ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ – ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Α) ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Αλγεβρική ή κανονική μορφή μιγαδικού καλείται η μορφή : z = α + βi , α, β $\in \Re$.

- Το α ονομάζεται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται με Re(z).
- Το β ονομάζεται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με Im(z).
- Για το i ισχύει : $i^2 = -1$.
- $z \in \Re \Leftrightarrow$ Im(z) = 0.

2. Συζυγής μιγαδικός : Αν z = α + βi τότε ο $\bar{z}$ = α – βi καλείται συζυγής του z και συμβολίζεται $\bar{z}$. Άμεσα προκύπτει ότι : $\overline{\overline{(z)}} = z$.

3. Μέτρο μιγαδικού (συμβολίζεται με $|z|$) καλείται ο αριθμός :

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

Β) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ – ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

i) Στο μιγαδικό επίπεδο Οχψ, σε κάθε μιγαδικό αντιστοιχεί ένα διάνυσμα, το $\overline{OA}$, όπου Α σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (Re(z), Im(z)). Συνεπώς $\overline{OA}$=z. Το $\overline{OA}$ καλείται διανυσματική ακτίνα του z ή διάνυσμα θέσης του z.

ii) Το $|\overline{OA}|$ καλείται μέτρο του μιγαδικού και είναι ίσο με $|z|$. Εκφράζει την απόσταση της εικόνας του Α από την αρχή των αξόνων.

iii) Αν Α , Β εικόνες δυο μιγαδικών z_1, z_2, τότε στο διάνυσμα $\overline{AB}$ αντιστοιχεί ο μιγαδικός z = $z_2 - z_1$, διότι $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = z_2 - z_1$.

Γ) ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

1. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

2. $z - \bar{z} = 2i\cdot\mathrm{Im}(z)$

3. $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

4. $z \in \Re \Leftrightarrow z = \bar{z}$

5. z φανταστικός $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

6. $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_n}$

7. $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$

8. $\overline{\mu \cdot z} = \mu\cdot\bar{z}$, $\mu \in \Re$

9. $\overline{z^{\nu}} = (\overline{z})^{\nu}$ **,** ν$\in \aleph - \{0\}$

10. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$

11. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

12. $|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cdot |z_n|$

13. $|z^n| = |z|^n$, n$\in \aleph - \{0\}$

14. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

15. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

16. $\begin{cases} z \in \Re \Leftrightarrow |z|^2 = z^2 \\ z \in C \Leftrightarrow |z|^2 = -z^2 \end{cases}$

Δ) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Έστω z μιγαδικός.

- Αν z_0 μιγαδικός με σταθερή εικόνα Κ, τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που ικανοποιεί την σχέση : $|z - z_0|$= ρ, ρ>0 , είναι ο κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ρ.

- Αν z_1, z_2 δυο μιγαδικοί με σταθερές εικόνες Α, Β, τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που ικανοποιεί τη σχέση : $|z - z_1| = |z - z_2|$, είναι η μεσοκάθετη ευθεία του ΑΒ.

Ε) ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Έστω η εξίσωση : α·z$^2 + \beta \cdot z + \gamma = 0, \alpha \in \Re - \{0\}$**,** z$\in C$, α,β,γ$\in \Re$.

- Αν η Δ=$\beta^2 - 4\alpha\gamma$ και Δ$\leq$0 τότε η εξίσωση έχει ρίζες τις :
$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot \alpha}$. Ειδικά αν Δ<0, <u>οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικοί.</u>

Στ) ΟΡΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ (εκτός ύλης)

Έστω Α η εικόνα ενός μιγαδικού z. Τότε το $\overline{OA}$ είναι το διάνυσμα θέσης του z. Όρισμα του z ονομάζουμε τη γωνία που έχει αρχική πλευρά τον θετικό ημιάξονα Οχ και τελική πλευρά την ημιευθεία $\overline{OA}$. Συμβολίζεται με Arg(z).

<u>**Σχόλιο :**</u> Το όρισμα για z $\neq$0 δεν είναι μοναδικό. Αν επιλέξουμε όρισμα που ανήκει στο [0,2π) το ονομάζουμε πρωτεύον όρισμα και το συμβολίζουμε με Arg(z). Έτσι για το τυχαίο φ ενός μιγαδικού z ισχύει :
φ = 2κπ + Arg(z), κ ακέραιος.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ - ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία 1

Ασκήσεις που ζητείται να γραφεί ένας μιγαδικός στην κανονική μορφή α + βi . Τότε κάνουμε τις πράξεις (δυνάμεις – ταυτότητες – πολ / σμό αριθμητή και παρανομαστή με τον συζυγή).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Επιλέξτε την σωστή απάντηση. Ο $z = \frac{2-i}{1+2i}$, είναι ίσος με :

Α. 2 i Β. i Γ . - i Δ. -2 i

2) Να γραφούν σε κανονική μορφή οι μιγαδικοί :

α) $\frac{5-2i}{1-2i}$ β) $\frac{2+3i}{4+i}$ γ) $\frac{3i}{i-7}$

3) Αν $z_1 = 2+i$ και $z_2 = 3-2i$, βρείτε τους μιγαδικούς :

α) $z_1 + z_2$ β) z_1z_2 γ) $\frac{z_1}{z_2}$

4) Θεωρώ τον $w = \frac{z}{z+2}$, όπου z = χ+ψ i . Να γράψετε τον w σε κανονική μορφή.

5) Αν $z = 1+i^{2005}$, να υπολογίσετε το $Im(z-\frac{1}{z})$.

6) Αν $z = \frac{1+i}{1-i}$, να βρείτε : $Re(z+\frac{1}{z})$ και $Im(z+\frac{1}{z})$.

Κατηγορία 2

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι : $z_1 = z_2$. Τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Im(z_1) = Im(z_2) \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

7) Να βρείτε τα α , $\beta \in \Re$, ώστε οι z = -3+(2α-β) i και w = α-5β -3 i να είναι συζυγείς μιγαδικοί.

8) Να βρείτε τους α , $\beta \in \Re$ ώστε να ισχύει η σχέση :

$(i-\alpha)^2 - (i+\alpha)^2 + \beta + 1 = \frac{1}{i}$

9) Αν z = (1+ i)χ + (1- i)ψ – 2 και w = 4+(2χ+3ψ) i ,να βρείτε τα χ , ψ $\in \Re$ ώστε να ισχύει : w = z.

Κατηγορία 3

Ασκήσεις που ζητείται να δειχθεί ότι ένας μιγαδικός είναι πραγματικός ή φανταστικός. Τότε κάνουμε ένα από τα παρακάτω :

Α) Γράφουμε τον z = χ+ψ i και απαιτούμε :
$z \in \Re \Leftrightarrow \psi = 0$ ή $z \in I \Leftrightarrow \chi = 0$

Β) Αποδεικνύουμε τις παρακάτω σχέσεις και κατόπιν τις χρησιμοποιούμε :
$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \Re$ ή $z \in I \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

10) Αν $z \in C$ και $z^2 = \bar{z}^2$, να δείξετε ότι : $z \in I$ ή $z \in \Re$

11) Έστω z_1 , $z_2 \in C$ με $z_1 + z_2 \neq 0$ και $z = \dfrac{z_1}{z_1 + z_2}$. Να δείξετε ότι :

$z \in \Re \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 \in \Re$.

12) Αν z = χ(χ+i) + (χ+2) i είναι πραγματικός να βρεθεί ο χ.

13) Δίνεται $z = (\chi - i)(1+i)^2 + (\chi^2-3)\, i + \chi$. Να βρεθεί ο χ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :
α) $z \in \Re$ β) $z \in I$

14) Αν $z = (1+i)^8$, να δείξετε ότι $z \in \Re$.

Κατηγορία 4

Ασκήσεις που ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z . Τότε γράφουμε τον z στην κανονική μορφή και απαλείφουμε την παράμετρο από τα Im(z) , Re(z) ή κάνουμε χρήση των : $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \Re$ ή $z \in I \Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

15) Να βρείτε στο μιγαδικό επίπεδο τον γ.τ των εικόνων του μιγαδικού :
z = (1+5 i)λ + 2-3 i , $\lambda \in \Re$.

16) Να βρείτε τον γ. τ των εικόνων του : z = 5συνφ + 3ημφ i , $\varphi \in [0, 2\pi]$

17) Ομοίως για τον : z = 1+ημφ + iσυνφ.

18) Έστω z $\in C$, z $\neq$ 2 , αν w = $\frac{z-4i}{z-2}$, να βρεθεί ο γ.τ του z όταν w $\in \Re$.

19) Να βρεθεί ο γ.τ του z $\in C$ για τον οποίο ισχύει η σχέση :
$z\bar{z} - (z^2 + \bar{z}^2) + 1 = 0$

20) Δίνεται z = χ+ψ i , χ , ψ $\in \Re$. Αν w = $\frac{z+8i}{z+6}$ και Re(w) = 0 , να δείξετε ότι ο γ.τ του z είναι κύκλος που περνά από το (0,0).

21) Αν z $\in C$ με z = εφθ + i$\frac{1}{συνθ}$, θ$\in(-\frac{π}{2},\frac{π}{2})$. Να βρεθεί ο γ.τ του z.

22) Αν z_1, z_2 $\in C$ με $z_1 = z_2 + \frac{1}{z_2}$. Αν η εικόνα του z_2 κινείται σε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας ρ $\neq$ 1, να δείξετε ότι η εικόνα του z_1 κινείται σε έλλειψη και να βρείτε τις εστίες της.

23) Δίνονται z , w $\in C$ με w = $\frac{z+3i}{z+3}$, z $\neq$ -3.
α) αν z = χ+ iψ να γραφεί ο w σε κανονική μορφή
β) αν w $\in \Re$, τότε ο γ.τ των εικόνων του z είναι η ευθεία : ψ = -χ-3

24) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν κάθε μια από τις σχέσεις :
α) Re(z) = 1 β) Im(z) = 0 γ) Re(z) + Im(z) = 2

δ) $Re^2(z) + Im^2(z) = 4$ ε) Re(z+2) = Im(2z-1)

25) Έστω z = α + βi , w = 1+ z^2. Αν είναι $α^2 – β^2 = 4$, να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία βρίσκονται οι εικόνες του w.

26) z = α + βi $\neq$ 0 , w = $\frac{z}{\bar{z}}$. Να δείξετε ότι οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται σε κύκλο και να προσδιοριστεί το κέντρο του και η ακτίνα.

27) Δίνεται : z = (λ+2 i)(1- i) + 2λ
α) αν z $\in \Re$ να δείξετε ότι λ = 2
β) αν ο λ διατρέχει το σύνολο των πραγματικών να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες του z.

28) Δίνονται : z = α + βi , w = 1+(z+1) i. Αν ο z κινείται στην ευθεία : χ+ψ-2=0 να βρεθεί που κινείται ο w.

29) Δίνονται $z = \chi + i\psi \neq 2i$ και $w = \frac{z+2i}{z-2i}$ και Μ η εικόνα του z. Να βρεθεί ο γ.τ του Μ όταν : α) $w \in \Re$ β) $w \in I$

30) Δίνονται $z = \chi + \psi i$, $z \neq 0$ και $w = z - \frac{4}{z}$. Αν Μ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο να βρείτε το γ.τ του Μ όταν :
α) $w \in \Re$ β) $w \in I$

Κατηγορία 5

Ασκήσεις που ζητείται να λυθούν ανισώσεις της μορφής : $\varphi_1(z) > \varphi_2(z)$, όπου $\varphi_1(z)$ και $\varphi_2(z)$ είναι παραστάσεις του z . Τότε θέτω $z = \alpha + \beta i$, φέρνω την ανίσωση $\varphi_1(z) > \varphi_2(z)$ στην μορφή : $\kappa + \lambda i > 0$ ή $\kappa + \lambda i < 0$. Επειδή στο σύνολο των μιγαδικών δεν έχει νόημα η διάταξη , απαιτώ $\lambda = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

31) Να λυθεί η ανίσωση : $3z - 1 \geq z + 7$, $z \in C$.

32) Να βρεθούν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει : $z^2 - 1 \geq 0$

Κατηγορία 6

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να καταλήξουμε από ισότητα μιγαδικών σε ισοδύναμη ισότητα διανυσμάτων. Τότε λαμβάνω υπόψιν την εξής πρόταση :

« Αν $\frac{z_1}{z_2} = \kappa$, $\kappa \in \Re$ $\Leftrightarrow$ $z_1 = \kappa z_2$ $\Leftrightarrow$ $\overline{OM_1} = \kappa \overline{OM_2}$ $\Leftrightarrow$ Ο , M_1 , M_2 συνευθειακά » , όπου M_1 και M_2 οι εικόνες του z_1 , z_2 αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

33) z_1 , z_2 , z_3 $\in C$ με εικόνες P_1 , P_2 , P_3 συνευθειακά σημεία. Να δείξετε ότι ο $w = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ είναι πραγματικός.

34) Αν z_1, z_2 $\in C$ με $z_2 \neq 0$, να δειχθεί η ισοδυναμία :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \Re$$

35) Δίνονται : $z = \chi + \psi i$, $w = \alpha + \beta i$
α) βρείτε τον μιγαδικό $u = \overline{w} z$
β) αν Α και Β οι εικόνες των z , w στο μιγαδικό επίπεδο βρείτε :

ι) τις συντεταγμένες των $\overline{OA},\overline{OB}$
ιι) να δείξετε ότι : $Re(\overline{w}z) = \overline{OA}\cdot\overline{OB}$

γ) αν w = 1+2i και τα διανύσματα $\overline{OA},\overline{OB}$ είναι κάθετα να βρείτε τον γ.τ του A.

36) Έστω z , w $\in C$ και A , B οι εικόνες αυτών αντίστοιχα.
α) να δείξετε ότι : $Re(\overline{w}z) = \overline{OA}\cdot\overline{OB}$
β) αν $Im(\overline{w}z) = 0$, να δείξετε ότι τα $\overline{OA},\overline{OB}$ είναι συγγραμμικά
γ) αν ο u = $\dfrac{z}{w} \in I$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overline{OA},\overline{OB}$ είναι κάθετα.

Κατηγορία 7

Ασκήσεις που ζητείται να λυθούν εξισώσεις – ανισώσεις που περιέχουν μέτρα μιγαδικών ή ζητείται να αποδειχθούν εξισώσεις – ανισώσεις μιγαδικών με συνθήκες ή όχι . Τότε εφαρμόζουμε ένα από τα παρακάτω :

A) θέτω z = χ+ψ i και εφαρμόζουμε τον ορισμό του μέτρου

B) υψώνω στο τετράγωνο και ισχύει : $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$ ή $|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)}$

Γ) Χρησιμοποιώ την γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

37) $z\in C$, αν ισχύει : $|3z-9| = |z-11|$, να αποδείξετε ότι $|z-2| = 3$.

38) Ομοίως αν ισχύει : $|z-10| = 3|z-2|$, να αποδείξετε ότι $|z-1| = 3$

39) Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία στα επόμενα :
α) $|\overline{z}| = 4$ β) $|4z+8i+4| = 4$ γ) $2 < |z-1+2i| < 3$

δ) $|z-2| = |z-3i|$

40) Να προσδιοριστεί η εικόνα του z για την οποία ισχύει η σχέση :
$|z-4i| = |z-2| = |z-2i|$.

41) Αν z_1 , $z_2 \in C$ και $|z_1+\overline{z_2}| = |\overline{z_1}-z_2|$, να δειχθεί ότι ο z_1z_2 είναι φανταστικός.

42) Να βρεθεί ο z που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις : $|z| = 1$ και $|z-1| = 2|z+1|$.

43) Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών η εξίσωση : $z^2 - 2|z| = 0$.

44) $z_1, z_2 \in C$ για τους οποίους ισχύει : $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_1 \neq z_2$ και $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. Να δείξετε ότι ο $w = \dfrac{z_1}{z_2} \in I$

45) z , w , u $\in C$ με u = zw. Αν $|z + \overline{w}| = |\overline{z} - w|$, να δειχθεί ότι :

α) ο $u \in I$

β) αν w = 2+i , να βρεθεί ο γ.τ του z

46) Να βρεθεί ο z = χ+ψi που ικανοποιεί ξεχωριστά κάθε σχέση :

α) $|z|^2 = z^2$ β) $|z|^2 + i(z+\overline{z}) = 9$

γ) $|z|^2 + (1-i)z + (1+i)\overline{z} + 2 = 0$

47) Αν $|z| = |w| = |u| = 1$, να δειχθεί : $|z + w + u| = \left|\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{u}\right|$

48) Αν για τους z , w $\in C$ ισχύει : $|z - w| = |1 - z\overline{w}|$, να δείξετε ότι : $|z| = 1$ ή $|w| = 1$

49) Έστω $z \in C$ με $z \neq -i$. Αν ο $w = \dfrac{1+iz}{1-iz} \in I$, να δειχθεί ότι : $|z| = 1$

50) Έστω $z \in C$ με $|z| = 1$, $z \neq 1$. Να δειχθεί ότι ο $w = i\dfrac{1+z}{1-z} \in \Re$

51) Έστω z , w $\in C$ με $zw \neq -1$ και $|z| = |w| = 1$. Να δείξετε ότι ο :

$u = \dfrac{z+w}{1+zw} \in \Re$

Κατηγορία 8

Ασκήσεις που ζητείται η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$. Τότε εφαρμόζω ένα από τα παρακάτω : Α) τριγωνική ανισότητα $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Β) χρήση της αναλυτικής γεωμετρίας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

52) Αν ο z ανήκει σε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας 1 και w = 3+4i , να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z + w|$

53) Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$ αν $|z - 3| \leq 1$

54) Αν ισχύει : $|z+1-i|=2$, βρείτε :
α) το γ.τ του z
β) τους μιγαδικούς του γ.τ του z με το μικρότερο και μεγαλύτερο μέτρο

55) Έστω ότι για τον z ισχύει : $|z-4+9i|\le 2$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση : $3 \le |z-7+5i| \le 7$

56) Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$ αν ισχύει : $|z-5|\le 2$.

57) Έστω z = χ+ψi , χ , ψ$\in\Re$ με χ$\neq$ 0 και ψ $\neq$ 2. Αν $\left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right|=2$, τότε :
α) βρείτε τον γ.τ του z
β) βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$ και να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία .

58) Έστω z = α + βi , για τον οποίο ισχύει : $|z-2i|=4$, να βρείτε τον μιγαδικό z με το μικρότερο μέτρο.

59) Έστω z = 3+4i και w $\in C$ με $|w|$ = 1.
α) βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z+w|$,
β) βρείτε τους μιγαδικούς w για τους οποίους οι εικόνες των z και w και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά.

60) Αν ισχύουν : $|z-4|=4$, $|w+1|=1$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή του z – w.

61) Έστω z = α + βi , για τον οποίο ισχύει : z(1+i) + $\bar{z}$ (1-i) + 4 = 0 ,
α) βρείτε τον γ.τ των εικόνων του z
β) βρείτε τον z με το μικρότερο μέτρο.

<u>ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ</u>

62) Έστω z$\in C$, για τον οποίο ισχύει : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
Να δείξετε ότι : α) $z^5 = 1$
β) $z^{44} + z^{33} + z^{22} + z^{11} + 1 = 0$

63) Έστω z$\in C$, για τον οποίο ισχύει : $z^2 + z + 1 = 0$
Να δείξετε ότι : α) $z^3 = 1$
β) $z^{100} + z^{50} + 1 = 0$

64) Έστω z_1, $z_2 \in C$, με $z_2 \notin \Re$. Να δείξετε ότι ο $w = \dfrac{z_1+\overline{z_1}}{z_2-\overline{z_2}} \in I$.

65) Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει η σχέση :
$\bar{z} = z^2$.

66) Έστω α , β $\in \Re$, ν$\in \aleph^*$, να δείξετε ότι ο $z = (\alpha + \beta i)^\nu + (\alpha - \beta i)^\nu$ είναι πραγματικός αριθμός.

67) Αν $z_1, z_2 \neq 0$ με $z_1^2 + z_2^2 = 0$, να δείξετε ότι :
α) $z_1^{22} + z_2^{22} = 0$
β) $z_1^{20} + z_2^{20} \neq 0$

68) Να βρεθεί ο χ$\in \Re$ ώστε ο $z = \dfrac{x+2i}{3+(x^2-7)i}$, να είναι πραγματικός αριθμός.

69) Έστω z , w $\in C$, με $z \neq i$, $w = \dfrac{z+i}{1+iz}$.
α) αν w$\in \Re$, να βρεθεί ο γ.τ του z
β) να βρεθεί ο γ.τ του w στο μιγαδικό επίπεδο αν και μόνο αν ο z διαγράφει τον φανταστικό άξονα.

70) Έστω z$\in C$, $|z| = 1$, να δείξετε ότι ο $z + \dfrac{1}{z} \in \Re$

71) Έστω $z \neq -1$. Να δείξετε ότι ο $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αν και μόνο αν $|z| = 1$.

72) Αν ισχύει : $|z+16| = 4|z+1|$, να δείξετε ότι : $|z| = 4$.

73) Έστω z$\in C^*$, να δείξετε ότι ο $w = \dfrac{|z|}{z} + \dfrac{z}{|z|}$ είναι πραγματικός που ανήκει στο διάστημα [-2,2] (δηλαδή ότι ισχύει : $|w| \leq 2$)

74) Αν για τον $z \in C$ και ν > 1 ισχύει : $(1+z)^\nu = z^\nu$, να δείξετε ότι $Re(z) = -\dfrac{1}{2}$

75) Να βρεθεί ο γ.τ του z για τους οποίους ισχύει : $|z-1| = 2|z+i|$

76) Έστω $z_1, z_2 \in C$, ώστε : $(z_1 + z_2)^\nu = (z_1 - z_2)^\nu$, ν > 1 , να δείξετε ότι ο $z_1 \bar{z}_2$ είναι φανταστικός.

77) Έστω $z_1, z_2, z_3 \neq 0$. Να δείξετε ότι :
α) $|z_1 + z_2 + z_3| = \left| \dfrac{|z_1|^2}{z_1} + \dfrac{|z_2|^2}{z_2} + \dfrac{|z_3|^2}{z_3} \right|$

β) αν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, τότε ισχύουν :

ι) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$ ιι) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

78) Έστω z , w $\in C$, με $|z| = 4$ και $w = \dfrac{z-8}{z-2}$, να δείξετε ότι :

α) $|w| = 2$

β) ο $w_1 = \dfrac{w^2+4}{w} \in \Re$

79) Έστω z_1, $z_2 \in C$, με $z_1 + z_2 = 1$ και $z_1^3 + z_2^3 = -2$.

α) βρείτε τους z_1, z_2

β) αν Α , Β οι εικόνες τους , βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ

γ) να δείξετε ότι : $z_1^{100} + z_2^{100} = -1$

80) Έστω $\lambda \in \Re$ και $z \in C$, ώστε : $\lambda z + \bar{z} = |z|$.

α) να δείξετε ότι : λ=1

β) να βρείτε το γ.τ του z

81) Έστω $z = \lambda^2 + 4 + 4\lambda i$, $\lambda \geq 0$. Να βρείτε τον μιγαδικό z με το μικρότερο μέτρο.

82) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ και $w=3z - i\bar{z}+4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α) Να αποδείξετε ότι $Re(w)=3\alpha-\beta+4$ $Im(w)=3\beta-\alpha$.

β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

γ)Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

83) Έστω $z = \chi+\psi i$ και $w = \dfrac{i(i+z)}{i-z}$, $z \neq i$, να δείξετε ότι :

α) $w = \dfrac{2x}{x^2+(\psi-1)^2} + \dfrac{1-x^2-\psi^2}{x^2+(\psi-1)^2} i$

β) αν ο w είναι πραγματικός να δείξετε ότι ο z κινείται σε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας 1

γ) αν ο z είναι πραγματικός τότε ο w κινείται σε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας 1.