<u>ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ROLLE - ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥΣ</u>

<u>Κατηγορία 1</u>
Ασκήσεις στις οποίες ζητείται το πολύ μια ρίζα στο Δ.
Α) Απαγωγή σε άτοπο με Θ.Rolle. Θεωρώ ότι η f (x) έχει δυο ρίζες ρ_1,ρ_2 και είναι παραγωγίσιμη. Οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Rolle , άρα υπάρχει χ_0 ώστε $f\,'(\chi_o) = 0$ (1) , τότε είτε η (1) είναι αδύνατη είτε η ρίζα χ_0 της παραγώγου δεν ανήκει στο διάστημα Δ.

Β) Δείχνουμε ότι f (x) είναι γνησίως μονότονη ή 1-1 οπότε θα έχει το πολύ μια ρίζα.

1. Δείξτε ότι η $2\chi^3-3\chi^2-36\chi+\sigma\upsilon\nu\theta = 0$, $\theta \in \Re$, έχει το πολύ μια ρίζα στο (0,1).

2.

<u>Κατηγορία 2</u>
Ασκήσεις στις οποίες ζητείται ότι μια εξίσωση έχει το πολύ ν ρίζες. Δείχνουμε ότι αποκλείεται να έχει ν+1 ρίζες. Αυτό γίνεται όπως στην κατηγορία 1.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^{-x} = \alpha\chi$, $\alpha \in \Re$, έχει το πολύ δυο πραγματικές και άνισες ρίζες.

4. Δείξτε ότι η εξίσωση : $e^x-\chi^2-\chi+13 = 0$, έχει τρεις το πολύ πραγματικές ρίζες.

5. Δείξτε ότι η εξίσωση : $2\chi^2+3\eta\mu\chi+4 =0$, έχει δυο το πολύ ρίζες στο $\Re$.

6. Δείξτε ότι η εξίσωση : $e^x +2\chi^3-5\chi^2+3\chi+2 = 0$, έχει τρεις το πολύ ρίζες πραγματικές.

7. Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $e^x = \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in \Re$, έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

Κατηγορία 3
Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $h(\chi_o)=0$. Επιλέγουμε $H(\chi)$ για την οποία ισχύει $H'(\chi) = h(\chi)$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle.

α) Αν $f'(x_0) = \kappa \Rightarrow f'(x_0) - \kappa = 0 \Rightarrow (f(x_0) - \kappa\chi)' = 0 \Rightarrow g'(x_0) = 0$,
Θεωρώ : $g(x) = f(x) - \kappa\chi$

β) Αν $f'(x_0) = \kappa f(x_0) \Rightarrow f'(x_0) - \kappa f(x_0) = 0 \Rightarrow e^{-kx_0}(f'(x_0) - \kappa f(x_0)) = 0$
$\Rightarrow (e^{-kx_0} f(x_0))' = 0$. **Θεωρώ : $g(x) = e^{-kx} f(x)$.**

γ) Αν $f'(x_0)\cdot(\chi_0-\kappa) = f(x_0) \Rightarrow f'(x_0)(\chi_0-\kappa) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x_0)}{x_0-k}\right)' = 0$

Θεωρώ την $g(x) = \frac{f(x)}{x-k}$.

δ) Αν $f'(x_0)(\kappa-\chi_0) = f(x_0) \Rightarrow$ ….. **Θεωρώ την $g(x) = f(x)(\chi-\kappa)$**

8. Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $f(\kappa) = \lambda^2$ και $f(\lambda) = \kappa^2$ και $\kappa>\lambda$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\lambda,\kappa)$ με $f'(\xi) = -2\xi$

9. Έστω $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) η οποία μηδενίζεται στα α , β και μόνο σε αυτά. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \Re$ υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = \kappa f(\xi)$

10. Αν $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ και $f(3) - f(2) = \ln 3 - \ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,3)$, ώστε : $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$

11. Αν $\frac{\alpha}{\nu+1} + \frac{\beta}{\mu+1} + \frac{\gamma}{\rho+1} + \delta = 0$,να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\chi^\nu+\beta\chi^\mu+\gamma\chi^\rho+\delta=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Κατηγορία 4
Στις ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε : $f''(\xi) = 0$. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 , \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε : $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Τα ξ_1 και ξ_2 προκύπτουν από το Θ.Μ.Τ σε κατάλληλα διαστήματα $[\alpha, \lambda]$, $[\lambda, \beta]$. Στη συνέχεια αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle θα υπάρχει ξ τέτοιο ώστε : $f''(\xi) = 0$.

12. Θεωρούμε την $f(x) : [-\alpha,\alpha] \to \Re$ που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ και συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$. Επίσης ισχύει : $f(0) = \frac{f(-\alpha)+f(\alpha)}{2}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (-\alpha,\alpha)$ ώστε : $f''(\xi) = 0$.

13. Δίνεται f (x) : [α,β] → $\Re$, συνεχής στο [α,β] και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν οι αριθμοί f (α) , f $(\frac{\alpha+\beta}{2})$, f (β) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου , να δείξετε ότι υπάρχει $\chi_o \in (\alpha,\beta)$ με f΄΄ (χ_o) = 0

14. Έστω f (x) : [α,β] → $\Re$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] με τις ιδιότητες : f (α) = f (β) και f ΄(α) = f ΄(β) = 0. Δείξτε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε : f ΄΄΄ (χ_0) = 0

Κατηγορία 5

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η απόδειξη ύπαρξης $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_\nu \in (\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει μια συγκεκριμένη σχέση. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ σε διαστήματα που προκύπτουν μετά από κατάλληλη διαμέριση του [α,β].

15. Έστω f (x) παραγωγίσιμη στο [α,β] με f (α) = 1 και f (β) = 2004. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in$ (α,β) τέτοια ώστε : $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \frac{6009}{\beta-\alpha}$

16. Έστω η f (x) παραγωγίσιμη στο [α,β] με f (α) = e και f (β) = - e . Να δείξετε ότι :

α) η f (x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

β) να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ ώστε : $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\beta-\alpha}{e}$

17. Έστω f (x): [α,β] → $\Re$, συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) και f (α) = f (β). Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ με $\alpha<\xi_1<\frac{\alpha+\beta}{2}<\xi_2<\beta$, ώστε να ισχύει : $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

18. Αν η f (x) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο [0,3] να δείξετε ότι: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$

Κατηγορία 6

Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων. Χρησιμοποιούμε το Θ.Μ.Τ . Κάνουμε τα εξής :

α) μετατρέπουμε την ανισότητα στη μορφή : $\mu < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \nu$

β) αναγνωρίζουμε την συνάρτηση f (x) και το διάστημα [α,β]

γ) εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ , οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$: $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Τότε αρκεί να δείξουμε ότι : μ < f ΄(ξ) < ν , η οποία προκύπτει με τη βοήθεια της μονοτονίας .

19. Να δείξετε ότι : $\frac{\beta - \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$, $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

20. Να δείξετε ότι : $\sigma\varphi\beta < \frac{\ln(\eta\mu\beta) - \ln(\eta\mu\alpha)}{\beta - \alpha} < \sigma\varphi\alpha$, $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.