

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ	
$\alpha) \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ $\gamma) \epsilon\phi^2 x + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$	$\beta) \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $\delta) \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}, x \neq \kappa\pi.$
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ – ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΓΩΝΙΩΝ	
$\alpha) \eta\mu(\alpha \pm \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \pm \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ $\gamma) \sigma\upsilon\nu(\alpha \pm \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \mp \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ $\epsilon) \sigma\phi(\alpha \pm \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta \mp 1}{\sigma\phi\beta \pm \sigma\phi\alpha}$	$\beta) \epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$ $\delta) \epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α	
$\alpha) \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ $\gamma) \epsilon\phi 2\alpha = \frac{2 \cdot \epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}$	$\beta) \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\eta\mu^2\alpha \end{cases}$
ΤΥΠΟΙ ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ	
$\alpha) \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ $\gamma) \epsilon\phi^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}$	$\beta) \eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$
ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΤΥΠΟΙ	
$\alpha) \eta\mu 2\alpha = \frac{2 \cdot \epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha}$	$\beta) \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \epsilon\phi^2\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Γωνία x	ημ x	συν x	εφ x
0 ^ο	0	1	0
30 ^ο ή $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45 ^ο ή $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60 ^ο ή $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90 ^ο ή $\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται
180 ^ο ή 2π	0	-1	0

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- $\eta\mu x = \alpha$ ($-1 \leq \alpha \leq 1$ αλλιώς η εξίσωση είναι αδύνατη).

Βρίσκω γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \alpha$ τότε :

$$\eta\mu x = \alpha \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

- $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ ($-1 \leq \alpha \leq 1$). Βρίσκω γωνία θ ώστε $\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha$ και έχω :

$$\sigma\upsilon\nu x = \alpha \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

- $\epsilon\phi x = \alpha$, ($\alpha \in \mathfrak{R}$), ομοίως με πριν :

$$\epsilon\phi x = \alpha \Rightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Rightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ΤΥΠΟΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΑΚΤΙΝΙΩΝ ΣΕ ΜΟΙΡΕΣ

Ακτίσιο ονομάζουμε τη γωνία που όταν γίνει επίκεντρο κύκλου βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Η σχέση που συνδέει μοίρες και ακτίνα είναι :

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180^{\circ}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εκφραστεί :

ι) γωνία 75° σε ακτίνια,

υ) γωνία $\frac{2\pi}{5}$ rad σε μοίρες,

ιι) γωνία 1 rad σε μοίρες,

ιιι) γωνία -15° σε rad.

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας :

ι) 1170° ιι) -2100° ιιι) 1990π rad ιιιι) $\frac{61\pi}{6}$ rad.

3. Αν $\eta\mu x = -\frac{4}{5}$, και $270^{\circ} < x < 360^{\circ}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

4. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{3}$ και $180^{\circ} < x < 270^{\circ}$, να βρεθούν οι άλλοι αριθμοί της γωνίας x rad.

5. Αν $\epsilon\phi x = -\sqrt{2}$ και $90^{\circ} < x < 180^{\circ}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

6. Αν $90^{\circ} < x < 180^{\circ}$ και ισχύει : $9 \cdot \eta\mu x = 8 \cdot (1 - \eta\mu x)$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

7. Αν $\epsilon\phi x = 2 \cdot \sqrt{2}$ και $90^{\circ} < x < 180^{\circ}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{1 + 6\sqrt{2}\eta\mu x}{2\sqrt{2}\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x}$$

8. Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = a$, να υπολογίσετε με τη βοήθεια του a (συναρτήσει του a) τις παραστάσεις :

ι) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ιι) $\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$.

9. Δείξτε ότι ισχύει :

ι) $(\epsilon\phi x + \sigma\phi x)^2 = \frac{1}{\eta\mu^2 x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ιι) $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 \psi = \eta\mu^2 \psi - \eta\mu^2 x$

ιιι) $(\epsilon\phi x - \eta\mu x)^2 + (1 - \sigma\upsilon\nu x)^2 = \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1\right)^2$ ιιιι) $\epsilon\phi x + \sigma\phi x = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$.

10. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

ι) 495°

ιι) -1680° .

11. Αν $\eta\mu 17^\circ = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 73° .

12. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, δείξτε ότι :

$$\text{ι) } \varepsilon\phi A + \varepsilon\phi(B+\Gamma) = 0$$

$$\text{ii) } \varepsilon\phi \frac{A}{2} \cdot \varepsilon\phi \frac{B+\Gamma}{2} = 1$$

$$\text{iii) } \varepsilon\phi A + \varepsilon\phi B + \varepsilon\phi \Gamma = \varepsilon\phi A \cdot \varepsilon\phi B \cdot \varepsilon\phi \Gamma$$

$$\text{iv) } \sigma\phi A + \sigma\phi(B+\Gamma) = 0$$

$$\text{v) } \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B+\Gamma}{2} = 1$$

$$\text{vi) } \sigma\phi A \cdot \sigma\phi B + \sigma\phi B \cdot \sigma\phi \Gamma + \sigma\phi \Gamma \cdot \sigma\phi A = 1$$

$$\text{vii) } \sigma\phi \frac{A}{2} + \sigma\phi \frac{B}{2} + \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} = \sigma\phi \frac{A}{2} \cdot \sigma\phi \frac{B}{2} \cdot \sigma\phi \frac{\Gamma}{2}$$

13. Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$A = \frac{\eta\mu(2\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) \cdot \varepsilon\phi(\pi + \omega) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \omega)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \cdot \eta\mu(\pi + \omega) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right)}$$

14. Δείξτε ότι :

$$\text{ι) } \varepsilon\phi 41^\circ \cdot \varepsilon\phi 42^\circ \cdots \varepsilon\phi 48^\circ \cdot \varepsilon\phi 49^\circ = 1 \quad \text{ii) } \varepsilon\phi 1^\circ \cdot \varepsilon\phi 91^\circ \cdot \varepsilon\phi 2^\circ \cdot \varepsilon\phi 92^\circ = 1$$

15. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, επίσης να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης καθώς και την περίοδο τους :

$$\text{ι) } f(x) = 4\eta\mu x \quad \text{ii) } g(x) = -3\eta\mu x \quad \text{iii) } \psi(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x$$

$$\text{iv) } g(x) = \eta\mu(-2x) \quad \text{v) } f(x) = \sigma\upsilon\nu(-4x) \quad \text{vi) } \psi(x) = 4 \cdot \eta\mu \frac{x}{3}$$

$$\text{vii) } \kappa(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \quad \text{viii) } \lambda(x) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$$

16. Η τάση ρεύματος στην Αθήνα είναι της μορφής : $T = 220 \cdot \eta\mu \frac{t}{2}$, όπου t ο χρόνος

σε δευτερόλεπτα και T η τάση σε Βολτ.

ι) Να βρείτε τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη και ελάχιστη τάση.

ii) Να βρείτε τη περίοδο της τάσης.

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 4\pi$.

17. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{ι) } \eta\mu x = 1$$

$$\text{ii) } \eta\mu x = 0$$

$$\text{iii) } \eta\mu x = -1$$

$$\text{iv) } 2\eta\mu x = -\sqrt{2}$$

$$\text{v) } 2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{vi) } \sqrt{3} \varepsilon\phi x + 3 = 0$$

18. Ομοίως :

$$ι) (\sin x - 1) \cdot (2\eta\mu x + \sqrt{2}) = 0 \quad υ) \eta\mu x \cdot (\sin x - 1) = 0$$

$$ιι) \eta\mu 2x = \eta\mu(x - \frac{\pi}{4}) \quad ιιι) \sin(4x + \pi) = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$$

$$ιιι) \sin x + \sin 2x = 0 \quad ιιιι) \eta\mu 3x = \sin(x - \frac{\pi}{3})$$

19. Ομοίως :

$$ι) 2\sin 3x = \sqrt{3} \quad υ) \sin 2x = -\frac{1}{2} \quad ιι) \eta\mu(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{2}$$

$$ιιι) 2\eta\mu(3x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} = 0 \quad ιιιι) \epsilon\phi(x - \frac{\pi}{3}) + \epsilon\phi x = 0$$

20. Ομοίως :

$$ι) \sin 2\chi + \eta\mu\chi - 1 = 0 \quad υ) 2 - \eta\mu^2\chi = 2\eta\mu^2\frac{x}{2} \quad ιι) \sin 2\chi = \sin^2\chi$$

$$ιιι) \eta\mu 2\chi = 2\epsilon\phi\chi \quad ιιιι) \epsilon\phi(2x - \frac{\pi}{6}) = \sigma\phi x \quad ιιιιι) \eta\mu x + \sin\frac{5x}{2} = 0$$

$$ιιιιι) \epsilon\phi 3x + \sigma\phi\frac{5x}{2} = 0 \quad ιιιιιι) υ) \epsilon\phi 5x \cdot \sigma\phi 10x = 1$$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$ι) \frac{7\eta\mu x - 1}{15} + \frac{\eta\mu x - 1}{3} = \frac{3\eta\mu x - 1}{5} - \frac{7 + \eta\mu x}{10} \quad υ) 2\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x - 3 = 0$$

$$ιι) 2\sin^2 x + 1 = 5\eta\mu x \quad ιιι) 2 - \eta\mu^2 x = 5\eta\mu x - \sin^2 x$$

22. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης : $f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu(x + \frac{\pi}{3})$, $0 < x < 2\pi$ και τις τιμές του x για τις οποίες παρουσιάζονται.

23. Αν $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $270^\circ < \beta < 360^\circ$ και $\eta\mu\alpha = \frac{15}{17}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις : $\eta\mu(\alpha - \beta)$ και $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$.

24. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$ι) \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \eta\mu x \quad υ) \eta\mu 3x = \eta\mu x \cdot \sin 2x$$

25. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu x + \epsilon\phi\alpha \cdot \sin x = 1$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση :

$$3\eta\mu x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}.$$

26. Δείξτε ότι : $(\sin x - \eta\mu x) \cdot (\sin 2x - \eta\mu 2x) = \sin x - \eta\mu 3x$.

27. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, να αποδείξετε ότι : $\epsilon\phi 2\alpha + \epsilon\phi 2\beta + \epsilon\phi 2\gamma = \epsilon\phi 2\alpha \cdot \epsilon\phi 2\beta \cdot \epsilon\phi 2\gamma$.

28. Αν $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ και $90^\circ < x < 180^\circ$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων $2x$ και $3x$.

29. Αν $\epsilon\phi 2x = -\frac{3}{4}$ και $0 < x < 90^\circ$, να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\epsilon\phi x$, $\eta\mu 2x$, $\sin 2x$.

30. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $\frac{\pi}{8}$ και του $\frac{\pi}{12}$.

31. Δείξτε ότι :

$$\text{ι) } \eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ιι) } \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ιιι) } \sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

$$\text{ιιιι) } \sin \frac{\pi}{15} \cdot \sin \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{3\pi}{15} \cdot \sin \frac{4\pi}{15} \cdot \sin \frac{5\pi}{15} \cdot \sin \frac{6\pi}{15} \cdot \sin \frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}$$

32. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω σχέσεις ως Σωστές ή Λάθος.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\sin x \cdot \sin 3x - \eta\mu 3x \cdot \eta\mu x = \sin 2x$ | Σ | Λ |
| 2. $\eta\mu \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ | Σ | Λ |
| 3. $2\eta\mu \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | Σ | Λ |
| 4. $1 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ | Σ | Λ |
| 5. $\eta\mu^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ | Σ | Λ |
| 6. $2\sin^2 \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{1}{2}$ | Σ | Λ |
| 7. $\frac{\epsilon\phi \frac{\pi}{3} + \epsilon\phi \frac{\pi}{4}}{1 - \epsilon\phi \frac{\pi}{3} \cdot \epsilon\phi \frac{\pi}{4}} = \epsilon\phi \frac{7\pi}{12}$ | Σ | Λ |

33. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$ι) \sin 55^\circ \cdot \sin 10^\circ + \eta\mu 55^\circ \cdot \eta\mu 10^\circ$$

$$υ) 2\sin^2 15^\circ - 1$$

$$ιι) \eta\mu 15^\circ \cdot \sin 15^\circ$$

$$ιιι) \frac{\varepsilon\phi 20^\circ + \varepsilon\phi 25^\circ}{1 - \varepsilon\phi 20^\circ \cdot \varepsilon\phi 25^\circ}$$

$$ιιι) \sin 98^\circ \cdot \eta\mu 8^\circ - \eta\mu 98^\circ \cdot \sin 8^\circ$$

$$ιιιι) \eta\mu \frac{\pi}{20} \cdot \sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{20} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{5}$$

$$ιιιι) \frac{\varepsilon\phi 80^\circ - \varepsilon\phi 20^\circ}{1 + \varepsilon\phi 80^\circ \cdot \varepsilon\phi 20^\circ}$$

$$ιιιιι) \frac{\varepsilon\phi \frac{\pi}{42} + \varepsilon\phi \frac{\pi}{7}}{1 - \varepsilon\phi \frac{\pi}{42} \cdot \varepsilon\phi \frac{\pi}{7}}$$

34. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$ι) 4\eta\mu^2 x - \sin 2x = 5$$

$$ιι) 4\sin^2 x + \sin 2x = 5$$

$$ιιι) \sin 2x + 2\eta\mu^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$ιιιι) \eta\mu 2x - 3\eta\mu x - 3\sin x + 1 = 0$$

35. α) Να αποδείξετε ότι : $\sin^2 x - \sin 2x = \eta\mu^2 x$.

β) Γράψτε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

Μια λύση της εξίσωσης : $\sin^2 x - \sin 2x = \frac{3}{4}$ είναι η :

$$Α: \frac{\pi}{3}$$

$$Β: 0$$

$$Γ: \frac{\pi}{6}$$

$$Δ: \frac{\pi}{2}$$

36. Για τη γωνία α ισχύει ότι : $5 \sin 2\alpha - 14 \sin \alpha - 7 = 0$.

α) να αποδείξετε ότι $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$

β) Αν επιπλέον ισχύει : $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς : $\eta\mu 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\varepsilon\phi 2\alpha$.

37. Έστω $P(x) = 4x^3 - 3x$, $x \in \mathcal{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι : $P(\sin \alpha) = \sin 3\alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $P(P(\sin x)) = \frac{1}{2}$.

38. Αν δίνεται ότι : $\varepsilon\phi 2\alpha = -\frac{4}{3}$ με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $\varepsilon\phi \alpha = 2$

β) να λύσετε την εξίσωση : $\varepsilon\phi(x+\alpha) = \varepsilon\phi x + 2$.

39. Έστω γωνία α° με $90 < \alpha < 180^\circ$, για την οποία ισχύει :

$$\sqrt{3} \cdot \sin(\alpha+30^\circ) + \eta\mu(\alpha+30^\circ) = -\frac{6}{5}$$

α) να αποδείξετε ότι : $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$

β) να βρείτε : ι) $\eta\mu 2\alpha$ ιι) $\epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$

γ) να λύσετε την εξίσωση : $\sin \alpha \cdot \sin(2x+\alpha) + \eta\mu \alpha \cdot \eta\mu(2x+\alpha) = \frac{1}{2}$.

40. Για κάθε πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$\sin x \cdot (\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = (\sin 2x + 4\sin x + 1) \cdot \eta\mu x$$

και να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$\sin 2x + \sin x + 1 = 0 \quad [\text{Πανελλήνιες Εξετάσεις 2003}]$$

41. Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu \beta = \frac{1}{2}$, τότε:

α) να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$ και $\sin 2\beta$,

β) να υπολογίσετε το $\sin(\alpha - \beta)$ και

γ) να αποδείξετε ότι $\sin(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

[Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων 2003]

42. Να βρείτε τις γωνίες ενός τριγώνου $ΑΒΓ$, αν δίνεται ότι ισχύει η σχέση :

$$3 + \sin 2A + \sin 2B + \sin 2\Gamma = 4 \cdot \sin B \cdot \sin \Gamma$$

43. Για τα τόξα $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ δίνεται ότι :

$$\sqrt{1 - \sin 2\alpha} + \sqrt{1 - \sin 2\beta} = \sqrt{1 + \sin 2\alpha},$$

Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu \alpha + \eta\mu \beta = \sin \alpha$

44. Έστω η συνάρτηση : $f(x) = (2\eta\mu x - \eta\mu 2x) \sin^2 \frac{x}{2}$, $x \in \mathfrak{R}$.

α) να αποδείξετε ότι : $f(x) = \eta\mu^3 x$.

β) να βρείτε την τιμή της παράστασης : $f(x) \cdot f(\frac{\pi}{2} - x)$.

γ) να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 3\sqrt{3} \cdot f(\frac{\pi}{2} - x)$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = (\kappa - \lambda) \cdot \sin[(\kappa + 3\lambda) \cdot x] \quad \text{και} \quad g(x) = (2\kappa - 3\lambda + 2) \cdot \sin[(2\kappa + \lambda + 5) \cdot x],$$

όπου κ, λ θετικοί αριθμοί. Να βρεθούν τα κ, λ ώστε οι παραπάνω συναρτήσεις να έχουν ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της $f(x)$ είναι διπλάσια της περιόδου της $g(x)$.

46. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

α) να αποδείξετε ότι : $f(x) = \eta\mu 2x$

β) να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{3} \cdot f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, στο $[0, \pi]$

47. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x$

α) να αποδείξετε ότι : $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot \eta\mu 4x$

β) να βρείτε την περίοδο της $f(x)$

γ) να αποδείξετε ότι :

$$f\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}x\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{1}{2^{11}} \cdot \eta\mu 8x$$

δ) να λύσετε την εξίσωση :

$$f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

48. Έστω $0 < x < \pi$ και $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$.

α) να υπολογίσετε το $\eta\mu 2x$

β) να αποδείξετε ότι η γωνία x είναι γωνία του δευτέρου τεταρτημορίου

γ) για την γωνία x να δείξετε ότι : $\sigma\upsilon\nu x < \eta\mu x$

δ) να αποδείξετε ότι : $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

ε) να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 2x$ και την $\epsilon\phi^2 x$.

49. Δίνεται η παράσταση : $A(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathfrak{R}$

α) να λύσετε την εξίσωση : $A(x) = -1$

β) Αν $A(x) = a$, όπου $a \in \mathfrak{R}$, να αποδείξετε ότι :

$$\iota) \eta\mu 2x = 1 - a^2 \quad \upsilon) -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

50. Δίνεται η παράσταση : $A(x) = \eta\mu 2x - \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

α) να αποδείξετε ότι : $A(x) = -\sigma\upsilon\nu 2x$

β) να λύσετε την εξίσωση : $A\left(\frac{x}{2}\right) - A(x) = -1$

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση : $(1 + \eta\mu 2x) \cdot \epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = A(x)$

51. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

52. Να λύσετε την εξίσωση στο διάστημα $[0, \pi]$: $\sigma\upsilon\nu 2x = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$