Rightarrow f(x) = \kappa$

Παράδειγμα 1^{ο} : Να λυθεί η εκθετική εξίσωση : $(\frac{1}{2})^{\chi} = 4$

Λύση

$(\frac{1}{2})^{\chi} = 4 \Rightarrow 2^{-\chi} = 4 \Rightarrow 2^{-\chi} = 2^{2} \Rightarrow -\chi = 2 \Rightarrow \chi = -2$

Παράδειγμα 2^{ο} : Να λυθεί η εκθετική εξίσωση : $32^{\chi} = 16^{1-\chi}$

Λύση

$32^{\chi} = 16^{1-\chi} \Rightarrow (2^{5})^{\chi} = (2^{4})^{1-\chi} \Rightarrow 2^{5\chi} = 2^{4(1-\chi)} \Rightarrow 2^{5\chi} = 2^{4-4\chi} \Rightarrow 5\chi = 4-4\chi \Rightarrow$

$9\chi = 4 \Rightarrow \chi = \frac{4}{9}$.

- Το β δεν γράφεται σαν δύναμη του α, τότε λογαριθμίζω :

$\alpha^{f(x)} = \beta \Rightarrow \log_{a} a^{f(x)} = \log_{a} \beta \Rightarrow f(x) \cdot \log_{a} a = \log_{a} \beta \Rightarrow f(x) = \log_{a} \beta$

Παράδειγμα : Να λυθεί η εκθετική εξίσωση : $5^{\chi} = 2^{1-\chi}$

Λύση

$5^{\chi} = 2^{1-\chi} \Rightarrow \log 5^{x} = \log 2^{1-x} \Rightarrow \chi \log 5 = (1-\chi) \log 2 \Rightarrow \chi(\log 5 + \log 2) = \log 2 \Rightarrow$

$\chi \log 10 = \log 2 \Rightarrow \chi = \log 2$

Περίπτωση ΙΙ : $\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}$

Εφαρμόζω την ίδια μεθοδολογία όπως στην Περίπτωση Ι.

Περίπτωση ΙΙΙ : $\kappa \cdot \alpha^{3 \cdot f(x)} + \lambda \cdot a^{2 \cdot f(x)} + \mu \cdot a^{f(x)} + \nu = 0$

Θέτω $\alpha^{f(x)} = \psi$ και μετατρέπω την εκθετική εξίσωση σε πολυωνυμική την οποία λύνω με τους τρόπους που έμαθα στο Κεφάλαιο 2 (σχήμα Χόρνερ).

Παράδειγμα : Να λυθεί : $2\cdot 4^{\chi} -5\cdot 2^{\chi} +2 = 0$

Λύση

$2\cdot 4^{\chi} -5\cdot 2^{\chi} +2 = 0 \Rightarrow 2\cdot(2^2)^{\chi} - 5\cdot 2^{\chi} + 2 = 0 \Rightarrow 2\cdot 2^{2\chi} - 5\cdot 2^{\chi} + 2 = 0$, θέτω $2^{\chi} = \omega$

Τότε η εξίσωση γίνεται : $2\cdot\omega^2 -5\omega +2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 4\cdot 2\cdot 2 = 9$, $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 1$

Τώρα θα λύσω τις εξισώσεις : $2^{\chi} =4 \Rightarrow 2^{\chi} = 2^2 \Rightarrow \chi = 2$
και $2^{\chi} = 1 \Rightarrow 2^{\chi} = 2^0 \Rightarrow \chi = 0$

<u>**Περίπτωση IV:**</u> Εκθετικές εξισώσεις με μορφή :

$$\begin{cases} \kappa\cdot a^x = \lambda\cdot\beta^x \\ \kappa\cdot a^{f(x)} = \lambda\cdot\beta^{f(x)} \\ \kappa\cdot a^{2x} + \lambda\cdot a^x\cdot\beta^x + \mu\cdot\beta^{2x} = 0 \end{cases}$$

, λύνονται με την αντικατάσταση :

$$(\frac{a}{\beta})^x = \psi \quad \text{ή} \quad (\frac{a}{\beta})^{f(x)} = \psi$$

και ανάγονται σε πολυωνυμικές εξισώσεις.

Παράδειγμα : Να λυθεί : $21\cdot 3^{\chi} + 5^{\chi+3} = 3^{\chi+4} + 5^{\chi+2}$

Λύση :

$21\cdot 3^{\chi} + 5^{\chi+3} = 3^{\chi+4} + 5^{\chi+2} \Rightarrow 21\cdot 3^{\chi} + 5^3\cdot 5^{\chi} = 3^4\cdot 3^{\chi} + 5^2\cdot 5^{\chi} \Rightarrow$ Διαιρώ με το 3^{χ} όλους

$21 + 125\cdot(\frac{5}{3})^{\chi} = 81 + 25\cdot(\frac{5}{3})^{\chi}$, θέτω $(\frac{5}{3})^{\chi} = \omega$ και η εξίσωση γίνεται :

$21 + 125\omega = 81 + 25\omega \Rightarrow 125\omega - 25\omega = 81 - 21 \Rightarrow 100\omega = 60 \Rightarrow \omega = \frac{3}{5}$

Άρα : $\omega = \frac{3}{5} \Rightarrow (\frac{5}{3})^{\chi} = \frac{3}{5} \Rightarrow (\frac{3}{5})^{-\chi} = \frac{3}{5} \Rightarrow -\chi = 1 \Rightarrow \chi = -1$.

<u>**Περίπτωση V :**</u> $f(x)^{g(x)} = 1$

Οι λύσεις της εξίσωσης προκύπτουν από τις : $f(x) = 1$ ή $\begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} f(x) = -1 \\ g(x)\text{αρτιος} \end{cases}$

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση : $(\chi^2-3\chi+1)^{3\chi-5} = 1$

Λύση : Είναι : $\chi^2-3\chi+1= 1 \Rightarrow \chi^2 -3\chi = 0 \Rightarrow \chi = 0$ ή $\chi = 3$ ή

$$\begin{cases} 3x-5=0 \\ x^2-3x+1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ x^2-3x+1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5}{3} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} x^2-3x+1=-1 \\ 3x-5 \text{αρτιος} \end{cases} \Rightarrow \chi = 1 \text{ , άρα οι λύσεις είναι : } 0 \text{ , } 1 \text{ , } \frac{5}{3} \text{ , } 3.$$

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Χρησιμοποιώντας κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους καταλήγουμε στη μορφή :

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \alpha\nu \ldots 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x), \alpha\nu \ldots a > 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 1^{ο} : Να λυθεί η ανίσωση : $7^{2\chi-4} > 7^{\chi+1}$

Λύση

$7^{2\chi-4} > 7^{\chi+1}$ $\Rightarrow$ (η 7^{χ} είναι γνησίως αύξουσα άρα) 2χ-4 > χ+1 $\Rightarrow$ χ > 5

Παράδειγμα 2^{ο} : Να λυθεί η ανίσωση : $(\frac{3}{5})^{2\chi-4} > (\frac{3}{5})^{\chi+1}$

Λύση

$(\frac{3}{5})^{2\chi-4} > (\frac{3}{5})^{\chi+1} \Rightarrow$ (η $(\frac{3}{5})^{\chi}$ είναι γνησίως φθίνουσα) 2χ-4 < χ+1 $\Rightarrow$ χ < 5

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια λογαριθμική εξίσωση προσπαθούμε με την βοήθεια των ιδιοτήτων να τη φέρουμε στη μορφή : $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ οπότε $f(x) = g(x)$. Δηλαδή την μετατρέπουμε σε μια από τις γνωστές εξισώσεις αλγεβρικής μορφής.

ΠΡΟΣΟΧΗ !! στους περιορισμούς. <u>Πρέπει όλες οι παραστάσεις των λογαρίθμων να είναι θετικές. Δηλαδή πρέπει να συναληθεύουν οι περιορισμοί</u>

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση : log (3· x -1) = log(4· x -1)

Λύση

Περιορισμοί είναι : $\begin{cases} 3x-1>0 \\ 4x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x>\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$, 3χ-1 = 4χ -1 $\Rightarrow$ χ = 0 Αδύνατη

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Σκοπός μας είναι να τις φέρουμε στη μορφή : $\log_a \mathrm{f}(x) >$ ή $< \log_a g(x)$. Γνωρίζοντας ότι οι συναρτήσεις : $\log \mathrm{f}(x)$, και $\ln \mathrm{f}(x)$, είναι γνησίως αύξουσες έχουμε :

$$\log \mathrm{f}(x) > \log g(x) \Rightarrow \mathrm{f}(x) > g(x) \text{ ή } \ln \mathrm{f}(x) > \ln g(x) \Rightarrow \mathrm{f}(x) > g(x).$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !! Δεν ξεχνάμε τους περιορισμούς .

ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Συστήματα της μορφής : $\begin{cases} \kappa \cdot a^x + \lambda \cdot \beta^\psi = \mu \\ \delta \cdot a^x + \gamma \cdot \beta^\psi = \pi \end{cases}$, λύνονται με την αντικατάσταση :

$\alpha^x = x$ και $\beta^\psi = \psi$, και το σύστημα έρχεται στην μορφή που έχουμε γνωρίσει σε προηγούμενες τάξεις και λύνεται αναλόγως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \Re$, η συνάρτηση : $\mathrm{f}(x) = (\frac{1-a}{a-5})^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$;

2. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \Re$, η συνάρτηση $\mathrm{f}(x) = (\frac{3-2a}{a-3})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στον $\Re$;

3. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \Re$, η συνάρτηση $\mathrm{f}(x) = (\frac{a^2-7}{a-1})^x$ είναι σταθερή συνάρτηση ;

4. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \Re$, η συνάρτηση $\mathrm{f}(x) = (1-\frac{2}{a})^x$ είναι ‘1-1 ’ ;

5. Να εξεταστούν αν είναι ‘1-1’ οι συναρτήσεις με τύπο :

α) $\mathrm{f}(x) = 2^{5-x^3}$ β) $\mathrm{f}(x) = 2^{x^2-6x}$

6. Να βρεθεί ο $\alpha \in \Re$, αν η συνάρτηση $\mathrm{f}(x) = (\frac{a-1}{a})^x$ έχει ως ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x.

7. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $\mathrm{f}(x) = \log_x \frac{x+3}{2-x}$ β) $g(x) = \log(5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5)$

8. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \log(3- x - \sqrt{x-1})$ β) $g(x) = \log(\sqrt{x+2} + 4 - x)$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπο : $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ και $g(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$, όπου α>0 και $α \neq 1$, να αποδείξετε ότι :

α) η $f(x)$ είναι άρτια.

β) η $g(x)$ είναι περιττή.

10. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \log_{\frac{a}{1-a}}(x+2)$, για ποιες τιμές του α η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ;

11. Δίνεται η συνάρτηση : $g(x) = \log_{\frac{a-1}{a}}(2x-1)$, για ποιες τιμές του α η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα ;

12. Να εξεταστούν αν είναι 1-1 οι συναρτήσεις.

α) $f(x) = \log\dfrac{1-x}{x}$ β) $g(x) = \log\dfrac{x^2-1}{x}$

13. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\log\dfrac{a-x}{a+x}$. Εξετάστε αν η $f(x)$ είναι άρτια ή περιττή.

14. Έστω η συνάρτηση : $g(x) = \dfrac{6^x}{4^x + 9^x}$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) να αποδείξετε ότι είναι άρτια .

15. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις :

α) $f(x) = 2^{x+1}$ β) $f(x) = 2^x - 3$

γ) $f(x) = 2^x + 3$ δ) $f(x) = 2^{x+1} - 5$

16. Ομοίως για τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = \log(x-3)$ β) $g(x) = \ln x + 2$

γ) $κ(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ δ) $λ(x) = \log\dfrac{x-3}{10}$

17. Να λυθούν οι ανισώσεις :

α) $5^{x-2} < 1$ β) $4^{3x+1} > 32$

γ) $3^{x+1} + 9 > 30 \cdot 3^x$ δ) $27^{4x} < 9^{x+1}$

ε) $2 \cdot 4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 4 > 0$ στ) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} < 3^{x+4} - 5^{x+3}$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $27^{\frac{x+1}{x-2}} = 3^{2x-4}$ β) $3^{x+2} = (\frac{1}{9})^{\frac{1}{x}}$

γ) $8 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$ δ) $2 \cdot 4^x + 5 \cdot 25^x = 7 \cdot 10^x$

ε) $5^2 \cdot 5^4 \cdots 5^{2x} = 5^{56}$ στ) $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$

19. Ομοίως οι εξισώσεις :

α) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ β) $2^{x^2-4x} = 8^{x-4}$

γ) $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$ δ) $1+2+2^2+......+2^x = 2047$

ε) $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$.

20. Να αποδείξετε ότι :

α) $10^{3\log 2 + \log 5 - 1} = 4$ β) $100^{1-\frac{1}{4}\log 25} = 20$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $x^{\log_3 5} = 5^{\log_x 3}$ β) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$

22. Να αποδείξετε ότι :

α) $3 \cdot \log_3 2 + 2 \cdot \log_3 6 - \log_3 32 = 2$

β) $2 + 3 \cdot \log_5 2 - 2 \cdot \log_5 10 = \log_5 2$

23. Να λυθούν οι λογαριθμικές εξισώσεις :

α) $\log x^2 + \dfrac{2}{\log\sqrt{x}} = 6$ β) $\log_x 256 = 3 + (\log_x 4)^2$

γ) $\log[\log(\log(x-1))] = 0$

24. Ομοίως οι εξισώσεις :

α) $\log(x^3+1) - \log(x^2-3x+2) = \log(x^2-x+1)$

β) $\log(3x-1) + \log(8x-2) = 2 \cdot \log(4x-1)$

γ) $6 \cdot (\log x+1)^2 + 6 \cdot (\log x)^2 = 13 \cdot \log x \cdot (\log x+1)$

25. Να λυθούν οι λογαριθμικές ανισώσεις :

α) $\log(x+1) - \log(x-1) > \log 2$ β) $\log_{\frac{1}{2}} x^2 > (\log_{\frac{1}{2}} x)^2$

γ) $\log(\log\dfrac{3x+3}{x-6}) < 0$ δ) $\log(3 \cdot 9^x + 2 \cdot 12^x) \geq 2x$

26. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\log(x-1) - \log(x-2) = 2$

β) $e^x + e^{1-x} = e+1$

γ) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

27. Να λυθούν οι λογαριθμικές ανισώσεις :

α) $\log_2(x^2-3) > 1 + \log_2 x$ β) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)$

γ) $\log(3 \cdot 9^x + 2 \cdot 4^x) > \log 5 + x \cdot \log 6$

28. Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases} 3^x + 4^\psi = 13 \\ 9^x - 16^\psi = 65 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3^x - 2^{\psi+3} = 49 \\ 2^\psi - 3^{x-3} = 1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 3^x - 2^\psi = 23 \\ 3^x - 2^{3-\psi} = 25 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 5^x - 4^{\psi+1} = 9 \\ 5^{x-1} + 4^{\psi+2} = 69 \end{cases}$

29. Ομοίως τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x + \psi = 29 \\ \log x + \log \psi = 2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \log x - \log \psi = 1 \\ \log x^2 + \log \psi^2 = \log 32 \end{cases}$

30. Η αξία ενός προϊόντος σε t μήνες από σήμερα δίνεται από τη συνάρτηση :

$f(t) = \log(9 \cdot 10^t + 1) - t$, χιλιάδες €.

α) ποια η σημερινή αξία του προϊόντος ;

β) να βρείτε σε πόσους μήνες από σήμερα η αξία του είναι $\log\frac{901}{100}$ χιλιάδες €.

31. **α)** Να συμπληρώσετε στο γραπτό σας τα παρακάτω κενά :

lne = ……………. ln1=………………….

$10^{\log\theta}$ =……….. logθ=$\frac{\ln\theta}{.......}$, θ>0

$\ln\frac{1}{x}$ =………….. ln0=…………

β) έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\frac{2x}{x+1})$.

ι) να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ιι) να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

32. Δίνεται η εξίσωση :

$(\log x)^3 = \log(\frac{x^3}{10^k})$, κ∈ ℜ (1) , έχει λύση τη $x = 10$

α) να βρείτε το κ.

β) να λύσετε την εξίσωση (1).

33. Ο πληθυσμός μιας κοινωνίας βακτηριδίων σε t ώρες δίνεται από τον τύπο :

$P(t) = A + \mathrm{B} \cdot (1 - 2^{-\frac{t}{4}})$, χιλιάδες βακτηρίδια

Δίνεται ότι ο παραπάνω πληθυσμός τώρα είναι 10 χιλιάδες ενώ σε 4 ώρες είναι 12 χιλιάδες.

α) να βρείτε τα Α, Β.

β) σε πόσες ώρες ο πληθυσμός θα είναι 13 χιλιάδες ;

γ) στον παραπάνω πληθυσμό και σε 4 ώρες ρίχνεται μια τοξική ουσία, ώστε ο πληθυσμός αυτός σε t≥ 4 ώρες να δίνεται από τον τύπο :

$Q(t) = c - \frac{t^2}{32}$ χιλιάδες μικρόβια, όπου c ∈ ℜ

ι) να βρείτε το c.
ιι) σε πόσες ώρες τουλάχιστον ο παραπάνω πληθυσμός θα αφανιστεί ;

34. **α)** Αν log2 =α και log3 = β, τότε να υπολογιστούν συναρτήσει των α , β τα :

ι) log5 =………….. ιι) log15 =……………..

ιιι) log54 =………… ιν) $\log\sqrt[3]{24}$ =…………

β) να λύσετε την εξίσωση :

$$\log(\eta\mu^2 x)+\log(\sigma\upsilon\nu^2 x) = -4\cdot\log2,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

35. Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$\ln Q(t) = \alpha t + \beta, \quad t \geq 0$$

όπου α, β $\in\mathbb{R}$, τότε:

α) να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}, \quad t \geq 0$,

β) να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με 1/16 της αρχικής του τιμής,

γ) να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής του τιμής.

[Εξετάσεις Ενιαίων Λυκείων 2001]

36. Σε μια πόλη 10 χιλιάδων κατοίκων εμφανίζεται μια μεταδοτική γρίπη , για πρώτη φορά, ανάμεσα στους κατοίκους της, ώστε t μήνες μετά να προσβάλλονται από αυτή : $N(t) = 10\cdot[1-(\frac{4}{5})^t]$, χιλιάδες κάτοικοι.

α) να αποδείξετε ότι το πλήθος των κατοίκων εξαιτίας της γρίπης συνεχώς αυξάνεται.

β) σε πόσους μήνες το πλήθος $N(t)$ θα είναι το 20 % του αρχικού πληθυσμού;

37. Έστω α >0 και η εξίσωση :

$$4x^2-4(1+2\log a)x+9=0$$

που έχει πραγματικές ρίζες. Να βρείτε τον α $\in\Re$.

38. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = (\frac{a-1}{5})^x$.

α) να βρείτε τον α $\in\Re$, για τις οποίες η $f(x)$ ορίζεται σε όλο το $\Re$.

β) να βρείτε τον α $\in\Re$, για τις οποίες η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) εάν α =11 να λύσετε την : $f(x)+f(x+1) = 6$.

[Εξετάσεις 2002]

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2ln2.

γ) Να λύσετε την ανίσωση f(x) > 0.

[Πανελλήνιες Εξετάσεις 2002]

40. Δίνεται η συνάρτηση : $g(x) = \ln(\frac{3-x}{3+x})$.

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

β) να αποδείξετε ότι η $g(x)$ είναι περιττή συνάρτηση.

γ) να λύσετε την εξίσωση : $g(x) + g(x+1) = 0$.

[Πανελλήνιες Εξετάσεις 2002]

41. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \ln(\frac{e-x}{e+x})$.

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

γ) να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + f(x+1) = 0$.

42. Έστω P(t) η τιμή ενός προϊόντος σε €, όπου τ ο χρόνος σε έτη κυκλοφορίας του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 1 €, ενώ έπειτα από 12 μήνες μειώθηκε στο μισό της αρχικής.

Αν ισχύει ότι $\ln P(t) = \alpha \cdot t^2 + \beta$, $t \geq 0$, α, β $\in \Re$, τότε:

α) να δείξετε ότι $P(t) = (\frac{1}{2})^{t^2}$, $t \geq 0$

β) να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος είναι ίση με το 1/16 της αρχικής τιμής του.

43. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \frac{1}{1+\log x} + \frac{1}{1-\log x}$.

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

β) να αποδειχθεί ότι $f(x) = f(\frac{1}{x})$.

γ) να λύσετε την ανίσωση : $f(x) + f(\frac{1}{x}) > 4$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

α) να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + f(-x) = \ln\frac{16}{3}$.

45. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) να αποδείξετε ότι είναι άρτια.

γ) να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο π.

δ) να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

46. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$.

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) να δείξετε ότι : $f(\ln 4) < f(\ln 5)$

γ) να λύσετε την ανίσωση : $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$.

[Ένθετο « Ο υποψήφιος » 2003]

47. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \log(1+e^x)$- α- β x
όπου α, β $\in \Re$, με $f(0)= f(1)=0$.

α) να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το $\Re$.

β) να βρείτε τις τιμές των α, β .

γ) να δείξετε ότι : $f(x) = \log\left(\frac{1+e^x}{(1+e)^x} \cdot 2^{x-1}\right)$.

δ) να λύσετε την ανίσωση : $\log\left[(1+e^x)\cdot 2^{x-1}\right] - f(x) \leq x$.

48. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α) να βρείτε τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

β) να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = g(x)$.

γ) να λύσετε την ανίσωση : $f(x) > 2\cdot g(x)$.

[Πανελλήνιες Εξετάσεις 2003]

49. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(2e^{2x+1} + e^{x+1})$

α) να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να δειχθεί ότι το γράφημα της τέμνει τον ψψ΄ στο σημείο (0, 1+ ln3)

β) να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = 1$

γ) να βρεθούν τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία ψ = 1.