ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΗΛΟΥ
Έλεγχος Προετοιμασίας 1 – **Μιγαδικοί αριθμοί –Συναρτήσεις** – Διάρκεια 3 ώρες
Κυριακή 17 Νοεμβρίου 2013

ΘΕΜΑ Α
Α1. Δώστε τον ορισμό του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Α2.Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ; Να γραφεί και το πεδίο ορισμού της σύνθεσης .

Α3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$ έχει δυο ρίζες μιγαδικές και συζυγείς.

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη Σωστή ή Λάθος.

1. Ισχύει $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2. Αν ένας μιγαδικός δεν είναι πραγματικός τότε είναι φανταστικός.

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

4. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α, β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο.

5. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}, x \neq 1$ είναι σταθερή.

6. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Α5.Δίνονται δύο συναρτήσεις **f, g** με **f** γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και **g** γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Επιπλέον ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν x_1, x_2, x_3, x_4 είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)$.

Μονάδες:**Α1.** 5 **Α2.** 4 **Α3.** 7 **Α4.** 6 **Α5.** 3

ΘΕΜΑ Β

Έστω $\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ τρεις μιγαδικοί διαφορετικοί ανά δύο και $\mathbf{A}\ \mathbf{z}\ , \mathbf{B}\ \mathbf{w}\ , \boldsymbol{\Gamma}\ \mathbf{u}$ οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο αντίστοιχα . Αν ισχύουν :

$$3|z|+2+\ |w|-5\ \ i=|z|+8-\left(\frac{4+5i}{5-4i}\right)^{2013},\ \ |z-u|=7,\ \ |w-u|=4\ \text{ και }\ \mathrm{Re}\ \ z\bar{w}\ \ =8\ \text{ τότε:}$$

Β1.Να αποδείξετε ότι $|z|=3, |w|=4$, και $|z-w|=3$.

Β2.Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά .

Β3.Να αποδείξετε ότι $\left|iz+\ \ 3-4i\ \ w\right|\leq 23$.

Μονάδες:**Β1.** 9 **Β2.** 9 **Β3.** 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x+|z|}-|z|, z\in\mathbb{C}^*$

Γ1.Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ2.Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ(z) είναι κύκλος με κέντρο Ο(0,0)και ακτίνα $\rho=\frac{4}{3}$.

Γ3.Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι : $3|z_1-z_2|-8\leq 0$

Γ4.Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)+f(e^{2x})=f(e^{11x})+f(e^{111x})$.

Μονάδες:**Γ1.** 5 **Γ2.** 8 **Γ3.** 5 **Γ4.** 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παράσταση $f(z)=\dfrac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i|-|z-10i|}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι : το ευρύτερο υποσύνολο στο οποίο ορίζεται η παράσταση $f(z)$ είναι το $\mathbb{C}-\mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $\left||z+10i|-|z-10i|\right|\le 2|z|$ και στη συνέχεια $|f(z)|\ge 1$.

Δ3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών **z**,για τους οποίους ισχύει $|f(z)|=\dfrac{1}{6}|z|\,(1)$. Να γραφεί και η εξίσωση του γ. τόπου.

Δ4. Αν z_1, z_2 δυο από τους μιγαδικούς που επαληθεύουν την (1) με $\mathrm{Im}(z_1)\cdot \mathrm{Im}(z_2)<0$ να δείξετε ότι $|z_1-z_2|\ge 12$. Για ποιους μιγαδικούς ισχύει η ισότητα;

Μονάδες:**Δ1.** 5 **Δ2.** 6 **Δ3.** 8 **Δ4.** 6

(ή πότε ισχύει η ισότητα;)

Για τους μιγαδικούς του παραπάνω ερωτήματος να δείξετε ότι : $|z-2| \geq 78$.αν η(1) γίνει $\frac{1}{5\sqrt{3}}$