ΑΛΓΕΒΡΑ

Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $1^{ο}$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητες τους

Αν α , β , γ , δ πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύουν οι ιδιότητες :

- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$
- Αν $\gamma \neq 0$, $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$
- $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ **ή** $\beta = 0$
- $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ **και** $\beta \neq 0$

Αναλογία : ονομάζουμε την ισότητα δυο λόγων. Για παράδειγμα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Στις αναλογίες ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ (χιαστί)
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma}$ και $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Παράδειγμα : Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5\alpha-7\gamma}{5\beta-7\delta}$,με [βδ(5β-7δ)]$\neq 0$

Θεωρούμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, οπότε α = λβ και γ = λδ. Συνεπώς το 5α – 7γ, γίνεται: 5α – 7γ = 5 λβ – 7 λδ = λ(5β-7δ). Επομένως $\lambda = \frac{5\alpha-7\gamma}{5\beta-7\delta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν οι αριθμοί Α = χ-4ψ+5ω και Β = 2ψ-χ-3ω είναι αντίθετοι να αποδείξετε ότι ω = ψ

2. Αν α, β, γ ακέραιοι διαδοχικοί , να δειχθεί ότι α+β+γ είναι πολλαπλάσιο του 3.

3. Να βρεθεί το αποτέλεσμα της παράστασης:

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})........(1+\frac{1}{100})$$

4. Να σημειωθεί η σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Αν α, β αντίστροφοι τότε:

ι) α=β ιι) α+β=0 ιιι) αβ=0 ιv) αβ=1

β) Το κλάσμα $\frac{a(a+2)}{a(a+1)}$ ορίζεται όταν:

ι) $α \neq -1$ ιι) $α \neq 0$ ιιι) $α \neq 0$ ή $α \neq -1$ ιv) $α \neq 0$ και $α \neq -1$

γ) Αν α, $β \in$ Ζ με $β \neq 0$, τότε $\frac{a}{\beta}$ είναι:

ι) θετικός ιι) αρνητικός ιιι) ρητός ιv) ακέραιος

5. Έστω $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$. Να αποδειχθεί ότι : $\frac{γ}{δ} = \frac{3γ - 2α}{3δ - 2β}$, βδ(3δ-2β) $\neq$ 0

6. Αν $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$A = \frac{x}{x+y}$ $B = \frac{x-y}{x}$ $Γ = \frac{3x}{5y}$

7. Αν $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{7}$ και 3x-2y+z = 10 , να βρεθούν τα x , y , z.

1. 2 ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1. $α^1 = α$

2. $α^0 = 1$

3. $α^{μ} \cdot α^{ν} = α^{μ+ν}$

4. $\frac{α^{μ}}{α^{ν}} = α^{μ-ν}$

5. $α^{ν} β^{ν} = (αβ)^{ν}$

6. $\frac{α^{ν}}{β^{ν}} = (\frac{α}{β})^{ν}$

7. $α^{-ν} = \frac{1}{α^{ν}}$

8. $(\frac{α}{β})^{-ν} = (\frac{β}{α})^{ν}$

9. $(α^{μ})^{ν} = (α^{ν})^{μ} = α^{μ ν}$

Παρατήρηση

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί . Αν **α = β** $\Rightarrow$ **$α^κ = β^κ$** Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει.

<u>ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ</u>

1. $(a-\beta)(a+\beta)=a^2-\beta^2$
2. $(a\pm\beta)^2 = a^2 \pm 2a\beta + \beta^2$
3. $(a\pm\beta)^3 = a^3 \pm 3a^2\beta + 3a\beta^2 \pm \beta^3$
4. $(a+\beta+\gamma)^2 = a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$
5. $a^3\pm\beta^3 = (a\pm\beta)(a^2\mp a\beta+\beta^2)$
6. $a^2+\beta^2 = (a+\beta)^2 - 2a\beta$
7. $a^3+\beta^3 = (a+\beta)^3 - 3a\beta(a+\beta)$
8. $(x+a).(x+\beta)= x^2+(a+\beta)x+a\beta$
9. $a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma = \frac{1}{2}(a+\beta+\gamma)[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-a)^2]$

   Αν $a+\beta+\gamma=0$ ή $a=\beta=\gamma$ *τότε :* $a^3+\beta^3+\gamma^3=3a\beta\gamma$

10. $a^\nu-\beta^\nu = (a-\beta)(a^{\nu-1}+a^{\nu-2}\beta+.........+a\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$

Παρατήρηση

Η ταυτότητα 9 είναι η ταυτότητα του Euler. Πολλές ασκήσεις λύνονται με τη βοήθεια της. Δείτε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα (Άσκηση 1 σελ 23 σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι : $(χ-1)^3+ (2χ-4)^3 + (5-3χ)^3 = 3(χ-1)(2χ-4)(5-3χ)$

Σύμφωνα με την ταυτότητα του Euler ,αν θέσουμε α = χ-1 ,β = 2χ-4 ,γ = 5-3χ

Παρατηρούμε ότι : α + β + γ = χ-1+2χ-4+5-3χ = 0 ,οπότε : $α^3+β^3+γ^3 = 3αβγ \Rightarrow$

$(χ-1)^3+ (2χ-4)^3 + (5-3χ)^3 = 3(χ-1)(2χ-4)(5-3χ)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ (ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ – ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ)</u>

Κάθε άσκηση ή πρόταση συνήθως διαχωρίζεται σε δυο ισχυρισμούς , την υπόθεση **(Υ)** και το συμπέρασμα **(Σ)**. **Υπόθεση** είναι τα δεδομένα της άσκησης, **Συμπέρασμα** είναι μια πρόταση που προσπαθούμε να αποδείξουμε. Γενικά κάθε πρόταση που περιέχει υπόθεση και συμπέρασμα καλείται **ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ.** Η απόδειξη μιας συνεπαγωγής μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους.

1η ΜΕΘΟΔΟΣ « ευθεία απόδειξη »

Ξεκινάμε από την υπόθεση και με την βοήθεια γνωστών ιδιοτήτων και κανόνων προσπαθούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα.

Παράδειγμα : Να αποδείξετε ότι : αν $a+\frac{1}{a}=2$, τότε $α^2+\frac{1}{α^2}=2$.

Υπόθεση εδώ είναι η : $a+\frac{1}{a}=2$. Ξεκινώ λοιπόν από την υπόθεση και

έχω : $a+\frac{1}{a}=2 \Rightarrow (α+\frac{1}{α})^2=2^2 \Rightarrow α^2+2α\frac{1}{α}+\frac{1}{α^2}=4 \Rightarrow$

$α^2+\frac{1}{α^2}+2=4 \Rightarrow α^2+\frac{1}{α^2}=2$. Κατέληξα στο συμπέρασμα.

2η ΜΕΘΟΔΟΣ « απαγωγή σε άτοπο »

Υποθέτουμε ότι δεν αληθεύει το συμπέρασμα (δηλαδή θεωρούμε ότι αληθεύει η άρνηση του συμπεράσματος), και καταλήγουμε σε μια πρόταση που είτε δεν ισχύει είτε έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

Παράδειγμα : Αν ρ ρητός και α άρρητος , να αποδείξετε ότι οι αριθμοί ρ+α , ρ-α είναι άρρητοι.

Έστω ότι ρ +α ρητός . Δηλαδή $ρ+α=\frac{μ}{ν}$, όπου μ , ν ακέραιοι, τότε

$α=\frac{μ}{ν}-ρ$, όμως έτσι προκύπτει ότι ο α είναι ρητός αφού είναι διαφορά δυο ρητών αριθμών . **Άτοπο** , αφού από υπόθεση ο α είναι άρρητος. Η υπόθεση μου ότι ο ρ + α είναι ρητός καταλήγει σε άτοπο άρα ρ + α άρρητος.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

8. Να συμπληρωθούν τα παρακάτω.

α. Αν $α\neq 0$ τότε $α^0$=……….

β. Αν $α\neq 0$ και $ν\in N$-{0} τότε $α^{-ν}=$ ………..

γ. (2α+β)(2α-β)=…………….

δ. Αν $α\neq 2$ τότε : $\frac{a^3-8}{a-2}=a^2+$………..+……….

ε. $2^{1000}+2^{1000}$=…………..

στ. Αν $ν\in N$ τότε $(-1)^{ν}+(-1)^{ν+2001}$=………………

9. Να γίνουν οι πράξεις στις παραστάσεις:

α) 2(χ-ψ)-3[5(χ-2ψ)-2(3χ-ψ)]

β) (χ+ψ)(χ-ψ)+(ψ+ρ)(ψ-ρ)+(ρ-χ)(ρ+χ)

γ) $[χ^2(ψ^2ρ^{-1})^3]\div(χ^2ψ^4ρ^{-2})^{-4}$

10. Να αναπτυχθούν οι ταυτότητες :

α) $(α+2β)^2$ β) $(2α-β)^2$ γ) $(2αβ-3)^2$

δ) $(α+3)^3$ ε) $(α+2β)^3$ στ) $(2α-β)^3$

ζ) (α-2β)(α+2β) η) $(χ^2-ψ^2)(χ^2+ψ^2)$ θ) $9κ^2-25$

11. Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων : $α^2-β^2=(α-β)(α+β)$ και $(α\pmβ)^2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) 98·102 β) 1002^2 γ) $\dfrac{5{,}36^2-1{,}36^2}{6{,}72}$

12. Αν α-β =2 να αποδείξετε ότι : $α^2+β^2-2αβ-4α+4β+3=-1$

13. Αν α+β =2 , να αποδείξετε ότι : $(α^2+β^2-2)^2-(2αβ-2)^2=0$

14. Αν α-β = 1 , να αποδείξετε ότι : $α^3(1-β)+β^3(1+α)=α+β$

15. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

α) $12χ+6$ β) $8χ^3+12χ^2$ γ) $χ^5+χ$

δ) $χ^2+2χ$ ε) $χ^3-2χ^2$ στ) $8χ^2-32χ$

16. Ομοίως τις παραστάσεις :

α) $4χ^2-25$ β) $χ^4-ψ^4$ γ) $9β^2-16$

δ) $α^2-(3β+7)^2$ ε) $9κ^2-100β^2$ στ) $χ^2+8χ+16$

ζ) $36χ^2+24χ+4$ η) $χ^2+6χ+9$ θ) $χ^4-4χ^3+4χ^2$

17. Να γίνει αντιστοίχηση των στοιχείων κάθε στήλης.

	Στήλη Α	Στήλη Β
1.	$χ^2-ψ^2$	α. 1
2.	$\dfrac{x^3-ψ^3}{χ-ψ}$	β. $χ^2-χ\cdotψ+ψ^2$
3.	$\dfrac{χ^3+ψ^3}{χ+ψ}$	γ. $χ^2+χ\cdotψ+ψ^2$
4.	$\dfrac{\dfrac{χ^2-ψ^2}{χ^3-ψ^3}}{\dfrac{χ+ψ}{χ^2+χψ+ψ^2}}$	δ. $χ^2+ψ^2$
5.	$\dfrac{χ^4-ψ^4}{χ^2-ψ^2}$	ε. $(χ-ψ)\cdot(χ+ψ)$

18. Να γίνει γινόμενο η παράσταση $α^4+α^2+1$.

19. Να αποδείξετε τις σχέσεις:
α) $(α+2)^3-α(α+3)^2=3α+8$

β) $(α+β)\cdot(α^3-β^3)-(α-β)\cdot(α^3+β^3)=2αβ(α-β)\cdot(α+β)$

γ) $(α^2+β^2)\cdot(γ^2+δ^2)=(α\cdotγ+β\cdotδ)^2(α\cdotδ-βγ)^2$

20. Αν για τους α, β όπου α, $β\neq 0$, ισχύει $(α+β)^3=α^3+β^3$, τότε οι α, β είναι αντίθετοι.

21. Να αποδείξετε ότι: $(χ-ψ)^3+(ψ-κ)^3+(κ-χ)^3=3(χ-ψ)(ψ-κ)(κ-χ)$.
Επίσης να λυθεί η εξίσωση $(2χ+1)^3+(3χ-5)^3+(4-5χ)^3=0$

22. Έστω α ακέραιος. Αν ο $α^2$ είναι περιττός , τότε να δείξετε ότι ο α είναι περιττός

23. Έστω α ακέραιος . Αν ο $α^3$ είναι περιττός , τότε να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός.

24. Να δειχθεί ότι ο $2^{100}+1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 17, δηλαδή ο $2^{100}+1$ είναι της μορφής 17κ όπου $κ\in Z$.

1.3 Η εξίσωση αχ+β = 0

Για να λύσουμε την εξίσωση ακολουθούμε το παρακάτω σχήμα :

$$\alpha\chi+\beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \Rightarrow \chi = -\dfrac{\beta}{\alpha} \\ \alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \Rightarrow \text{Ταυτοτητα} \\ \beta \neq 0 \Rightarrow \text{Αδυνατη} \end{cases} \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η παραμετρική εξίσωση : $\lambda^2(\chi-1)+3\lambda = (\chi+2)$

ΒΗΜΑ 1^{Ο} : την φέρνω στη μορφή αχ = β

$\lambda^2(\chi-1)+3\lambda = (\chi+2) \Rightarrow \lambda^2\chi-\lambda^2+3\lambda = \chi+2 \Rightarrow \lambda^2\chi - \chi = \lambda^2-3\lambda+2 \Rightarrow$

$(\lambda^2-1)\chi = \lambda^2-3\lambda+2$

ΒΗΜΑ 2^{Ο} : διακρίνω περιπτώσεις για το α και το β.

- Αν $\lambda^2-1 \neq 0 \Rightarrow$ Η εξίσωση έχει λύση την :$\chi=\dfrac{\lambda^2-3\lambda+2}{\lambda^2-1}$
- Αν $\lambda^2-1 = 0 \Rightarrow$ $\lambda =1$ ή $\lambda = -1$

  Για $\lambda = 1 \Rightarrow$ Η εξίσωση γίνεται : $0\chi = 0$ Ταυτότητα

  Για $\lambda = -1 \Rightarrow$ Η εξίσωση γίνεται : $0\chi = 6$ Αδύνατη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(2\chi+1)(3\chi-5)+1-4\chi^2 =2\chi+1$

β. $\chi^3+4\chi^2+\chi+4=0$

γ. $\dfrac{x^3+8}{x+2}+4\chi=4$

δ. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-4}$

ε. $(\chi^2-16)(3\chi-1) = (\chi+4)(3\chi-1)^2$

στ. $12(\chi-4)^2=3(2\chi-5)^2-(15\chi-12)$

ζ. $\dfrac{2}{4-x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x-6}{x^2-5x+4}=0$

26. Ομοίως οι εξισώσεις

α) $\lambda(\lambda\chi-1)=2(2\chi+1)$ β) $(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha-\beta$ γ) $(\lambda^3-1)\chi=\lambda-1$

δ) $\lambda\chi=\lambda-1$ ε) $\lambda^2\chi-\lambda^2=9\chi+3\lambda$ στ) $\lambda\chi=\lambda+\chi$

ζ) $(\lambda-1)\chi^2+(\lambda-1)\chi=0$ η) $\lambda(\chi-\lambda)=\chi-1$ θ) $\lambda^2-\lambda^3\chi=4+8\chi$

ι) $(\lambda+5)(\lambda-3)\chi=\lambda-3$

27. Να συμπληρωθούν τα παρακάτω:

α. Αν $(\lambda^2-4)\chi-\lambda=2$ έχει άπειρες λύσεις τότε λ=……………

β. Αν η $\alpha\chi+\beta=2\chi+3$ έχει δυο τουλάχιστον λύσεις τότε α=…….,β=……….

γ. Η $\frac{x^2-1}{x+1}=1$ έχει λύση την χ=…………

28. Να σημειωθεί η σωστή απάντηση σε κάθε πρόταση.

α) Αν η $(\lambda^2-1)\chi=\lambda^3-1$ είναι αδύνατη , τότε ο λ είναι ίσος με:

ι) 1 ιι) -1 ιιι)2 ιv) τίποτα απ' τα παραπάνω

β) Αν η εξίσωση $\alpha\chi+\beta=0$ είναι αδύνατη, τότε η $\beta\chi+\alpha=4\beta$ είναι:

ι) ταυτότητα ιι) αδύνατη ιιι) έχει λύση ιv) τίποτα απ' τα παραπάνω

γ) Αν η $\lambda\chi+1=\chi+\lambda$ έχει λύση διάφορη από το 1 τότε είναι :

ι) αδύνατη ιι) αόριστη ιιι) ο λ παίρνει κάθε πραγματική τιμή

ιv) έχει ακριβώς μια λύση

δ) Αν η $(\alpha^2+\beta^2)\chi+2\alpha\beta=0$ είναι ταυτότητα, τότε:

ι) $\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$ ιι) $\alpha\beta\neq0$ ιιι) α=0 ή β=0 ιv) α=0 και β=0.

29. Σε μια συνάντηση υπάρχουν τριπλάσιοι άντρες από ότι γυναίκες. Κάποια στιγμή φεύγουν 4 άντρες με τις συζύγους τους και οι άντρες τώρα είναι τετραπλάσιοι από τις γυναίκες. Να βρείτε τον αριθμό των αντρών και των γυναικών πριν την αναχώρηση.

30. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 8 . Αν αντιστρέψουμε τη σειρά των ψηφίων προκύπτει διψήφιος αριθμός μικρότερος κατά 18. Να βρεθεί ο αρχικός διψήφιος.

1.4 ΔΙΑΤΑΞΗ

Οι βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων είναι :

1. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta > 0$

2. $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$ (μεταβατική)

3. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

4. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma \\ \gamma < 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \end{cases}$

5. $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\begin{cases} \alpha + \gamma > \beta + \delta \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \end{cases}$

6. $\alpha, \beta > 0$ και $\nu \in \aleph$ τότε $\begin{cases} \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu \\ \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu \end{cases}$

7. α, β ομόσημοι τότε : $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1^{η} ΜΕΘΟΔΟΣ « της διαφοράς »

Μετασχηματίζουμε την αρχική σχέση Α > Β στην Α – Β > 0 και με πράξεις φτάνουμε σε μια προφανή σχέση .

Παράδειγμα : Να αποδειχθεί η ανισότητα : $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha \cdot \beta$.

Αρκεί να δείξω ότι : $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν.

Έχουμε : $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \geq 0$, είναι ίσον με το μηδέν όταν $\alpha = \beta$

2^{η} ΜΕΘΟΔΟΣ « συνθετική »

Παρατηρούμε ποιες απλές ανισότητες παρουσιάζονται στην ζητούμενη ανισότητα και συνθέτοντας την υπόθεση μας καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση.

Παράδειγμα : Αν ισχύει $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι : $3\alpha-4\gamma < 3\beta -4\gamma$

Ξεκινώ από την υπόθεση και συνεχίζω με τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

$α < β \Rightarrow 3α < 3β$ (γιατί $3 > 0$) $\Rightarrow 3α + (-4γ) < 3β + (-4γ) \Rightarrow$

$3α – 4γ < 3β – 4γ$ Καταλήξαμε στο ζητούμενο.

3^{η} ΜΕΘΟΔΟΣ « γραμμικού μετασχηματισμού »

Αν στην υπόθεση μας δίνονται μια ή περισσότερες σχέσεις , τότε τις μετασχηματίζουμε σε σχέσεις ισότητας και με πράξεις καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση.

Παράδειγμα :Αν $α + β = 2$, να αποδείξετε ότι : $α \cdot β \leq 1$.

Μετασχηματίζω την αρχική σχέση : $α = 2 – β$. Αρκεί να δείξω ότι :

$αβ-1 \leq 0$. Σύμφωνα με τη μέθοδο 1 έχω : $αβ – 1 = (2-β)β – 1 =$

$2β-β^2-1 = -(β-1)^2 \leq 0$ Είναι ίσο με μηδέν όταν $β = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

Αν $ν \in N-\{0\}$ τότε $α=β \Leftrightarrow α^ν = β^ν$	Σ	Λ
$α>β$ και $γ>δ$ τότε $αγ>βδ$	Σ	Λ
$αγ^2 > βγ^2$, τότε $α>β$	Σ	Λ
$α>β$ και $γ>0$ τότε $αγ>βγ$	Σ	Λ
Αν $α^2 > 1$ τότε $α>1$	Σ	Λ
Αν $α^2 + β^2 = 0$ τότε $α=β=0$	Σ	Λ
Αν $α<β<0$ τότε $\frac{1}{α} > \frac{1}{β}$	Σ	Λ
Αν $\frac{α}{β} > 1$ τότε $α>β$	Σ	Λ
Αν $-2<α<3$ τότε $4<α^2<9$	Σ	Λ

32. Αν $α > -2$, να αποδείξετε ότι : $4 + 2α > 2 + α$

33. Αν $α > -1 > β$, να αποδείξετε ότι : $1 + α + β + αβ < 0$

34. Αν $\alpha \le -2$, να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha^3}{2} + 4 \le \alpha^2 + 2\alpha$

35. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ge 4(\alpha - 2\beta + \gamma - 6)$

36. Να δειχθεί ότι:
α) $\chi^2 + \psi^2 \ge 2\chi\psi$, όπου η ισότητα ισχύει για $\chi = \psi$
β) $(\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 + \gamma^2)(\gamma^2 + \alpha^2) \ge 8$, όπου α, β, γ θετικοί και αβγ=1

37. Να αποδειχθεί ότι $(\alpha + \beta)^2 \ge 4\alpha\beta$, όπου το ίσον ισχύει όταν $\alpha = \beta$. Από όλους τους αριθμούς α, β που έχουν άθροισμα 100, να βρεθούν εκείνοι που έχουν μέγιστο γινόμενο.

38. Αν $\alpha + \beta = 4$, να αποδείξετε ότι : ι) $\alpha\beta \le 4$ ιι) $\alpha^2 + \beta^2 \ge 8$

39. Αν $-1 \le \alpha \le 2$ και $-2 \le \beta \le 10$, να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:
α) $3\alpha - 4\beta$
β) $2\alpha + \beta$

40. Αν $2 < \alpha \le 3$ και $3 < \beta \le 4$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή των παρακάτω παραστάσεων :
ι) $\alpha + \beta$ ιι) $\alpha - \beta$ ιιι) $\frac{\alpha}{\beta}$ ιv) $\alpha^2 + \beta^2$

41. Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $\lambda\chi > \lambda + \chi$ β) $\chi + 1 > \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$ γ) $\frac{10 + x}{5} - \frac{5 - x}{4} > 1$
δ) $2\lambda\chi < 5\lambda$ ε) $\chi + 16\lambda^2 \ge 4\lambda\chi + 1$ στ) $\lambda^2 + \chi \le 1 - \lambda\chi$

42. Να δειχθούν οι παρακάτω σχέσεις:
α) $4\alpha^2 - 4\alpha + 3 > 0$ β) $\alpha^2 + \beta^2 + 25 \ge 6\alpha + 8\beta$

43. Να δειχθεί η σχέση: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \gamma + \alpha \cdot \gamma \ge 0$

44. Αν $\alpha > 2$ και $\beta > 3$, να δειχθεί ότι: $\alpha\beta + 6 > 3\alpha + 2\beta$

45. Αν -1<α<1, να δειχθεί ότι $α^2<1$

46. Αν α, β, γ, δ>0 με αβγδ=1, τότε να δειχθεί : $(α^2+β^2)(γ^2+δ^2)\geq 4$

47. Αν χ, ψ, κ >0 , να δειχθεί ότι $(χ+ψ+κ)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\kappa}\right) \geq 9$.

48. Αν για τους α, β$\in$R ισχύει $α^2+α\,β+β^2=1$, να αποδειχθεί ότι $-1\leq α\cdot β\leq \frac{1}{3}$.

49. Να δειχθούν οι σχέσεις:

α) Αν 0<α<1 , τότε $α^{\nu}<α^2$, για κάθε ν>2

β) $3^{100}+4^{100}<5^{100}$

50. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ , να δειχθεί ότι : $α^2+β^2+γ^2<2αβ+2βγ+2αγ$.

1.6 ΑΠΟΛΥΤΑ

Για τα απόλυτα ισχύουν τα παρακάτω :

1. $|a|=\begin{cases} a, a\geq 0 \\ -a, a<0 \end{cases}$

2. $|\alpha|\geq 0$ για κάθε $α\in\Re$

3. $-|\alpha|\leq α\leq|\alpha|$

4. $|\alpha|^2=α^2$

5. $|x|=θ$ και θ >0 $\Leftrightarrow$ x = $\pm$θ

6. $|x|=|\alpha|\Leftrightarrow$ x = $\pm$α

7. $|x|\leq θ\Leftrightarrow -θ\leq x\leq θ$, θ >0

8. $|x|\geq θ\Leftrightarrow$ x$\geq$θ ή x$\leq$ -θ , θ >0

9. $|a\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$

10. $\left|\frac{a}{\beta}\right|=\frac{|a|}{|\beta|}$

11. $|\alpha|-|\beta|\leq|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51. Να γραφούν χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής :

Α = $|x^2+1|$ Β = $3-|x+1|$ Γ = $|4x+2|$

Δ = $|-1+2\alpha-\alpha^2|$ Ε = $|2|\alpha|+3|$

52. Να γραφούν χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής :

Α= 1+χ-$|x-2|$ Β = $|4-x|-|x+4|$ Γ = $|x-2|+|2-x|$

53. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω παραστάσεις :

1.	Αν $\alpha^2=\beta^2$, τότε $\|a\|=\|\beta\|$	Σ Λ
2.	Αν $\|\alpha\|=1$, τότε α=1	Σ Λ
3.	Αν $\|\alpha\|=-\alpha$, τότε $\|-\alpha\|=\alpha$	Σ Λ
4.	Αν $\|\alpha\|+\|\beta\|=0$, τότε α=β=0	Σ Λ
5.	Αν $\|\alpha\|=\|\beta\|$, τότε α=β	Σ Λ
6.	Ισχύει $\|a-\beta\|=\|\alpha\|-\|\beta\|$	Σ Λ
7.	$\|x-2\|=\|2-x\|$	Σ Λ
8.	Αν $\|x\|<2$, τότε χ < 2 ή χ > -2	Σ Λ
9.	Αν $\|x\|>3$, τότε χ >3 και χ < -3	Σ Λ
10.	$\|3+x^2\|=x^2+3$	Σ Λ
11.	Αν χ < 2 , τότε $\|3-x\|=x-3$	Σ Λ
12.	Αν $\|x-\psi\|=0$, τότε $\chi^2-\psi^2=0$	Σ Λ

54. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $|x-1|=7$ β) $2|x|+\chi=12$ γ) $2|3x+1|=3|2x+1|$

δ) $|3x-4|=5$ ε) $|2-x|=4$ στ) $2-2|x|+1-|x|=3$

ζ) $|x+4|=-2$ η) $\dfrac{5-|1-3x|}{6}=0$

55. Ομοίως :

α) $||x|+1|=1$ β) $||x|-3|=3$ γ) $|3-|2x||=1$

56. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\frac{3|x|+1}{2}+\frac{2|x|-1}{3}=\frac{|x|+2}{3}$ β) $\frac{|1-2x|+2}{5}+1=\frac{2|1-2x|}{3}$

γ) $\frac{|x-11|+1}{2}+1+\frac{9-3|x-11|}{4}=\frac{2|x-11|}{3}-|x-11|$

57. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $|x|\le 3$ β) $1\le|2x-1|\le 3$ γ) $|x+2|<3$

δ) $|x-1|>4$ ε) $|-2x+4|<5$ στ) $3\le|x|\le 5$

ζ) $|x|\ge -3$ η) $2<|x-1|\le 4$

58. Ομοίως :

α) $\frac{|x|+3}{2}-\frac{2(|x|+1)}{3}\le|x|-5$ β) $\frac{2|3-x|-1}{3}-|3-x|>\frac{|3-x|-8}{3}+1$

59. Ομοίως :

α) $||x|-2|\le 1$ β) $||x+1|-4|<3$ γ) $||1+2x|-1|>2$

δ) $|2-|x||\ge 4$

60. Αν ισχύουν $|x|\le 1$, $|\alpha|\le 2$, $|\beta|\le 3$, να δειχθεί ότι

α) $|x-2a+3\beta|\le 14$ β) $|x-a|\le 3$ γ) $|2x+a|\le 4$

61. Αν $|x|<3$ και $|y|<\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι :

α) $|2x+2y|<7$ β) $|4y-x-1|<6$ γ) $|3x^2-8y^2-x+y|<\frac{65}{2}$

62. Να αποδείξετε ότι :

i) $|x+y| = |x|+|y|$, αν και μόνο αν xy $\geq$ 0

ii) $|x+y| = ||x|-|y||$, αν και μόνο αν $xy \leq 0$

iii) $|x|+|y| = ||x|-|y||$, αν και μόνο αν xy = 0

63. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) 2χ+3$|x|$-10 = 0 β) χ-$|x|$+2 = 0

64. Να λυθούν οι ανισώσεις :

α) $|3x-2| \geq x+2$ β) $|2-x| < x$ γ) $3|x+1| > x-1$

65. Αν α, β , γ θετικοί πραγματικοί να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης

$$K = \frac{\alpha}{|\alpha|}+\frac{\beta}{|\beta|}+\frac{\gamma}{|\gamma|}$$

66. Αν ισχύουν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=30$ και αβ+βγ+γα=17 , να δειχθεί ότι $|\alpha+\beta+\gamma|$=8.

67. Αν α+β+γ=1, να δειχθεί ότι $|1-\alpha|+|1-\beta|+|1-\gamma| \geq 2$

1.7 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ

Οι κυριότερες ιδιότητες των ριζών είναι :

1. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ α, β $\geq$0

3. $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$, α $\geq$0

4. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ **,** α, β$\geq$0

5. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$ = α , α$\geq$0

6. $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, α$\geq$0

Η ΕΞΙΣΩΣΗ : $x^\nu = \alpha$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- ν άρτιος και α >0 → $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[\nu]{a}$
- ν άρτιος και α <0 → $x^{\nu} = a \Leftrightarrow$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

- ν περιττός και α >0 → $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$
- ν περιττός και α <0 → $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|a|}$

<u>Σχόλιο :</u> Θυμίζουμε επίσης την ιδιότητα : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, μ, ν $\in \aleph$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

68. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

α) $\sqrt{(x-2)^2}$, όταν χ ≤ 2 β) $\sqrt{(3-x)^2}$, όταν χ > 3

γ) $\sqrt{(x+2)^2}$, όταν χ $\leq$ -2 δ) $\sqrt{(a-\beta)^2}$

69. Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\sqrt{a^2}$ =α	Σ	Λ
2. $\sqrt[4]{a} = \sqrt{a}$	Σ	Λ
3. $\sqrt{\sqrt{a^4}}$ =α	Σ	Λ
4. Οι $\sqrt{5}$ +2 και $\sqrt{5}$ -2 είναι αντίστροφοι	Σ	Λ
5. $\sqrt[\nu]{a^{\nu}}$ =α	Σ	Λ
6. Αν α$\geq$0 , τότε $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha}}$	Σ	Λ
7. Η χ^{10} =1 έχει μια πραγματική λύση	Σ	Λ
8. Η χ^{10} = -1, είναι αδύνατη.	Σ	Λ
9. Η χ^{10} = -χ, έχει δυο πραγματικές ρίζες	Σ	Λ

70. Να συμπληρωθούν τα παρακάτω

α) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ γ) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

δ) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ε) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ στ) $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$

ζ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ η) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

71. Να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{4}{4-\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}=\dfrac{21}{11}$ β) $\dfrac{1}{(5-\sqrt{7})^2}+\dfrac{1}{(5+\sqrt{7})^2}=\dfrac{16}{81}$

72. Αν χ = $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) χ + $\dfrac{1}{x}$ β) χ - $\dfrac{1}{x}$ γ) $χ^2$-$(\dfrac{1}{x})^2$

73. Να γίνουν οι αντιστοιχήσεις

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\sqrt{\sqrt{4}}$	α. 2
2. $\sqrt{\sqrt{16}}$	β. $\sqrt[6]{2}$
3. $\sqrt[5]{\sqrt[6]{32}}$	γ. $\sqrt{2}$
4. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{64}}$	δ. $\sqrt[3]{2}$
5. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}$	ε. $\sqrt[4]{2}$

74. Να βρείτε τα εξαγόμενα :

α) $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$ β) (4+$\sqrt{6})\cdot(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})$

β) (12$\sqrt{50}-8\sqrt{200}+7\sqrt{450})\div\sqrt{10}$

75. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας ρίζας :

α) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ β) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ γ) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}}$

δ) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$ ε) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4\beta^8}}$ στ) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$

ζ) $\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\ \sqrt[4]{3}$

76. Να βρείτε τα εξαγόμενα :

α) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$ β) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{4}$ γ) $\sqrt{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2}$

77. Να δειχθεί ότι:

α) $\sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$ β) $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$

78. Να συγκριθούν οι αριθμοί :

α) $\sqrt{5}, \quad \sqrt{3} + 3$ β) $\sqrt{12} - \sqrt{5}, \quad \sqrt{10} - \sqrt{6}$ γ) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$, $\sqrt[13]{5}$

79. Να συγκριθούν οι αριθμοί $\sqrt{a}$ + $\sqrt{a+1}, \sqrt{2a} + 1$,όπου α>1.

80. Να βρεθεί ο χ $\in$R, ώστε οι αριθμοί χ ^{2} +$\sqrt{15}$, χ^2 - $\sqrt{15}$ να είναι αντίστροφοι.

81. Αν για τους α, β$\in$R και είναι θετικοί, ισχύει α+β=1να δείξετε ότι :

$(2\sqrt{a} + \sqrt{\beta})^2 + (\sqrt{a} - 2\sqrt{\beta})^2 = 5$

82. Αν ισχύει χ+ ψ= $\sqrt{a+4}$ και χ-ψ= $\sqrt{a}$, να δειχθεί ότι χψ=1.

83. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $χ^4 = 4χ$ β) $x^5 = 81χ$ γ) $χ^5 + 32 = 0$

δ) $χ^4 - 16 = 0$ ε) $χ^3 + χ = 0$ στ) $χ^4 + χ = 0$

ζ) $χ^4 + 8χ = 0$ η) $2χ^{10} + χ^3 = 0$ θ) $(4χ + χ^7)(χ^8 - 256) = 0$

ι) $(χ^3 - 343)(χ^8 + χ) = 0$