2.1 Σύνολα

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ – ΓΡΑΦΗ ΣΥΝΟΛΟΥ

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους :

1) Παράσταση με αναγραφή των στοιχείων

Όταν δίνονται τα στοιχεία ενός συνόλου και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δυο αγκίστρων, από μια φορά το καθένα, χωρίζοντας τα με κόμμα. π χ.

$$A=\{ 2,4,6,8,10 \}$$

2) Παράσταση με περιγραφή των στοιχείων

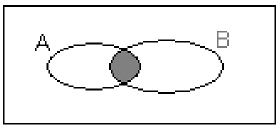
Όταν σε ένα σύνολο επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα τότε η γραφή του συνόλου γίνεται ως εξής :

$$A= \{ \chi\in \Omega \ / \ \chi \text{ έχει την ιδιότητα } \Pi \}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ

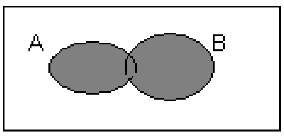
1) Τομή

$A\cap B= \{ \chi \ / \ \chi\in A \text{ και } \chi\in B \}\rightarrow$ Είναι τα κοινά στοιχεία των συνόλων Α , Β.



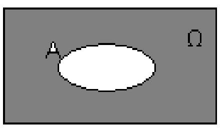
2) Ένωση

$A\cup B= \{ \chi \ / \ \chi\in A \text{ ή } \chi\in B \}\rightarrow$ Όλα τα στοιχεία των Α, Β μαζί.



3) Συμπλήρωμα

$A' =\{ \chi \ / \ \chi\notin A \} \rightarrow$ Τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο Α.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξεταστεί αν τα παρακάτω Α και Β σύνολα είναι ίσα :

ι) $A = \{ \chi \in Z \ / -3 < \chi < 1 \}$ και $B = \{ -3, -2, -1, 0, 1 \}$

ιι) $A = \{ \chi \in \Re \ / -1 \le \chi \le 1 \}$ και $B = \{ -1, 0, 1 \}$

ιιι) $A = \{ \chi \in \aleph \ / -3 \le \chi \le 2 \}$ και $B = \{ 1, 2 \}$

ιν) $A = \{ \chi \in \Re \ / \ 2\chi \le \chi \le -1 \}$ και $B = \{ -1, 0 \}$

2. Να εξεταστεί αν το $A = \varnothing$, όταν :

ι) $A = \{ \chi \in \Re \ / \ 3\chi^2 + = 0 \}$ ιι) $A = \{ \chi \in Z \ / \ 4\chi^2 - 1 = 0 \}$
ιιι) $A = \{ \chi \in \Re \ / \ (\chi-1)^4 + \sqrt{x+2} = 0 \}$

3. Έστω $A = \{ 1,2,3 \}$ και $B = \{2,3,4\}$ και $\Gamma = \{1,2,3,4\}$ και $\Delta = \varnothing$. Να βρείτε τα σύνολα : $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cup \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $A \cup \Delta$, $B \cap \Delta$, $(A \cup B) \cap \Delta$, $(A \cap B) \cup \Gamma$, $(A \cup B) \cap \Gamma$.

4. Αν $\Omega = \{ -1,0,\alpha,2,\beta\}$, $A = \{ 0,\alpha,\beta\}$, $B = \{0,2\}$, να βρείτε τα σύνολα : A' , B' , $A' \cap B$, $A' \cup B$, $A \cap B'$, $A \cup B'$, $(A \cap B)'$, $(A \cup B)'$, $A' \cap B'$

5. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα :

$A = \{ \psi \in \aleph \ / -4 \le \psi \le 2 \}$ $B = \{ \chi \in \aleph \ / \ 3\chi^2 = 27 \}$
$\Gamma = \{ \chi \in Z \ / \ 3\chi^2 - 5\chi = 0 \}$ $\Delta = \{ (\chi,\psi) \ / \ \chi \in \aleph , \psi \in \aleph , \chi+\psi = 2 \}$
$E = \{ (\chi,\psi) \ / \ \chi \in Z , \psi \in \aleph , \chi^2+\psi^2 = 4 \}$
$Z = \{ \chi \in \Re \ / \ (3\chi-5)^2(3-\chi) = 0 \}$
$\Pi = \{ \chi \in \aleph \ / \ |x-1| < 2 \}$

6. Για ποιες τιμές του $\chi \in \Re$, τα σύνολα : $A = \{ 1-\chi , \chi+2 \}$, $B = \{1 ,2 \}$ είναι ίσα ;

7. Να βρεθούν οι τιμές του $\chi \in \Re$, για τις οποίες τα σύνολα $A = \{ 2\chi^2 , 18 \}$ και $B = \{ 6\chi , 18 \}$ είναι ίσα.

8. Δίνονται τα σύνολα : $A = \{2,\lambda \}$, $B = \{ 5 , \mu\}$. Αν ισχύει $A \subseteq B$ να δείξετε ότι $A = B$.

2.2 Η έννοια της συνάρτησης

Κατηγορίες Ασκήσεων - Μεθοδολογία

Κατηγορία 1

Αν μου ζητείται να υπολογίσω την τιμή μιας συνάρτησης για χ = κ , τότε αντικαθιστώ όπου χ το κ στον τύπο της συνάρτησης. Αν η συνάρτηση είναι πολλαπλού τύπου , βάζω χ = κ στον κατάλληλο τύπο.

Παράδειγμα 1^{o}: Δίνεται η συνάρτηση f (χ) = χ^2-2χ. Βρείτε το f (0) , f (2) , f (-1)

ΛΥΣΗ

Για χ = 0 στο τύπο της συνάρτησης έχω : f (0) = $0^2 - 2\cdot 0 = 0$,

Για χ =2 στον τύπο της συνάρτησης έχω : f (2) = $2^2 - 2\cdot 2 = 0$,

Για χ= -1 τύπο της συνάρτησης έχω : f (-1) = $(-1)^2 - 2\cdot(-1) = 3$

Παράδειγμα 2^{o}:Δίνεται η συνάρτηση f (χ) = $\begin{cases} 2x-5, x<1 \\ 5, x=1 \\ x^2-2, x>1 \end{cases}$, βρείτε f (0),f (2),f(1)

ΛΥΣΗ

Επειδή χ=0 < 1, θα αντικαταστήσω στον τύπο : f (χ)= 2χ-5 , f (0) = 2 ·0 -5 = -5

Ομοίως χ = 2 > 1 , θα αντικαταστήσω στον τύπο : f (χ) = χ^2-2 , f (2) = 2^2-2 = 2

Για χ = 1 , f (χ) = 5 , άρα f (1) = 5.

Κατηγορία 2

Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτησης (συμβολίζεται με Α). Αν η συνάρτηση είναι κλασματική ο παρανομαστής δεν πρέπει να είναι μηδέν. Αν η συνάρτηση περιέχει ριζικό, η ποσότητα μέσα στην ρίζα πρέπει να είναι $\geq$ 0.

Παράδειγμα 1^{o}: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

$$f(\chi) = \frac{2}{3x-6} \quad , \quad g(x) = \frac{3}{x^2+4} \quad , \quad h(x) = \frac{x-2}{x^2-2x}$$

ΛΥΣΗ

Για την f (χ) , πρέπει : $3\chi-6 \neq 0 \Rightarrow 3\chi \neq 6 \Rightarrow \chi \neq 2 \Rightarrow$ A = $\Re - \{2\}$

Για την g(x) , πρέπει : $\chi^2+4 \neq 0 \Rightarrow \chi^2 \neq -4 \Rightarrow$ Ισχύει πάντα $\Rightarrow$ A = $\Re$

Για την h(x),πρέπει :$\chi^2-2\chi \neq 0 \Rightarrow \chi\cdot(\chi-2) \neq 0 \Rightarrow \chi \neq 0$ και $\chi \neq 2 \Rightarrow$ A= $\Re$ -{0,2 }

Παράδειγμα 2^o: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

$$f(χ) = \sqrt{2x-4}\ ,\ g(x) = \sqrt{x^2+2}.$$

ΛΥΣΗ

Για την f (χ) , πρέπει : $2χ-4 \geq 0 \Rightarrow 2χ \geq 4 \Rightarrow χ \geq 2 \Rightarrow$ Α= $[2, +\infty)$

Για την g(x) , πρέπει : $χ^2+2 \geq 0 \Rightarrow χ^2 \geq -2 \Rightarrow$ Ισχύει πάντα $\Rightarrow$ Α = $\Re$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9. Αν f (χ) = 2χ-6 , να βρεθεί ο αριθμός α για τον οποίο ισχύει :
ι) f (α) = 8 , ιι) f (8) = α

10. Αν για την συνάρτηση :f (χ) = 2χ+α ισχύει : f (3)=4 , να βρείτε το f (4).

11. Αν για την συνάρτηση : f (χ) = $αχ^3-2βχ$ ισχύουν : f (1) = -2 και f (2) =20,να υπολογιστεί το f (3).

12. Αν f (χ) = 5χ-4 , να υπολογιστούν οι παραστάσεις :
ι) f (χ) + f (ψ) ιι) f (χ+ψ) ιιι) f (χ) - f (ψ) ιν) $f(χ^2)-(f(χ))^2$

13. Δίνεται : f (χ) = $3χ-χ^2$. Να λυθεί η εξίσωση : f (χ)- 2f (-1) = $χ^2$f (1) +8

14. Δίνεται η συνάρτηση : f (χ) = $\dfrac{x^3-x}{x-1}$, να λυθεί η εξίσωση : f (χ) = 0

15. Δίνεται f (χ) = $\begin{cases} 2x-3, x<0 \\ x^2+1, x\geq 0 \end{cases}$, βρείτε f (-2) , f (0) , f ($\frac{3}{2}$) , f (-1).

16. Δίνεται f (χ) = $\begin{cases} x, x\in Z \\ 2, x\notin Z \end{cases}$, βρείτε f (-3) , f ($\frac{1}{2}$) , f(0) , f ($\sqrt{2}$) , f (π).

17. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

ι) f (χ) = $\sqrt[3]{14-2x}$, ιι) τ(χ) = $\sqrt{-x}$ ιιι) κ(χ) = $\sqrt{3-|x|}$ ιν) λ(χ) = $\dfrac{2x-5}{x^2-5x}$

ν) ρ(χ) = $\sqrt{2x-10}-\sqrt[4]{10-x}$ νι) ε(χ) = $\sqrt{2|x|-4}+\dfrac{1}{x^2-3x}$

νιι) π(χ) = $\sqrt{4x^2-1}+x+\dfrac{1}{x+1}$ νιιι) μ(χ) = $\sqrt{1-9x^2}+2x+\dfrac{1}{x}$

18. Δίνεται f (χ) = $\begin{cases} \frac{1}{x}, 0<|x|<1 \\ 3, x=0 \\ x, |x|\geq 1 \end{cases}$, να βρείτε f (-1) , f (0) , f (-$\frac{1}{2}$) , f (-$\frac{3}{2}$).

19. Αν f (χ) = αχ+β , να αποδείξετε ότι :
ι) f (χ –ψ) + f (χ +ψ) = 2f (χ) ιι) f (κ^2) + f (λ^2) $\geq$ 2f ($|κλ|$) , αν α$\geq$0

20. Αν f (χ) = 2χ-3 , να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης : g(χ) = f (f (χ)).

21. Αν f (χ) = $\frac{x-3}{x-1}$, να αποδείξετε ότι : f (f (χ)) = χ , για κάθε χ$\neq$ 1.

2.3 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Κατηγορία 1

Εύρεση συμμετρικών σημείων . Αν Μ(χ,ψ) είναι ένα τυχαίο σημείο , τότε :
το συμμετρικό του ως προς χχ’ είναι : Μ΄ (χ , -ψ) , ίδια τετμημένη
το συμμετρικό του ως προς ψψ΄ είναι : Μ΄΄ (-χ , ψ) , ίδια τεταγμένη,
το συμμετρικό του ως προς το (0,0) , είναι : Μ΄΄΄ (-χ, -ψ)
το συμμετρικό του ως προς την ψ = χ είναι : Μ΄΄΄΄ (ψ, χ)

Παράδειγμα : Να βρεθεί το συμμετρικό του Α(0,-5) ως προς :
ι) χχ΄ ιι) ψψ΄ ιιι) το (0,0) ιν) την ψ=χ

ΛΥΣΗ

ι) ως προς χχ’ είναι το σημείο : Α΄ (0,5)
ιι) ως προς ψψ΄ είναι το σημείο : Α΄΄ (0,-5) , το ίδιο επειδή το Α είναι πάνω στον άξονα ψψ΄.
ιιι) ως προς το (0,0) , είναι το σημείο :Α΄΄΄ (0,5)
ιν) ως προς την ψ = χ είναι το σημείο : Α΄΄΄΄(-5,0)

Κατηγορία 2

Εύρεση της απόστασης δυο σημείων . Αν Α($χ_1$,$ψ_1$) και Β($χ_2$, $ψ_2$) δυο τυχαία σημεία τότε η απόσταση του δίνεται από τον τύπο :

D = $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(ψ_1-ψ_2)^2}$, και είναι πάντα αριθμός θετικός.

Παράδειγμα : Να βρεθεί η απόσταση των σημείων Α(2,1) , Β(5,5)

ΛΥΣΗ

D = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2}$ = $\sqrt{(2-5)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

<u>Κατηγορία 3</u>

Εύρεση των σημείων τομής μιας συνάρτησης με τους άξονες.

Για να βρούμε το σημείο που τέμνει μια συνάρτηση τον χχ΄ , παίρνουμε f (χ) = 0 και βρίσκουμε την τετμημένη του σημείου, έστω κ , άρα το ζητούμενο σημείο είναι το (κ,0).

Για να βρούμε το σημείο που τέμνει μια συνάρτηση τον ψψ΄ , παίρνουμε χ=0 και βρίσκουμε την τεταγμένη του σημείου, έστω λ, τότε το ζητούμενο σημείο είναι το (0,λ).

Παράδειγμα : Βρείτε τα σημεία τομής της g(χ) = 2-χ^2 με τους άξονες.

ΛΥΣΗ

χ= 0 $\Rightarrow$ g(0) = 2-0^2 = 2 , άρα η g(χ) τέμνει τον ψψ΄ στο σημείο (0,2)

g(χ) = 0 $\Rightarrow$ 2-χ^2 = 0 $\Rightarrow$ 2 =χ^2 $\Rightarrow$ χ= $\pm\sqrt{2}$, η g(χ) τέμνει τον χχ΄ στα σημεία

(2,0) και (-2,0)

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

22. Βρείτε τα συμμετρικά των σημείων Α(2,-3) , Β(0,-4) , Γ(5,0) ως προς :

ι) τον χχ΄ ιι) τον ψψ΄ ιιι) το (0,0) ιv) την ψ=χ

23. Ομοίως για τα σημεία : Δ(5,-4) , Ε(-3,0) , Ζ(0,3)

24. Αν Α(-3,0) και Β(0,4) , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ όπου Ο η αρχή των αξόνων.

25. Για ποιες τιμές του χ η απόσταση των Α(χ-1, -2) και Β(5,-2) είναι ίση με 3 ;

26. Για ποιες τιμές του α $\in \Re$,το σημείο Μ(-α, 3α) ανήκει στη γραφική παράσταση της g(χ) = 3χ-χ^2

27. Να βρεθεί η τιμή του κ $\in \Re$, για την οποία η f (χ) = 2χ-κ+1 τέμνει :

ι) τον χχ΄ στο σημείο με τετμημένη $-\frac{1}{2}$

ιι) τον ψψ΄ στο σημείο με τεταγμένη 4

28. Δίνεται g(χ) = $χ^2$-9 με πεδίο ορισμού [2, + ∞). Να βρεθούν τα κοινά σημεία της g(χ) με τον : ι) χχ΄ ιι) ψψ΄

29. Βρείτε τα σημεία τομής των συναρτήσεων με τους άξονες :

ι) g(χ) = $3χ^2+5$ ιι) f (χ) = $20-4χ^2$ ιιι) κ(χ) = 3(χ+1)(χ-4)

ιv) λ(χ) = $χ^3-χ$ v) π(χ) = $3-|x-3|$ vι) ρ(χ) = $|x-1|-|x+2|$

30. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της g(χ) = 2χ+15 που έχει:

ι) τετμημένη -3 ιι) τεταγμένη 13 ιιι) αντίθετες συντεταγμένες

31. Δίνονται Α(6,0) και Β(1,5) . Να βρεθεί σημείο Γ του ψψ΄ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ.

32. Δίνονται Α(0,0) , Β(0,-2). Να βρεθούν όλα τα σημεία Γ για τα οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

33. Θεωρούμε τα σημεία Α(1,3) , Β(-1,1) , Γ(3,-3) . Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

34. Να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές Α(-1,3) , Β(1,1) , Γ(-3,1) είναι ισοσκελές.

35. Δίνονται Α(-2,1) , Β(1,-1) , Γ(-3,-1) , Δ(2,1).

ι) να υπολογιστούν τα μήκη (ΑΔ) , (ΒΓ) , (ΑΓ) , (ΒΔ).

ιι) δείξτε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

36. Βρείτε τις τιμές των α , $β \in \Re$, για τις οποίες τα σημεία Μ(2α , -β) και Ν(12-α , 2α+3β) , είναι συμμετρικά ως προς :

ι) χχ΄ ιι) ψψ΄ ιιι) το (0,0)

37. Να βρείτε τα σημεία τομής των συναρτήσεων με τους άξονες.

ι) f (χ) = $4χ\sqrt{x-3}$ ιι) g(χ) = $3\sqrt{x}+2x$ ιιι) τ(χ) = $χ^2$-χ-12

38. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων f (χ) = 5 και g(χ) = 2χ-1.

39. Ομοίως για τις συναρτήσεις :

ι) f (χ) = $χ^2$-3χ και g(χ) = $-χ^2$ ιι) f (χ) = $χ^3$+1 και g(χ) = $χ^2$+χ

40. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων είναι πάνω από τον χχ΄

ι) f (χ) = 2χ+6 ιι) f (χ) = $\frac{3}{2}$ ιιι) g(χ) = $|x-1|$-1

41. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις f (χ) είναι κάτω από τις g(χ).

ι) f (χ) = χ και g(χ) = 2χ-5 ιι) f (χ) = 4 και g(χ) = $|x|$ - 1

2.4 Η συνάρτηση ψ=αχ+β

Παρατήρηση

Η ψ = αχ+β παριστάνει ευθεία. Ο αριθμός α$\in\Re$, όταν η συνάρτηση έχει αυτή τη μορφή , καλείται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας και ισχύουν :

- α = εφω , όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον χχ΄
- αν α > 0 , η ευθεία σχηματίζει οξεία γωνία με τον χχ΄
- αν α< 0 , η ευθεία σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον χχ΄

Κατηγορία 1

Αν ζητείται να υπολογίσουμε παράμετρο μιας ευθείας όταν αυτή είναι παράλληλη ή κάθετη με δοσμένη ευθεία , τότε τις φέρνουμε και τις δυο στη μορφή : ψ = αχ+β . Για την παραλληλία και την καθετότητα δυο ευθειών ισχύει :

Έστω ε_1: y = $\alpha_1 x+\beta_1$ και ε_2: y = $a_2 x+\beta_2$.

→ {οι ε_1, ε_2 είναι παράλληλες }$\Rightarrow${οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι ίσοι}$\Rightarrow${$a_1 = a_2$}.

→ {οι ε_1 και ε_2 είναι κάθετες }$\Rightarrow${το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης είναι ίσο με -1}$\Rightarrow${$a_1 a_2 = -1$}

Παράδειγμα :Βρείτε το λ $\in\Re$ αν οι ευθείες ε_1: ψ= (λ^3-1)χ+80 , ε_2: ψ =3λ(λ-1)χ είναι παράλληλες.

ΛΥΣΗ

Είναι στη μορφή ψ =αχ + β. Εξισώνω τα α.

λ^3-1 = 3λ(λ-1) $\Rightarrow$ (λ-1)(λ^2+λ+1) = 3λ(λ-1) $\Rightarrow$ (λ-1)(λ^2+λ+1) – 3λ(λ-1) = 0

$(λ-1)[\ (λ^2+λ+1) -3λ\ ] = 0 \Rightarrow λ-1 = 0$ ή $λ^2-2λ+1 = 0 \Rightarrow λ=1$ ή $(λ-1)^2 = 0$. Άρα για λ =1 οι ευθείες είναι παράλληλες.

Παράδειγμα :Να βρεθεί ο $λ \in \Re$ ώστε οι ευθείες $ε_1$: $ψ = \frac{1-λ}{12}χ+8$,

$ε_2$: $ψ = \frac{λ+1}{2}χ- 6$, να είναι κάθετες .

ΛΥΣΗ

Πρέπει το γινόμενο των συντελεστών να είναι ίσο με -1. Δηλαδή :

$$\frac{1-λ}{12}\cdot\frac{λ+1}{2} = -1 \Rightarrow \frac{(1-λ)(λ+1)}{24} = -1 \Rightarrow 1-λ^2 = -24 \Rightarrow λ^2 = 25 \Rightarrow λ = \pm 5 .$$

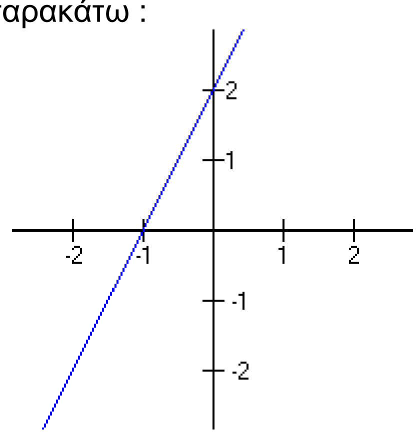
<u>Κατηγορία 2</u>

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να γίνει η γραφική παράσταση μιας ευθείας. Τότε βρίσκω τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες, όπως στην προηγούμενη παράγραφο.

Παράδειγμα :Να γίνει η γραφική παράσταση της ψ = 2χ+2.

ΛΥΣΗ

Βρίσκω τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες.
Για $χ = 0 \Rightarrow ψ = 2 \Rightarrow$ Βρήκα το σημείο : (0,2)
Για $ψ = 0 \Rightarrow 0 = 2χ+2 \Rightarrow χ = -1$, βρήκα το σημείο (-1,0). Η γραφική παράσταση της φαίνεται παρακάτω :



ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

42. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των παρακάτω ευθειών :

α) $ψ = 2χ – 5$ β) $ψ = \frac{5x-6}{10}$ γ) $ψ = 3 – χ$

δ) $χ = 2ψ +3$ ε) $ψ = 2χ-1 + λχ$ στ) $ψ = 0$

43. Να βρεθεί η γωνία ω που σχηματίζει με τον χχ΄ ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης :
α) 1 β) -1 γ) 0 δ) $\sqrt{3}$

44. Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(-3,0) και Β(0, $\sqrt{3}$). Να βρείτε :
α) την εξίσωση της ε
β) τον συντελεστή διεύθυνσης της ε
γ) τη γωνία που σχηματίζει η ε με τον χχ΄

45. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία :
ι) Α(0,2) και Β(2,0) ιι) Α(-2,1) , Β(-2,10) ιιι) Α(-3,4),Β(2,4)

46. Για ποια τιμή του λ , η ευθεία ψ = (2λ-3)χ – 5 είναι παράλληλη με τον χχ΄;

47. Να βρείτε τον λ $\in \Re$, ώστε οι ευθείες ψ= λ(2-χ) και ψ = (λ^2+1)χ-λχ , να είναι κάθετες.

48. Να βρείτε τον λ $\in \Re$, ώστε οι ευθείες : ψ = $|\lambda+1|$χ, λ $\neq$ 0 και ψ = 2λχ-1 , να είναι παράλληλες.

49. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες με εξισώσεις :
ψ= λ^3χ + 3λ και ψ = 4λχ – 6 είναι παράλληλες.

50. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες με εξισώσεις ψ = λ^2χ+1 και ψ = χ + λ
α) είναι παράλληλες β) είναι κάθετες

51. Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες είναι κάθετες οι ευθείες με εξισώσεις :
ι) ψ = χ και μ^2χ+4ψ = 1 ιι) $2\mu^2$χ+ψ = 17χ και χ-ψ+1 = 0

52. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες με εξισώσεις : ψ = (λ-2)(3λ+1)χ – 5 και ψ = (2-λ)(λ+1)χ +6 είναι παράλληλες.

53. Δίνονται οι ευθείες ε_1 : ψ = (λ^2+1)χ+5 και ε_2 : ψ = 2λχ+1. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε αυτές να είναι παράλληλες και στη συνέχεια να τις παραστήσετε γραφικά.

54. Να βρείτε την τιμή του κ, αν οι ευθείες ε_1 : ψ= $\frac{k-1}{2}$χ+1 και ε_2 : ψ= $\frac{k+1}{3}$χ είναι παράλληλες και στη συνέχεια να τις παραστήσετε γραφικά.

55. Να βρείτε την τιμή του κ αν η ευθεία $\varepsilon_1 : \psi = (4\kappa+3)\chi + \kappa$ είναι παράλληλη με την $\varepsilon_2 : 5\chi+\psi = 4$.

56. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες η ευθεία : $\psi = 2\chi-6$.

57. Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία Μ(1-λ,-2λ-1) ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση : $\psi = 2\chi-3$

58. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων :
α) $f(\chi) = 3\chi-6$ β) $f(\chi) = -2$ γ) $f(\chi) = 0$
δ) $f(\chi) = 3\chi-6$, $\chi\in[0,2]$ ε) $f(\chi) = -2$, $\chi > 1$
στ) $f(\chi) = 0$, $\chi < 0$

59. Ομοίως για τις συναρτήσεις :

α) $f(\chi) = \begin{cases} -x, x \le 2 \\ -2, 2 < x \le 3 \\ 2x, x > 3 \end{cases}$ β) $f(\chi) = \begin{cases} x+2, x \ge -1 \\ x, x < -1 \end{cases}$

γ) $f(\chi) = \begin{cases} 2, -3 \le x < 1 \\ -1, x \ge -1 \end{cases}$

60. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

1. Η ευθεία $\psi = \frac{x+2}{3}$ διέρχεται από το (-2,0) Σ Λ
2. Η $\psi = -\chi+\frac{1}{2}$ τέμνει τον ψψ΄ στο $(0,-\frac{1}{2})$ Σ Λ
3. Οι ευθείες $\psi = \lambda\chi+5$, περνούν από το (0,5) για κάθε λ. Σ Λ
4. Οι ευθείες $\psi = \alpha$ και $\chi = \beta$ τέμνονται για κάθε α , β. Σ Λ
5. Οι ευθείες $\psi = \chi+1$ και $\psi = \frac{3x-1}{3}$ είναι παράλληλες. Σ Λ
6. Οι ευθείες $\psi = 3\chi+7$ και $\psi = -2\chi-3$ τέμνονται στο (-2,1) Σ Λ

61. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \lambda\chi+4$, $\lambda < 0$. Να βρείτε :
α) τα σημεία που τέμνει τους άξονες ,
β) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται ,
γ) την τιμή του λ ώστε το παραπάνω εμβαδόν να είναι 2 τετραγωνικές μονάδες.

2.5 Μελέτη συνάρτησης

Ορισμοί

- Μια συνάρτηση f (χ) καλείται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) < f(\chi_2)$

- Μια συνάρτηση f (χ) καλείται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν για κάθε χ_1 , $\chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) > f(\chi_2)$

- Μια συνάρτηση f (χ) καλείται **άρτια** σε ένα διάστημα Δ όταν για κάθε χ $\in \Delta \Rightarrow$ το $-\chi \in \Delta$ και ισχύει : $f(-\chi) = f(\chi)$

- Μια συνάρτηση f (χ) καλείται **περιττή** σε ένα διάστημα Δ όταν για κάθε χ $\in \Delta \Rightarrow$ το $-\chi \in \Delta$ και ισχύει : $f(-\chi) = -f(\chi)$

- Μια συνάρτηση f (χ) παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$ του πεδίου ορισμού της Α όταν για κάθε $\chi \in A$ ισχύει : $f(\chi) \geq f(\chi_0)$

- Μια συνάρτηση f (χ) παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$ του πεδίου ορισμού της Α όταν για κάθε $\chi \in A$ ισχύει : $f(\chi) \leq f(\chi_0)$

Κατηγορία 1

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να εξεταστεί μια συνάρτηση ως προς τη μονοτονία σε ένα διάστημα Δ.

Παίρνω χ_1 , χ_2 του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και ξεκινώντας από την ανίσωση $\chi_1 < \chi_2$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων καταλήγω σε μια από τις μορφές : $f(\chi_1) < f(\chi_2)$ ή $f(\chi_1) > f(\chi_2)$.

Μπορώ επίσης μερικές φορές να εξετάσω το πρόσημο της διαφοράς :
$f(\chi_1) - f(\chi_2)$. Αν $f(\chi_1) - f(\chi_2) < 0 \Rightarrow f(\chi_1) < f(\chi_2) \Rightarrow$ Γν. αύξουσα
Αν $f(\chi_1) - f(\chi_2) > 0 \Rightarrow f(\chi_1) > f(\chi_2) \Rightarrow$ Γν . φθίνουσα.

Παράδειγμα : Να μελετήσετε την μονοτονία της : $f(\chi) = \sqrt{4-x}$

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f (χ) είναι το διάστημα : $A = (-\infty , 4]$. Έστω χ_1 , $\chi_2 \in A$ με

$\chi_1 < \chi_2 \Rightarrow -\chi_1 > -\chi_2 \Rightarrow 4-\chi_1 > 4-\chi_2 \Rightarrow \sqrt{4-x_1} > \sqrt{4-x_2} \Rightarrow f(\chi_1) > f(\chi_2)$,

άρα η συνάρτηση είναι γν. φθίνουσα στο Α.

Κατηγορία 2

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ή μέγιστο.

Με την βοήθεια των ανισοτήτων προσπαθούμε να καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής : $f(\chi) \geq f(\chi_0)$, $f(\chi) \leq f(\chi_0)$.

Παράδειγμα : Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων : $f(\chi) = 2\chi^4 - 1$ και $\kappa(\chi) = -2(\chi-1)^2 + 1$

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού των f (χ) και κ(χ) είναι το $\Re$. Για την f (χ) έχω: $\chi^4 \geq 0 \Rightarrow$

$2\chi^4 \geq 0 \Rightarrow 2\chi^4 - 1 \geq -1 \Rightarrow f(\chi) \geq -1$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο .

Για την κ(χ) έχω : $(\chi-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -2(\chi-1)^2 \leq 0 \Rightarrow -2(\chi-1)^2 + 1 \leq 1 \Rightarrow \kappa(\chi) \leq 1$,

άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο το σημείο : (1,1).

<u>Κατηγορία 3</u>

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να βρεθεί αν είναι άρτιες ή περιττές σε ένα διάστημα.

Εξετάζω αν στο διάστημα Δ ισχύει : $\chi \in \Delta$ και $-\chi \in \Delta$. Αν $\chi \in \Delta$ και το $-\chi \notin \Delta$, τότε η f (χ) δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή. Κατόπιν βάζω στη θέση του χ στη συνάρτηση το –χ. Αν καταλήξω μετά από πράξεις ότι : f (χ) = f (-χ), τότε η f (χ) είναι άρτια. Αν f (-χ) = - f (χ) η συνάρτηση είναι περιττή.

Παράδειγμα : Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές :

ι) $f(\chi) = 3\chi^2 + 5\chi^4$ ιι) $\kappa(\chi) = \chi^3 - 3\chi^5$ ιιι) $\lambda(\chi) = \dfrac{\chi^2}{1+\chi}$

ΛΥΣΗ

ι) Πεδίο ορισμού : $\Re$, $f(-\chi) = 3(-\chi)^2 + 5(-\chi)^4 = 3\chi^2 + 5\chi^4 = f(\chi)$, άρτια

ιι) Πεδίο ορισμού : $\Re$, $f(-\chi) = (-\chi)^3 - 3(-\chi)^5 = -\chi^3 + 3\chi^5 = -(\chi^3 - 3\chi^5) = -f(\chi)$, περιττή

ιιι) Πεδίο ορισμού : $\Re - \{-1\}$, άρα το χ = 1 $\in$ στο πεδίο ορισμού όμως το -1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού , άρα ούτε άρτια ούτε περιττή.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος :

1. Αν μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Re$ δεν είναι άρτια τότε είναι περιττή.	Σ	Λ
2. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [-2,3] δεν μπορεί να είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.	Σ	Λ
3. Μια σταθερή συνάρτηση είναι πάντα άρτια.	Σ	Λ

4. Η συνάρτηση g(x) = 5χ , $χ \in [-1,3]$ είναι περιττή. Σ Λ

5. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Re$, γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύουν : f (2)=0 , f (5) = 8 , είναι :
   α) f (3) > 0 Σ Λ

   β) f (4) < 0 Σ Λ

   γ) f (3) $\geq$ 0 Σ Λ

   δ) f (1) f (3) < 0 Σ Λ

   ε) f (0) < 8 Σ Λ

6. Έστω g(x) με πεδίο ορισμού το $\Re$, περιττή , γνησίως φθίνουσα και g(-2) = 3 , τότε :
   α) g(2) = -3 Σ Λ

   β) g(4) > 0 Σ Λ

   γ) g(-3) > 3 Σ Λ

63. Να βρείτε το g(2) αν γνωρίζουμε ότι : g(-2) = 3 και η συνάρτηση g(x) είναι : α) άρτια β) περιττή

64. Να υπολογίσετε τη διαφορά : f (2) - f (-3) , αν γνωρίζουμε ότι : f (3) - f (-2) = 4 και η f (χ) είναι άρτια.

65. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές :

α) f (χ) = $χ^3 - χ^5 \cdot |x|$ β) g(x) = $\dfrac{x}{|x|-2}$ γ) g(x) = $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

δ) f (χ) = $\dfrac{x^2(x-2)}{x-2}$ ε) g(x) = $\dfrac{x^2(x^2-9)}{x^2-9}$

στ) g(x) = $(2χ-1)^4 - (2χ+1)^4$ ζ) f (χ) = $\sqrt{3x+6}+\sqrt{6-3x}$

66. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις :

α) g(x) = $2\sqrt{x+5}-3$ β) f (χ) = $3χ^2 - 4$, $χ \leq 0$

γ) g(x) = $\dfrac{3}{5\sqrt{x+2}}$ δ) f (χ) = χ + $|x|$

ε) $g(x) = 1 + |x| + |x+1|$ στ) $g(x) = 5χ^2 – 10χ + 1$, $χ > 2$

67. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων :

α) $g(x) = 3(χ+2)^4 – 48$ β) $g(x) = 5χ^8$ γ) $g(x) = 5χ^2 +10$

δ) $g(x) = (2\sqrt{x} - 3)^2 +4$ ε) $g(x) = 3|x-1|+2$

68. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή των συναρτήσεων :

α) $f(χ) = 1-2χ^4$ β) $f(χ) = -\sqrt{4-x^2}+10$

γ) $f(χ) = -\sqrt{x^4+x^2+9}$ δ) $f(χ) = 1-\sqrt{2x+10}$ ε) $f(χ) = 3-\sqrt{x^2+4}$

69. Αν η συνάρτηση είναι άρτια και περιττή με πεδίο ορισμού το $\Re$, να α-ποδείξετε ότι για κάθε $χ \in \Re$ ισχύει : $f(χ) = 0$

70. Δίνεται η συνάρτηση : $f(χ) = χ^3-9χ+1$

α) να υπολογιστούν οι τιμές : $f(3)$, $f(-3)$
β) να εξεταστεί αν είναι άρτια .

71. Δίνεται η συνάρτηση : $f(χ) = (λ-2)χ+3-λ$. Να αποδείξετε ότι :

α) αν η $f(χ)$ είναι άρτια τότε $λ = 2$
β) αν η $f(χ)$ είναι περιττή τότε $λ = 3$.

72. Δίνεται η συνάρτηση : $f(χ) = \sqrt{x-5}+3x^2-10$,

α) να βρεθεί το πεδίο ορισμού της ,
β) να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία ,
γ) να βρεθεί η ελάχιστη τιμής της ,
δ) να λυθεί η ανίσωση : $f(χ) < f(10)$

73. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις :

α) $f(χ) = χ^2 \cdot |x|$ β) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$ γ) $g(x) = \dfrac{-1}{|x|}$

δ) $g(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}x^2$ ε) $f(χ) = (χ- |x|)(|x| +χ)$

στ) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{2x^2-6x}$ ζ) $g(x) = \dfrac{6x^3-3x^2}{2-4x}$