ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΤΙΣ Α΄, Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ, ΑΘΗΝΑ 2022

Πράξη «Αναβάθμιση των Προγραμμάτων Σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» - MIS: 5035542

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Γνωστικό Πεδίο: Φυσικές Επιστήμες, Τεχνολογία και Μαθηματικά
Γνωστικό Αντικείμενο/επίπεδο εκπαίδευσης: Μαθηματικά (Λύκειο)

Εμπειρογνώμονες Εκπόνησης του Προγράμματος Σπουδών
Επόπτης
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Εκπονητές/Εκπονήτριες
Βλάχου Αγγελική, Διαμαντίδης Δημήτριος, Καραβασίλης Γεώργιος, Κορρές Κωνσταντίνος, Μαστορίδης Ελευθέριος, Μπαλωμένου Αθανασία, Μπαραλός Γεώργιος, Περυσινάκη Ειρήνη, Σιώπη Καλλιόπη, Σκουρκέας Αναστάσιος, Σπάθης Μάριος, Φουσκάκης Δημήτριος

Εισηγητική Επιτροπή
Ζυμπίδης Δημήτριος, Στουραΐτης Κωνσταντίνος, Τάσος Νικόλαος

Υπεύθυνη Γνωστικού Πεδίου
Πετροπούλου Γεωργία

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση 2014 -2020»	
	ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ Ιωάννης Αντωνίου, Πρόεδρος ΙΕΠ
Πράξη με τίτλο:	Πράξη «Αναβάθμιση των Προγραμμάτων Σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» - MIS: 5035542
Επιστημονική Ομάδα Έργου:	Αφεντουλίδου Άννα, Σύμβουλος Β΄ ΙΕΠ, Εμβαλωτής Αναστάσιος, Μέλος ΔΣ ΙΕΠ, Κατσαγάνη Γεωργία, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Μαστραπάς Αντώνιος, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Ματσούκας Παναγιώτης, Σύμβουλος Β΄ ΙΕΠ, Μπίλλα Πολυξένη, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Πετροπούλου Γεωργία, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Πήλιουρας Παναγιώτης, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Σαλπασαράνης Κωνσταντίνος, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Σταμούλης Ευθύμης, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ, Στυλιάρης Ευστάθιος, Προϊστάμενος Γραφείου Στρατηγικής και Πολιτικού Σχεδιασμού ΙΕΠ
Υπεύθυνος Πράξης:	Παναγιώτης Πήλιουρας, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ
Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.	

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού
Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Προτεινόμενη αναφορά στο υλικό:

Ζαχαριάδης, Θ., Βλάχου, Α., Διαμαντίδης, Δ., Καραβασίλης, Γ., Κορρές, Κ., Μαστορίδης, Ε., Μπαλωμένου, Α., Μπαραλός, Γ., Περυσινάκη, Ε., Σιώπη, Κ., Σκουρκέας, Α., Σπάθης, Μ., Φουσκάκης, Δ. (2022*). Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικά Λυκείου*. *2η Έκδοση* Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Περιεχόμενα

Α. ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Εισαγωγή

Ο Οδηγός στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού προκειμένου να κατανοήσει τον προσανατολισμό του νέου ΠΣ, να αναγνωρίσει τις αλλαγές που αφορούν στο περιεχόμενο, το μαθησιακό περιβάλλον και τις διδακτικές προσεγγίσεις που αυτό εισάγει και να υποστηρίξει την αξιοποίησή τους στην τάξη. Δεν επιδιώκει να προσφέρει 'συνταγές' για το πώς να δράσει κάθε εκπαιδευτικός στην τάξη του, καθώς θεωρείται πως απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς με επαρκή επιστημονική κατάρτιση και επαγγελματική ετοιμότητα, ικανούς να σχεδιάζουν τη διδασκαλία τους και να λαμβάνουν αποφάσεις για την εξέλιξή της, με βάση τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα και τις ιδιαίτερες συνθήκες της τάξης τους.

Στο πλαίσιο του νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ), ο εκπαιδευτικός αναμένεται να είναι σε θέση να υποστηρίζει αποτελεσματικά όλους τους μαθητές να προσεγγίσουν τις μαθηματικές γνώσεις, να αναπτύξουν τη μαθηματική σκέψη και να αναγνωρίσουν τις αξίες της μαθηματικής επιστήμης που το Πρόγραμμα Σπουδών προτάσσει. Ο Οδηγός φιλοδοξεί να προσφέρει κεντρικές αλλά συγκεκριμένες κατευθύνσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών, με σεβασμό στους βαθμούς ελευθερίας που επιβάλλουν τόσο η αναγνώριση της πολυπλοκότητάς της, όσο και η αναγνώριση της επιστημονικής συγκρότησης του εκπαιδευτικού και της μοναδικότητας του ρόλου του ως ειδικού που διδάσκει και διδάσκεται στην τάξη καθημερινά. Ειδικότερα, επιδιώκει να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να:

- αναγνωρίζει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε διδακτική ενότητα και να τα συνδέει με αυτά που οι μαθητές αναμένεται να έχουν επιτύχει στις προηγούμενες τάξεις ή θα επιτύχουν στις επόμενες,
- καθορίζει με τη βοήθεια του ΠΣ τους στόχους του και τα μέσα επίτευξής τους ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών,
- επιλέγει και να αναπτύσσει εκπαιδευτικό υλικό, έχοντας επίγνωση των διδακτικών του αποφάσεων και της επίδρασης που αυτές μπορεί να έχουν στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών,
- σχεδιάζει τη διδασκαλία του αξιοποιώντας έργα και διδακτικά εργαλεία με τρόπους που αναδεικνύουν τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας,
- πειραματίζεται με νέες διδακτικές προσεγγίσεις που επιτρέπουν την πολύτροπη επίτευξη των διδακτικών του στόχων, αναγνωρίζοντας τα γνωστικά, τα κοινωνικο-πολιτισμικά αλλά και τα κοινωνικο-πολιτικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής εκπαίδευσης,
- σχεδιάζει εργαλεία αξιολόγησης της επίτευξης των στόχων του για την ανατροφοδότηση και διαμόρφωση της μάθησης και της διδασκαλίας.

Ο Οδηγός περιλαμβάνει ένα *Γενικό μέρος,* στο οποίο παρουσιάζονται βασικές αρχές της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών με βάση τα σύγχρονα βιβλιογραφικά δεδομένα, αναλύεται η έννοια της μαθηματικής δραστηριότητας, περιγράφονται παραδείγματα πόρων και εργαλείων για τη μάθηση και διδασκαλία, καθώς και παραδείγματα εργαλείων αξιολόγησης που ανταποκρίνονται στις βασικές αρχές αξιολόγησης που θέτει το ΠΣ. Επίσης, περιλαμβάνει ένα *Ειδικό μέρος* στο οποίο, για κάθε θεματικό πεδίο, παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της σημασίας του πεδίου και της ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και των δυσκολιών των μαθητών που αφορούν στο πεδίο. Επιπρόσθετα, προσφέρονται ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες διδακτικής διαχείρισης (ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη), τα οποία συνδέονται με συγκεκριμένα σημεία της εξελικτικής πορείας ανάπτυξης ενός ΠΜΑ και ενίοτε μιας συγκεκριμένης Τροχιάς Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ). Τέλος, προτείνονται πόροι που μπορεί να αξιοποιηθούν για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη της διδακτικής πράξης.

Ο Οδηγός του εκπαιδευτικού αποτελεί συμπλήρωμα του Προγράμματος Σπουδών και υποστηρίζουν τον εκπαιδευτικό στον σχεδιασμό, την πραγματοποίηση και την αξιολόγηση της διδασκαλίας του.

2. Μαθηματικό Περιεχόμενο

Η πρώτη αναγκαία συνθήκη για να μπορεί ο εκπαιδευτικός να μετασχηματίζει την επιστημονική μαθηματική γνώση σε μαθηματική γνώση κατάλληλη για τους μαθητές (σχολική μαθηματική γνώση) είναι η βαθιά γνώση του μαθηματικού περιεχομένου του Προγράμματος Σπουδών. Η γνώση αυτή θα τον ενδυναμώσει ώστε να επιλέξει κατάλληλες μαθηματικές πρακτικές (π.χ. δημιουργία συνδέσεων, οπτικοποίηση, κλπ) και εύστοχα μαθηματικά έργα και να υποστηρίξει την ανάπτυξη γνήσιων μαθηματικών δραστηριοτήτων στην τάξη (Henningsen & Stein, 1997; Stein & Kim, 2009), οι οποίες θα αναδείξουν και καλλιεργήσουν **Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών.** Ως 'μεγάλη ιδέα' νοείται μια κεντρική έννοια ή διεργασία της μαθηματικής επιστήμης, η οποία συνδέει διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο (NCTM, 2000, σ. 17).

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών ως κατεξοχήν Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών αναγνωρίζονται η **Μαθηματική δομή,** η **Απόδειξη,** η **Γενίκευση,** η **Μεταβολή,** η **Ισοδυναμία,** οι **Μετασχηματισμοί** και η **Προσέγγιση-σύγκλιση**.

Η Μαθηματική δομή αφορά τον προσδιορισμό γενικών ιδιοτήτων ενός συνόλου, οι οποίες εμφανίζονται ως σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων στοιχείων του συνόλου. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμοί, τρίγωνα, εξισώσεις, σύνολα με σχέσεις μεταξύ τους, ή και σχέσεις σχέσεων. Για παράδειγμα, η αναγνώριση της δομικής μονάδας δημιουργίας μιας κανονικότητας είναι σημαντική για την εύρεση του κανόνα της, όπως συμβαίνει στην ακολουθία των περιττών αριθμών.

Η Απόδειξη αφορά τη συλλογιστική διαδικασία, η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και, μέσα από μια σειρά διαδοχικών επιχειρημάτων/συλλογισμών, οδηγεί σε ένα συμπέρασμα. Η απόδειξη στο Δημοτικό Σχολείο έχει περισσότερο εμπειρικό και διαισθητικό χαρακτήρα, ενώ στο Γυμνάσιο και πολύ περισσότερο στο Λύκειο οι μαθητές καλούνται να εμβαθύνουν προοδευτικά στη διατύπωση εικασιών και στην επαλήθευση ή απόρριψή τους με αυστηρά μαθηματικές διαδικασίες.

Μία επιθυμητή πορεία προς την απόδειξη περιλαμβάνει διαδικασίες διερεύνησης, την διατύπωση εικασιών, τη διαισθητική ή άτυπη αιτιολόγηση, την ανάπτυξη συλλογισμών και τέλος την τυπική απόδειξη (Hanna & de Villiers, 2012). Έτσι, στο Δημοτικό Σχολείο, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το άθροισμα των γωνιών επαρκούς εύρους ειδών τριγώνων με διάφορους πρακτικούς (π.χ. κόβοντας και τοποθετώντας τις γωνίες την μια δίπλα στην άλλη) ή συμβατικούς (π.χ. μετρώντας τις γωνίες με μοιρογνωμόνιο ή σε ψηφιακό περιβάλλον) τρόπους και να οδηγηθούν στην 'εμπειρική και διαισθητική' διαπίστωση ότι είναι 180^o.

Κατά την αποδεικτική διαδικασία ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να χρησιμοποιεί ένα γενεσιουργό παράδειγμα (generic example), πολλαπλές αναπαραστάσεις (οπτικοποίηση, πίνακες τιμών, κλπ) και ενδεχομένως χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία για να βοηθήσει τους μαθητές να οδηγηθούν στην απόδειξη (Mariotti, 2000). Έτσι, για την απόδειξη της σχέσης:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha},\ \alpha\neq 0,$$

μπορεί να προηγηθεί ένα παράδειγμα της μορφής $x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,καθώς και η διερεύνηση της αντίστοιχης γραφικής αναπαράστασης με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Αντίστοιχα, στο πλαίσιο του αξιωματικού ορισμού των Πιθανοτήτων είναι επιθυμητό οι μαθητές να διερευνήσουν αρχικά τους κανόνες λογισμού των Πιθανοτήτων μέσα από παραδείγματα, στη συνέχεια να εικάσουν τους αντίστοιχους γενικούς κανόνες και τέλος να τους αποδείξουν, ξεκινώντας από τα αξιώματα.

Η Γενίκευση αφορά στην επέκταση ιδιοτήτων των στοιχείων ενός συνόλου στα στοιχεία ενός ευρύτερου συνόλου. Η γενίκευση επιτρέπει στους μαθητές την επέκταση εννοιών ή διεργασιών τις οποίες ήδη έχουν κατανοήσει ή την διατύπωση εικασιών που ενίοτε αποτελούν προ-στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας. Η διατύπωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας των φυσικών αριθμών αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα γενίκευσης στο Δημοτικό Σχολείο. Αργότερα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η βασική ιδιότητα των τετραγωνικών ριζών $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, μπορεί εύκολα να γενικευθεί στη σχέση $\sqrt{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}=\sqrt{\alpha_1}\cdots\sqrt{\alpha_\nu}$, για κατάλληλες υπόριζες ποσότητες. Επιπλέον, η γενίκευση αξιοποιείται από τους μαθητές και σε ερωτήματα με πιο έντονη μαθηματική πρόκληση, όπως η συμπλήρωση των παρακάτω των παρακάτω ισοτήτων:

$$1+2=\frac{2\cdot 3}{2}$$

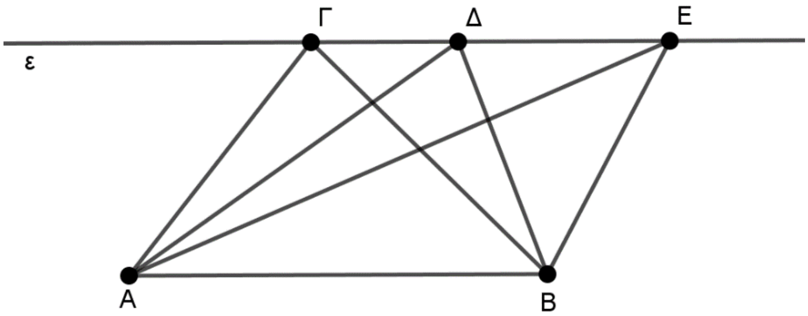
$$1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}$$

… = …

που οδηγεί στην εικασία $1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$, για $\nu\in N^*$, η οποία συνήθως ακολουθείται από την αποδεικτική μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Η Μεταβολή συνδέεται με την αλλαγή ενός μεγέθους. Οι μεταβολές αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα του περιβάλλοντος και της ζωής μας γενικότερα. Η διερεύνηση και η μοντελοποίηση αυτών των αλλαγών αποτελεί κεντρική δραστηριότητα στο πεδίο της Άλγεβρας και των Στοχαστικών Μαθηματικών. Η μεταβολή εμφανίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, με την αναγνώριση και διερεύνηση σχέσεων μεταξύ μεγεθών και αναπτύσσεται στις τελευταίες τάξεις με τη μελέτη ειδικών περιπτώσεων συμμεταβολής, όπως είναι τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο η έννοια της μεταβολής μορφοποιείται στην Άλγεβρα με γραμμικές ή μη-γραμμικές συναρτήσεις, καθώς και με την έννοια του ρυθμού μεταβολής στα μαθηματικά των τελευταίων τάξεων. Η αξιοποίηση της έννοιας της μεταβολής στην τάξη προτείνεται να συνδέεται με πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα που να ενδιαφέρουν τους μαθητές, προερχόμενα από διαφορετικά πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητας. Στα Στοχαστικά Μαθηματικά, η μεταβολή αποκτά μια πιο γενική μορφή, καθώς δεν μπορεί κανείς να υπολογίσει πώς ακριβώς μεταβάλλεται ένα μέγεθος, όταν μεταβάλλεται κάποιο άλλο. Μπορούμε όμως να ποσοτικοποιήσουμε χαρακτηριστικά της συμμεταβολής με τις έννοιες της συν-διακύμανσης και του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης. Με βάση τις τιμές αυτών των δεικτών διερευνάται η προσαρμογή ενός στατιστικού μοντέλου (π.χ. ευθεία παλινδρόμησης) στα δεδομένα, ώστε να μπορούμε να διατυπώσουμε πώς αναμένουμε να ανταποκριθεί μια μεταβλητή στις μεταβολές μιας άλλης. Επιπλέον, στη Στατιστική, η ιδέα της **μεταβλητότητας** συνδέεται με την ποικιλία και το εύρος των δεδομένων που αφορούν σε φαινόμενα, καταστάσεις και ποσότητες του καθημερινού κόσμου. Η ιδέα της μεταβλητότητας συνδέεται με εκείνη της αβεβαιότητας, που βρίσκεται στο επίκεντρο των Πιθανοτήτων, μέσω της διατύπωσης προβλέψεων με σκοπό τη λήψη αποφάσεων.

Η ισοδυναμία αφορά την αμφίδρομη συσχέτιση δύο μαθηματικών αντικειμένων**.** Η ισοδυναμία διατρέχει όλους τους κύκλους σπουδών στην Αριθμητική/Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Στην Αριθμητική/Άλγεβρα έχουμε την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων και των ισοδύναμων αλγεβρικών παραστάσεων, όπως είναι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις. Στην Γεωμετρία η ισοδυναμία εμφανίζεται στα ισεμβαδικά σχήματα, όπως για παράδειγμα τα τρίγωνα που έχουν ίδια βάση και η τρίτη κορυφή κινείται σε μια παράλληλη προς τη βάση ευθεία (Σχήμα 1).



Σχήμα 1. Η ευθεία ε είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, επομένως τα τρίγωνα ΓΑΒ, ΔΑΒ και ΕΑΒ είναι ισοδύναμα.

Οι Μετασχηματισμοί αφορούν τη διαδικασία με την οποία μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμοί ή συναρτησιακές σχέσεις ή γεωμετρικά σχήματα, μπορούν να μετατραπούν σε μία διαφορετική μορφή μέσω μαθηματικής επεξεργασίας. Οι Μετασχηματισμοί συναντώνται στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα, ένας κλασσικός μετασχηματισμός είναι η απλοποίηση μιας αριθμητικής (π.χ. 12=4·3=2·2·3) ή μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. $\frac{x^2-1}{x+1}+1=x$, για κάθε $x\neq -1$). Στη Γεωμετρία η ομοιότητα τριγώνων, για παράδειγμα, είναι ένας μετασχηματισμός ο οποίος διαθέτει αμετάβλητα και μεταβλητά στοιχεία του μαθηματικού αντικειμένου (τριγώνου) που υπόκειται στον μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός της ομοιότητας διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες των τριγώνων, ενώ μεταβάλλονται με βάση τον λόγο ομοιότητας τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των τριγώνων.

Η προσέγγιση-σύγκλιση συνδέεται με άπειρες διαδικασίες και την έννοια του ορίου στην Ανάλυση. Ξεκινάει από το Δημοτικό Σχολείο, όπου εμφανίζεται η προσέγγιση εκατοστού, χιλιοστού κ.λ.π., συνεχίζεται αργότερα στο Γυμνάσιο και στη γενική παιδεία στο Λύκειο μελετάται η προσέγγιση ενός άρρητου με έναν ρητό αριθμό (π.χ. του **π**). Οι προσεγγίσεις αυτές είναι στατικές και έχουν ένα συγκεκριμένο σφάλμα. Η έννοια της προσέγγισης ολοκληρώνεται στα μαθήματα προσανατολισμού με τη σύγκλιση, όπου η προσέγγιση αποκτά δυναμικό χαρακτήρα (οσοδήποτε κοντά).

3. Μαθηματικές και Κοινωνικο-πολιτισμικές διεργασίες/πρακτικές

Βασική επιδίωξη του νέου ΠΣ των Μαθηματικών είναι η υποστήριξη της εμπλοκής όλων των μαθητών σε κρίσιμες διεργασίες κατανόησης και ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και σκέψης. Οι διεργασίες αυτές διέπουν και χαρακτηρίζουν το 'μαθηματικό γίγνεσθαι' και το 'μαθηματικώς πράττειν' και, κατά συνέπεια, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο 'μαθηματικώς μανθάνειν και διδάσκειν'. Διακρίνονται στις **αμιγώς μαθηματικές πρακτικές**, που συνδέονται με τις πρακτικές και τους λόγους (discourses) ανάπτυξης της επιστήμης των μαθηματικών και τις **κοινωνικο-πολιτισμικο-συναισθηματικές πρακτικές**, που χαρακτηρίζουν τις πρακτικές και τους λόγους συμμετοχής των ατόμων σε αυτήν την ανάπτυξη.

Στην ενότητα αυτήν παρουσιάζονται οι πρακτικές των δυο παραπάνω ομάδων σε μια προσπάθεια σαφούς οριοθέτησης του περιεχομένου και της λειτουργικότητάς τους στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη στα μαθηματικά. Καθεμιά τους έχει μια μοναδική εστίαση, αλλά, ταυτόχρονα αλληλοεπιδρά με τις άλλες, όταν τίθεται σε λειτουργία.

(2α). *Μαθηματικές διεργασίες και Μαθηματικές πρακτικές*: Οι αμιγώς μαθηματικές πρακτικές περιλαμβάνουν την δημιουργία συνδέσεων, τον συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, τη μαθηματική επικοινωνία, την οπτικοποίηση, την επιλογή και τη χρήση εργαλείων, την επίλυση προβλήματος, τη μοντελοποίηση και τη γνωστική ενημερότητα και παρουσιάζονται στη συνέχεια.

(i) <u>Δημιουργία συνδέσεων</u>: Η πρακτική της δημιουργίας συνδέσεων αφορά στην παροχή ευκαιριών στους μαθητές να συνειδητοποιούν:

α) Σχέσεις μεταξύ διαφόρων μαθηματικών εννοιών, αναπαραστάσεων και διαδικασιών, καθώς και των διαφορετικών μαθηματικών πεδίων (γεωμετρία, άλγεβρα, στοχαστικά μαθηματικά). Για παράδειγμα, τα παιδιά μπορεί να συζητήσουν τη σχέση ανάμεσα στο κλάσμα 1⁄4, τον δεκαδικό 0.25, και το ποσοστό 25%, να ερμηνεύουν γεωμετρικά μια αλγεβρική παράσταση (π.χ. της $|x+2|$ ως απόσταση) ή να συνδέουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (γεωμετρία) με τους πίνακες (άλγεβρα).

β) Σχέσεις των μαθηματικών με την καθημερινότητα και με άλλες επιστήμες. Ο εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να εντάσσει στη διδασκαλία του τη χρήση πλαισίων από την καθημερινότητα που έχουν νόημα για τα παιδιά (π.χ. αυθεντικά προβλήματα, παιχνίδια, μοντέλα λειτουργίας καθημερινών καταστάσεων), αλλά και πλαίσια που αναδεικνύουν τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα (π.χ. φυσικές επιστήμες, λογοτεχνία, φυσική αγωγή).

(ii) <u>Συλλογισμός & επιχειρηματολογία</u>: Η ανάπτυξη συλλογισμού και επιχειρηματολογίας διευκολύνεται όταν οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τον τρόπο λύσης που προτείνουν σε ένα μαθηματικό ερώτημα. Η αξιολόγηση των επιχειρημάτων που αναπτύσσουν τα ίδια τα παιδιά αλλά και οι συμμαθητές τους, η δικαιολόγηση ενός αποτελέσματος που δημιουργεί έκπληξη, η ανάλυση και σύγκριση διαφορετικών τρόπων επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, η διατύπωση ερωτημάτων και εικασιών, η παρουσίαση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, η κατασκευή μιας απόδειξης, η γενίκευση μιας ιδέας από συγκεκριμένα παραδείγματα και η εξαγωγή συμπερασμάτων αποτελούν κρίσιμα στοιχεία της ανάπτυξης της συγκεκριμένης πρακτικής. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να παρουσιάζουν τον τρόπο λύσης τους, να επιχειρηματολογούν γι’ αυτόν ανεξάρτητα από την ορθότητα του αποτελέσματος, να εξηγούν πως σκέφτηκαν ή να αναπτύσσουν επιχειρήματα για να πείσουν ένα συμμαθητή τους ότι έχει κάνει λάθος.

(iii) Μαθηματική επικοινωνία: Η επικοινωνία σχετίζεται με την ικανότητα των μαθητών να μοιράζονται τις σκέψεις τους, τις ερωτήσεις τους, τις ιδέες τους και τις λύσεις τους χρησιμοποιώντας τον προφορικό λόγο, τη γραπτή συμβολική γλώσσα των μαθηματικών αλλά και μη λεκτικές μορφές επικοινωνίας. Η μετάφραση της φυσικής γλώσσας σε συμβολική γλώσσα και αντίστροφα και η έμφαση στην ακρίβεια της μαθηματικής γλώσσας βοηθά την επικοινωνία μεταξύ των μελών της τάξης. Για παράδειγμα, η σωστή χρήση του συμβόλου της ισότητας, η επιλογή των μονάδων μέτρησης, η απόδοση τίτλων σε στατιστικά διαγράμματα, η διατύπωση ορισμών. Οι μαθητές κατά την επικοινωνία τους στις ομάδες εργασίας και στην ολομέλεια της τάξης μπορούν να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο σκέψης τους και τον τρόπο σκέψης των συνομιλητών τους, να αναθεωρήσουν τις στρατηγικές τους, να οδηγηθούν στην αποσαφήνιση των ιδεών και την ανάλυση των επιχειρημάτων που ανταλλάσσονται και να προχωρήσουν σε βαθύτερη κατανόηση εννοιών και διαδικασιών. Όταν ο εκπαιδευτικός παροτρύνει τα παιδιά να συμμετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία επικοινωνώντας τη σκέψη τους, τα αποτελέσματα στην κατανόηση των μαθηματικών είναι πολύ θετικά (Ing et al., 2015).

(iv) Οπτικοποίηση: Η πρακτική της οπτικοποίησης συνδέεται με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων που ο μαθητής μπορεί να αξιοποιήσει στην επίλυση προβλήματος καθώς και για να επικοινωνήσει τη σκέψη του. Για παράδειγμα, όταν τα παιδιά στις μικρές ηλικίες κατασκευάζουν ένα εικονόγραμμα και ένα ραβδόγραμμα με βάση ένα πίνακα δεδομένων, τους δίνεται η δυνατότητα να συνδέσουν και να συγκρίνουν διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των δεδομένων και να τους αξιολογήσουν ως προς την προσφορά τους. Επίσης, η χρήση της αριθμογραμμής είναι ένα κατάλληλο αναπαραστατικό εργαλείο για υπολογισμούς και ανάδειξη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, ενώ η χρήση και κατασκευή χαρτών βοηθούν την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης των μαθητών.

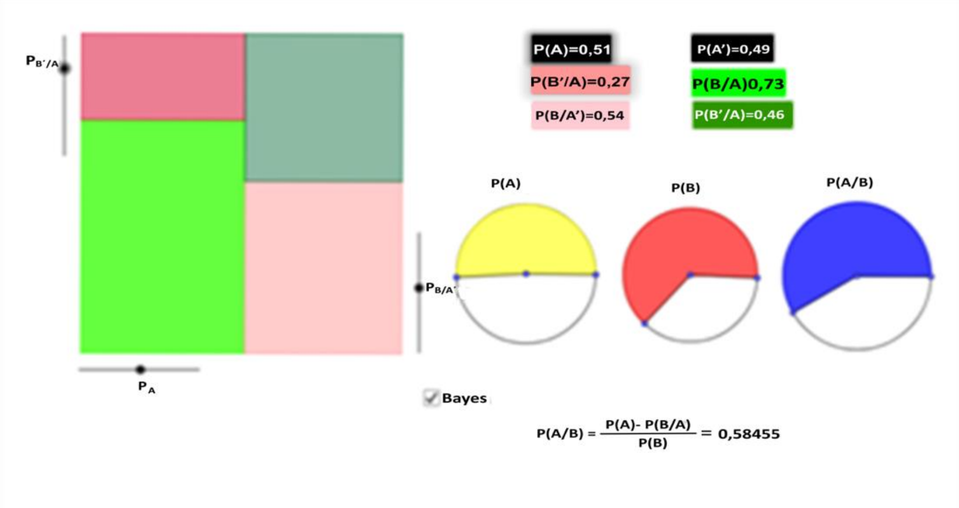
(v) Επιλογή και χρήση εργαλείων: Τα παιδιά ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν ποικιλία χειραπτικών, τυπικών και ψηφιακών εργαλείων. Τα χειραπτικά εργαλεία που δίνουν τη δυνατότητα στα παιδιά να συνδέσουν την άτυπη με την τυπική γνώση, μπορεί να είναι καθημερινά αντικείμενα από το περιβάλλον των μαθητών (π.χ. μολύβια, χαρτόνι), ή πολιτισμικά εργαλεία και τεχνουργήματα (π.χ. νομίσματα, ζυγαριά), ή εξειδικευμένα εργαλεία (π.χ. αριθμητήριο). Η χρήση τους μπορεί να διαφέρει ως προς τη μαθηματική δράση που υποστηρίζουν. Για παράδειγμα, το χειραπτικό υλικό μπορεί να είναι ένα μοντέλο αναπαράστασης μιας διαδικασίας (π.χ. το μοντέλο της ζυγαριάς), ένα μέσο διερεύνησης μιας σχέσης (π.χ. οι γεωπίνακες για τη διερεύνηση της σχέσης εμβαδού και περιμέτρου), ή ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία για σχεδιασμό, κατασκευή, σύγκριση γεωμετρικών αντικειμένων (διαβήτης, όργανα μέτρησης).

Αντίστοιχα, τα ψηφιακά εργαλεία διαθέτουν χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη μαθηματική δραστηριότητα και την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων, όπως:

(α) Δυνατότητες διερεύνησης και πειραματισμού. Για παράδειγμα, το μοντέλο της χαλασμένης αριθμομηχανής, το μοντέλο του άβακα και το μοντέλο ενός παντογράφου επιτρέπουν την ανάπτυξη διερευνητικών έργων και τον πειραματισμό.

(β) Δυνατότητες δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra, επιτρέπει στους μαθητές να ασχοληθούν με γεωμετρικές κατασκευές και να τις χειριστούν με δυναμικό τρόπο στο περιβάλλον, π.χ. να σύρουν σημεία, να αυξομειώσουν το μέγεθος ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών, να παρατηρήσουν μεταβολές και να διατυπώσουν εικασίες.

(γ) Αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις: οι μεταβολές σε μια αναπαράσταση επιφέρουν αυτομάτως μεταβολές και στις υπόλοιπες διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, στην παρακάτω εφαρμογή η αλλαγή των τιμών των πιθανοτήτων P(A),P(B΄|A) και P(B|A΄) μέσω δυναμικού χειρισμού επιφέρει αλλαγές τόσο στις «πίτες» των πιθανοτήτων P(A), P(B) και P(A|B), όσο και στο τετράγωνο των συμπληρωματικών ενδεχομένων.



δ) Πολλαπλές δυνατότητες έκφρασης μαθηματικών νοημάτων. Για παράδειγμα, μπορεί να αξιοποιηθεί η γλώσσα προγραμματισμού Logo στο πλαίσιο περιβαλλόντων Γεωμετρίας της Χελώνας για την ανάπτυξη παραμετρικών ή μη διαδικασιών, με στόχο την κατασκευή και διερεύνηση γεωμετρικών σχημάτων.

Καθώς τα έργα μετασχηματίζονται σε δραστηριότητα από τους συμμετέχοντες στην τάξη των μαθηματικών, τα εργαλεία μπορούν να στηρίξουν τη δημόσια παρουσίαση εικασιών και επιχειρημάτων από τους μαθητές (Bussi, 2011). Η αξιοποίηση ποικιλίας εργαλείων για το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο και η συζήτηση πάνω στις ομοιότητες και τις διαφορές τους μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες, τις διαδικασίες και τις αναπαραστάσεις τους.

(vi) <u>Επίλυση προβλήματος</u>: Η επίλυση προβλήματος συνδέεται με τη συμμετοχή των μαθητών σε ένα έργο που δεν γνωρίζουν εκ των προτέρων τον τρόπο λύσης του, διαφορετικά το έργο αφορά μια εφαρμογή ή άσκηση (NCTM, 2000). Επομένως, είναι σημαντικό να έχουν την ευκαιρία να προτείνουν τις δικές τους λύσεις σε νέες προβληματικές καταστάσεις, αλλά και σε προβλήματα που έχουν διατυπώσει οι ίδιοι. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να ενθαρρύνουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών για την επίλυση

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2014-2020
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ενός προβλήματος, όπως για παράδειγμα να το αναπαραστήσουν με υλικά, να χρησιμοποιήσουν ένα πίνακα με τις πληροφορίες του προβλήματος, να αναδιατυπώσουν το πρόβλημα, να το απλοποιήσουν, να κάνουν μια υπόθεση, να εργαστούν αντίστροφα (Fan & Zhu, 2007). Η διατύπωση νέων προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές τούς δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες που προσεγγίζουν, αξιοποιώντας δημιουργικά διαφορετικά πλαίσια από τον κόσμο των εμπειριών τους (English, 1997; Cai & Leikin, 2020).

(vii) Μοντελοποίηση: Η μαθηματική μοντελοποίηση προσφέρει τη δυνατότητα σύνδεσης της πραγματικής ζωής με τα μαθηματικά. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέγει έργα από την καθημερινότητα του μαθητή, την κοινωνία και τον χώρο εργασίας και να βοηθά στη 'μετάφρασή' τους στη γλώσσα των μαθηματικών (π.χ. η κατασκευή μιας εξίσωσης για την επίλυση ενός καθημερινού προβλήματος, η επιλογή ενός δειγματικού χώρου και η απόδοση πιθανοτήτων στα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, η χρήση της γεωμετρίας σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού). Η μοντελοποίηση περιλαμβάνει τόσο τη διαδικασία της αποπλαισίωσης μιας κατάστασης με σκοπό την συμβολική αναπαράστασή της και τον χειρισμό των συμβόλων, όσο και την αναφορά στην αρχική κατάσταση για την ερμηνεία των συμβόλων και των αποτελεσμάτων (επανα-πλαισίωση). Για παράδειγμα, στις συνθετικές εργασίες, οι μαθητές καλούνται οι ίδιοι να διαμορφώσουν, να διερευνήσουν και να αξιολογήσουν μαθηματικά μοντέλα με τη χρήση χειραπτικών ή/και ψηφιακών εργαλείων.

(viii) Μεταγνωστική ενημερότητα: Οι μαθητές αναπτύσσουν μεταγνωστική ενημερότητα όταν θέτουν ερωτήματα στον εαυτό τους όπως: Τι κάνω; Γιατί το κάνω; Πώς με βοηθάει αυτό; Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν τους μαθητές να αναπτύξουν μεταγνωστικές ικανότητες όταν ενισχύουν το 'σκέφτομαι φωναχτά' κατά τη λύση ενός προβλήματος και προσφέρουν ευκαιρίες αναστοχασμού σε ένα πρόβλημα με ερωτήματα όπως: Γιατί χρησιμοποίησες αυτόν τον τρόπο; Το σκέφτηκες πρώτα με άλλο τρόπο; Έχεις λύσει κάποιο παρόμοιο πρόβλημα;

(2β). Κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές: Οι *κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές* ενέχουν ταυτόχρονα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης, όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος (discourse), η συμπερίληψη, η μαθηματική ταυτότητα μάθησης και ο μαθηματικός γραμματισμός και αφορούν σε δεξιότητες και ικανότητες των μαθητών όπως:

- να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά,
- να αναπτύσσουν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις,
- να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση
- να κατανοούν τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού, καθώς και την αξία της για την ανθρώπινη δραστηριότητα διαχρονικά
- να είναι μαθηματικά εγγράμματοι, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά, αλλά και να επεμβαίνουν στο

κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά. Ένα "μαθηματικά εγγράμματο" άτομο αντιλαμβάνεται ότι οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν επινοηθεί για τη μελέτη φαινομένων του περιβάλλοντος και την επίλυση προβλημάτων. Διαθέτει, επιπλέον, την ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο- και εξω-μαθηματικών καταστάσεων, στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο.

Οι *κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές* αφορούν σε νόρμες αναγνώρισης και διαχείρισης συναισθημάτων και συμπεριφορών, διαμόρφωσης και διατήρησης θετικών σχέσεων και λήψης υπεύθυνων αποφάσεων. Υποστηρίζουν τους μαθητές στη μελέτη των μαθηματικών, καθώς συντελούν στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης, της κριτικής σκέψης και, εν τέλει, στην ανάπτυξη θετικής ταυτότητας μάθησης των μαθηματικών. Ειδικότερα, μέσω των κοινωνικο-συναισθηματικών νορμών οι μαθητές:

- αναπτύσσουν θετικά κίνητρα, αυτοπεποίθηση, εστίαση στις θετικές πτυχές των εμπειριών, υπομονή και επιμονή στην αντιμετώπιση οποιασδήποτε μαθηματικής κατάστασης,
- εκτιμούν την ομορφιά και την κομψότητα των μαθηματικών,
- αναπτύσσουν πνεύμα περιέργειας και αγάπη για τα μαθηματικά,
- αναπτύσσουν και ασκούν δεξιότητες που υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων σεβόμενοι την διαφορετικότητα στη σκέψη και έκφραση,
- αξιοποιούν δεξιότητες αξιολόγησης, ελέγχου και αυτογνωστικής ρύθμισης της προόδου τους προκειμένου να οικοδομήσουν ισχυρές ταυτότητες μαθητευομένων των μαθηματικών,
- αναγνωρίζουν και διαχειρίζονται διαφορετικού τύπου, ποιότητας και έντασης συναισθήματα και το άγχος με τρόπο αποτελεσματικό για τους ίδιους και τη μάθηση,

Οι κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές που αναφέρονται στο ΠΣ προωθούνται όταν οι εκπαιδευτικοί:

- διατηρούν υψηλές προσδοκίες για όλους τους μαθητές,
- βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν θετικές στάσεις για τα μαθηματικά, ενισχύοντας τον ενθουσιασμό τους κατά την ενασχόλησή τους με αυτά,
- επιλέγουν έργα στα οποία μπορούν να εμπλακούν όλοι οι μαθητές,
- υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης των μαθητών καλλιεργώντας την πεποίθηση ότι όλοι μπορούν να τα καταφέρουν μέσω της προσπάθειας,
- εμπλέκουν όλους τους μαθητές στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και μαθηματικής επικοινωνίας,
- αναδεικνύουν τη σημασία των Μαθηματικών στη λήψη ορθολογικών αποφάσεων ακόμα και σε συνθήκες αβεβαιότητας,
- παροτρύνουν τους μαθητές να επιμένουν στην επίλυση ενός προβλήματος,
- βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν τη χρήση των μαθηματικών στην καθημερινότητά τους και το ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον τους,

- διευκολύνουν τη συνεργασία σε ομάδες, αναπτύσσοντας συνήθειες όπως: να ακούν και να προσπαθούν να κατανοούν τις εξηγήσεις των συμμαθητών τους, να συζητούν τις διαφωνίες τους στην ομάδα, να καταλήγουν σε κοινά αποδεκτές λύσεις.

4. Μαθηματικά έργα και μαθηματική δραστηριότητα: επιλογή/σχεδιασμός και διαχείριση στην τάξη

Μαθηματικό έργο και μαθηματική δραστηριότητα: Το μαθηματικό έργο αφορά στην εργασία που αναθέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά τις δράσεις που αναλαμβάνουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να φέρουν σε πέρας ένα έργο που τους έχει ανατεθεί. Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι ή μια άσκηση ή ένα πρόβλημα ή ακόμα και μια ερώτηση που θα θέσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη και έχει ως στόχο να προκαλέσει μαθηματική δραστηριότητα. Αν και ένα έργο προορίζεται να προκαλέσει συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα, πρέπει να γίνει διάκριση ανάμεσα: α) στο μαθηματικό έργο, όπως αυτό σχεδιάστηκε αρχικά, β) στο μαθηματικό έργο, όπως παρουσιάστηκε από τον εκπαιδευτικό μέσα στην τάξη, γ) στο μαθηματικό έργο, ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ των μαθητών, δ) στο μαθηματικό έργο, όπως αυτό τελικά διαμορφώθηκε ως συνισταμένη των δράσεων εκπαιδευτικών και μαθητών στο πλαίσιο της σχολικής τάξης (Margolinas, 2013, Caleja, 2013). Ένα μαθηματικό έργο συνδέεται με συγκεκριμένα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα, και στοχεύει όχι μόνο στην ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών γνώσεων, αλλά και στην καλλιέργεια μαθηματικών διεργασιών (π.χ. οπτικοποίηση, μοντελοποίηση κλπ.) και κοινωνικο-πολιτισμικών και κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών (π.χ. σύνδεση των μαθηματικών με τον πολιτισμό) (Schoenfeld, 2020).

Επιλογή/σχεδιασμός: Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που θα επιλέξει ή θα σχεδιάσει ένα μαθηματικό έργο ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών του και, στη συνέχεια, θα το διαφοροποιήσει κατά τη διδασκαλία, με βάση την εξέλιξή της, στο πλαίσιο μιας κυκλικής διαδικασίας σχεδιασμού/τροποποίησης – εφαρμογής στην τάξη – αξιολόγησης του μαθηματικού έργου. Ένα έργο μπορεί να οδηγήσει σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα, όταν προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να μαθητεύσουν σε μια ποικιλία μαθηματικών πρακτικών και να μυηθούν στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών (όπως η απόδειξη και η γενίκευση ή η ισοδυναμία και οι μετασχηματισμοί) (Τζεκάκη, 2015).

Βασικό κριτήριο για την επιλογή/τροποποίηση ή τον σχεδιασμό εξαρχής ενός μαθηματικού έργου είναι οι μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές που επιδιώκεται να αναπτύξει ο μαθητής. Τα μαθηματικά έργα είναι σημαντικό να βρίσκονται κοντά στα ενδιαφέροντα ή/και τις εμπειρίες των μαθητών, να συνδέονται, όταν είναι δυνατό, με την ανθρώπινη δράση και δραστηριότητα, να τους εμπλέκουν στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού (Artigue, 2012). Ταυτόχρονα, να θέτουν μαθηματικές προκλήσεις αλλά και να βρίσκονται εντός των δυνατοτήτων των μαθητών. Οι μαθητές χρειάζεται, δηλαδή, να διαθέτουν τα εργαλεία και την πρότερη γνώση, ώστε να εμπλακούν δημιουργικά σε ένα μαθηματικό έργο. Μαθηματικά έργα με κυμαινόμενο βαθμό δυσκολίας και ποικίλους τρόπους αντιμετώπισης προσφέρουν τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να εμπλακούν στη διεκπεραίωσή τους. Τέλος, μια ποικιλία πόρων (αναπαραστάσεις, μοντέλα, χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία κλπ.) μπορούν να αξιοποιηθούν στο πλαίσιο ενός μαθηματικού έργου, ώστε να μετασχηματιστούν από τους μαθητές σε εργαλεία διερεύνησης, συλλογισμού και επικοινωνίας των μαθηματικών εννοιών. Ο κατάλληλος σχεδιασμός και η κατάλληλη διδακτική διαχείριση των μαθηματικών έργων στην τάξη συντελούν καθοριστικά στο να μειωθεί η απόσταση μεταξύ των προθέσεων του εκπαιδευτικού και της μαθηματικής δραστηριότητας – και συνεπώς τη μάθησης - που τελικά αναπτύσσουν οι μαθητές (Ainley & Margolinas, 2013).

Διδακτική διαχείριση: Δύο σημεία φαίνεται να είναι καθοριστικά ως προς τη διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου:

- η έμφαση που δίνεται από την πλευρά του εκπαιδευτικού στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου,
- η δυνατότητα του εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει το διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη με όρους μαθηματικής διαπραγμάτευσης (Clarke & Mesiti, 2013).

Κατά την εφαρμογή ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη μπορούν να διακριθούν, σύμφωνα με τους Trevisan, Ribeiro, και da Ponte (2020) τρία στάδια: Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και να το συνδέσουν με τις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις. Παράλληλα, ενθαρρύνει τους μαθητές στην επιλογή και χρήση κατάλληλων πόρων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) (González & Eli, 2017).

Στο δεύτερο στάδιο της αυτόνομης εργασίας οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες και ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά μαζί τους. Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να έχει προβλέψει κατά τον σχεδιασμό του μαθηματικού έργου πιθανές στρατηγικές των μαθητών και πιθανές παρανοήσεις και να έχει σκεφτεί τρόπους και μεθόδους για να τις αναγνωρίσει και να τις διαχειριστεί. Μπορεί να υποστηρίξει τον διάλογο και τη συζήτηση στις ομάδες βοηθώντας τους μαθητές να αποσαφηνίσουν τις ιδέες τους με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα με διευκρινιστικές ερωτήσεις ή ζητώντας από έναν μαθητή να αναδιατυπώσει τις ιδέες ενός άλλου μαθητή της ομάδας του. Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στη συλλογιστική σκέψη των παιδιών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις όπως: «Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;», «Τι θα γινόταν αν…; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;» «Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;», «Υπάρχει άλλη απάντηση;», «Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;» κλπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης. Για παράδειγμα, μπορεί να απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις/υποδείξεις όπως: «Ποια είναι τα στοιχεία-κλειδιά τους προβλήματος;», «Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές πλην μίας σταθερές και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία για κάθε μεταβλητή» κλπ. (van de Walle et al., 2014).

Στο τρίτο στάδιο της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που προσεγγίστηκαν (Dooley, 2009; Stein et al., 2008), ενώ παράλληλα επικυρώνει και αξιολογεί τη μαθηματική γνώση των μαθητών (Morgan, 2000). Παρακολουθώντας την εξέλιξη των στρατηγικών των μαθητών σε όλα τα στάδια της ενασχόλησής τους με το μαθηματικό έργο, ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιολογήσει και την επίδραση του συγκεκριμένου έργου (Ainley & Margolinas, 2013) στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

5. Διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών

Οι διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας συνιστούν δυο κεντρικές συνιστώσες της εκπαιδευτικής πράξης που συνυφαίνονται στην τάξη και είναι σχεδόν αδύνατο να διαχωριστούν με σαφή τρόπο, έστω κι αν συχνά, για λόγους διαχείρισης και για να δώσουμε έμφαση στη μια ή στην άλλη από αυτές τις δυο συνιστώσες, τις διαχωρίζουμε ως να ήταν διακριτές. Η παρούσα ενότητα εστιάζει σε τρεις έννοιες που επιδιώκουν να συγκεκριμενοποιήσουν και να αναδείξουν όψεις της αλληλεπίδρασης των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών, έτσι όπως αυτές συνυφαίνονται στην τάξη.

(4α). Η τροχιά μάθησης & διδασκαλίας: Πρόκειται για περιγραφές της σκέψης και μάθησης ενός μαθητή σε μια συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή καθώς και την αντίστοιχη υποτιθέμενη διαδρομή που ακολουθείται μέσα από μια σειρά διδακτικών έργων, που σκοπό έχουν να ενεργοποιήσουν τα διαδοχικά στάδια ανάπτυξης. Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκεται να ανιχνευτεί και να υποβοηθηθεί η πορεία ανάπτυξης των σταδίων σκέψης ενός μαθητή επιτυγχάνοντας συγκεκριμένους στόχους (Clements & Sarama, 2004).

Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι δεξιότητες και ικανότητες του μαθητή ακολουθούν μια εξελικτική πορεία, η οποία επηρεάζεται από παράγοντες όπως το μαθησιακό περιβάλλον και η διδασκαλία και από υποκειμενικές συνιστώσες όπως η μαθηματική ωρίμανση, αλλά και οι προδιαθέσεις, οι στάσεις και τα ενδιαφέροντα. Με μια τροχιά καθίσταται εφικτό να χαρακτηριστούν τα στοιχεία που πλαισιώνουν μια πορεία μάθησης από ένα σημείο σε ένα άλλο, αλλά και να περιγραφούν οι κατάλληλες ενδεχομένως διδακτικές ενέργειες προκειμένου να διευκολυνθεί αυτή η μετάβαση. Οι ΤΜΔ επομένως είναι συνυφασμένες με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους ή μαθησιακά αποτελέσματα, καθώς και με τους τρόπους που οι μαθητές αναπτύσσουν τις προσδοκώμενες δεξιότητες και ικανότητες. Ο τρόπος αξιοποίησής τους είναι διττός:

- οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συγκεκριμένες σειρές από μαθηματικά έργα, προκειμένου να ενεργοποιήσουν τις νοητικές διεργασίες που οδηγούν προς την επιδιωκόμενη κατεύθυνση (ή χρησιμοποιούν ΠΣ και διδακτικά υλικά που έχουν σχεδιαστεί βασιζόμενα στην ίδια σειρά υποθέσεων).
- η σκέψη και μάθηση των μαθητών σε μια συγκεκριμένη περιοχή των Μαθηματικών διέρχεται μέσα από τα διαδοχικά επίπεδα που μπορεί να οδηγήσουν στο προτεινόμενο μαθησιακό αποτέλεσμα με την κατάλληλη διδακτική διαχείριση.

Στο *Ειδικό μέρος* του Οδηγού παρουσιάζονται παραδείγματα της εξελικτικής πορείας ανάπτυξης ορισμένων ΠΜΑ και ενίοτε ΤΜΔ. Έτσι, ο εκπαιδευτικός μπορεί να διευκολυνθεί στον σχεδιασμό της διδασκαλίας του και ειδικότερα:

- στην επισήμανση των κύριων στόχων που είναι αναγκαίο να επιτευχθούν
- στις αναγκαίες προηγούμενες γνώσεις που απαιτούνται

- στις συνδέσεις με επόμενες έννοιες και την κατοπινή εξέλιξη των εννοιών που διδάσκονται.

(4β). Διδακτικές προσεγγίσεις/ στρατηγικές (teaching strategies): Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να επιτύχει την πραγμάτωση των στόχων ενός ΠΣ, είναι αναγκαίο να αναζητά και να αξιοποιεί ποικιλία πρακτικών και εργαλείων για την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος στη σχολική τάξη. Η επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης απαιτεί προσεκτική αναζήτηση, καθώς δεν υπάρχει μια γενική συνταγή για όλες τις περιπτώσεις. Όσο εγγύτερη στις ανάγκες των μαθητών είναι μια διδακτική πρακτική, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να οδηγήσει σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στην ενότητα αυτή συζητούνται διδακτικές προσεγγίσεις και προσανατολισμοί της διδακτικής πράξης που υποστηρίζονται από τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών.

(i) *Διδασκαλία βασισμένη στην έρευνα (Research based teaching)*: Ως διδασκαλία που βασίζεται στην έρευνα εννοούμε τη διδασκαλία η οποία σχεδιάζεται με βάση ευρήματα της έρευνας που αφορούν στη φύση της μαθηματικής σκέψης και μάθησης στη σχολική τάξη, καθώς και τις αντίστοιχες προτάσεις διδακτικής διαχείρισης. Ο διδακτικός σχεδιασμός του εκπαιδευτικού οφείλει να ανανεώνεται, να εμπλουτίζεται και να αναπροσαρμόζεται στα δεδομένα που αφορούν στις εκπαιδευτικές, τις γνωστικές και τις αναπτυξιακές παραμέτρους που φέρνει στο φως η έρευνα για τη μάθηση των μαθηματικών.

Μια άλλη παράμετρος που είναι σημαντικό να λαμβάνει υπόψη του ο διδακτικός σχεδιασμός είναι ο τρόπος ανάπτυξης των εννοιών, ώστε να είναι συμβατός με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών κάθε βαθμίδας: τις γνώσεις, τις εμπειρίες και το λεξιλόγιο που διαθέτουν για να εκφράσουν μαθηματικά τις ιδέες τους. Υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι η απομνημόνευση των μαθηματικών γνώσεων και η επικέντρωση στην διαδικαστική ευχέρεια δεν αρκεί για την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης. Στην κατεύθυνση αυτή, είναι σημαντική η ενθάρρυνση της δημιουργικότητας των μαθητών, η δημιουργία συνεργατικού-συμπεριληπτικού περιβάλλοντος, η δημιουργία μικρο-κοινοτήτων εξερεύνησης και συζήτησης στην τάξη.

(ii) *Διδασκαλία βασισμένη στη διερεύνηση (Inquiry based teaching)*: Η διδασκαλία που βασίζεται στη διερεύνηση προωθεί την οικοδόμηση του μαθηματικού νοήματος στη σχολική τάξη, με τον μαθητή στο ρόλο του ερευνητή, ο οποίος ανακαλύπτει, οργανώνει και συγκροτεί νέα γνώση. Η εννοιολογική μάθηση αποκτά προβάδισμα έναντι της μάθησης αλγοριθμικών διαδικασιών, ενώ παράλληλα υποστηρίζονται η ανάπτυξη και η εξέλιξη «συνηθειών του μυαλού» που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική σκέψη.

Σε μια τάξη διερεύνησης, οι γνωστικές συγκρούσεις που προκύπτουν, όταν οι μαθητές συνειδητοποιούν την ανεπάρκεια προηγούμενων γνώσεων, λειτουργούν ως μέσο ενεργής εμπλοκής των μαθητών με σκοπό την επανεξέταση της σκέψη τους, τη συζήτηση και αναζήτηση νέων οπτικών ή ιδεών.

Ο παρακάτω πίνακας περιγράφει ορισμένα χαρακτηριστικά μιας διερευνητικού τύπου διδακτικής προσέγγισης.

<table>
<tr><th colspan="2">Χαρακτηριστικά μιας διδασκαλίας που υποστηρίζει την διερεύνηση</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ο εκπαιδευτικός…</td></tr>
<tr><td>Παρουσιάζει πλούσια μαθηματικά έργα που εμπλέκουν με ενεργό τρόπο τους μαθητές σε διαδικασίες σκέψης που ενθαρρύνουν την ανάπτυξη συνδέσεων</td><td>Τα έργα που δίνονται
• είναι προσεγγίσιμα από όλους τους μαθητές
• περιλαμβάνουν προκλήσεις που είναι εφικτές
• αναπτύσσουν την κατανόηση και εκμάθηση διαδικασιών
• εμπεριέχουν ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών
• δίνουν έμφαση στην διαδικασία επίλυσης αντί για την απάντηση</td></tr>
<tr><td>Υποστηρίζει τη δημιουργία ενός συνεργατικού περιβάλλοντος που εμπλέκει τους μαθητές στην ανταλλαγή ιδεών, στην ανάπτυξη επιχειρημάτων, στην πρόκληση και στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων.</td><td>Η ατμόσφαιρα της τάξης
• υποστηρίζει τον διαμοιρασμό ιδεών και προσεγγίσεων
• αξιοποιεί διαφορετικές ιδέες και οπτικές
• προωθεί ανταλλαγή απόψεων και κριτική ανάλυση
• αναγνωρίζει ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν ο ένας από τον άλλο</td></tr>
<tr><td>Χρησιμοποιεί ερωτήσεις που προωθούν το συλλογισμό και κινητοποιούν τους μαθητές να επικοινωνούν με σαφήνεια τις μαθηματικές σκέψεις και τις ιδέες τους</td><td>Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού
• θέτουν μαθηματικές προκλήσεις στους μαθητές
• ενθαρρύνουν την αποτίμηση και ανάλυση των στρατηγικών
• αξιοποιούν παρανοήσεις των μαθητών για να στηρίξουν τη μαθησιακή διαδικασία
• προωθούν την εξερεύνηση εναλλακτικών στρατηγικών</td></tr>
<tr><td>Παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να αναλάβουν περισσότερες ευθύνες εκμάθησης και τους υποστηρίζει στην υλοποίηση των αποφάσεών τους</td><td>Οι μαθητές
• θέτουν προβλήματα προς επίλυση
• διατυπώνουν ερωτήσεις και αναζητούν απαντήσεις
• σχεδιάζουν και ανακαλύπτουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων
• εκφράζουν τις ιδέες τους και τις αποτιμούν με κριτικό τρόπο</td></tr>
</table>

(iii) *Διδασκαλία ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος (Teaching as problem solving)*: Ως διδασκαλία επίλυσης προβλήματος (problem solving) εννοούμε τη διδασκαλία που επικεντρώνεται στην επίλυση προβλήματος, μέσα από τρεις διακριτές πρακτικές (Schroeder & Lester, 1989):

α) τη διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος, που αφορά την εισαγωγή νέων εννοιών μέσω της ανάγκης επίλυσης προβληματικών καταστάσεων. Με αφετηρία ένα πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται με τα προηγούμενα εργαλεία, αναπτύσσονται νέες μαθηματικές τεχνικές και προσεγγίσεις. Η αναδιοργάνωση της γνώσης για την κατασκευή νέων μεθόδων και στρατηγικών οδηγεί στην ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου και τη ταυτόχρονη σύνδεση του με την προ υπάρχουσα γνώση. Έτσι, αναπτύσσεται μια σύνθετη κατανόηση που περιλαμβάνει την τυπική γνώση η οποία δομείται στη συνέχιση της διαισθητικής – εμπειρικής κατανόησης (Baroody, 2003, Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001). Για μια διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος είναι απαραίτητη η επιλογή κατάλληλων προβληματικών καταστάσεων που γεφυρώνουν παλιά και νέα γνώση, ώστε να αναδεικνύεται η ανάγκη υιοθέτησης νέων προσεγγίσεων.

β) τη διδασκαλία της επίλυσης, η οποία αφορά στη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να παρατηρούν οι ίδιοι την εξέλιξη της πορείας τους κατά την επίλυση (μέσα από μοντέλα επίλυσης, όπως του Polya). Η εστίαση βρίσκεται στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης που βασίζεται στην οπτική των Μαθηματικών ως ενός τρόπου σκέψης, αναζήτησης και εύρεσης μοτίβων για την επίλυση προβλημάτων. Ο στόχος σε μια τέτοια προσέγγιση είναι η απόκτηση ελέγχου από τους μαθητές πάνω στη διαχείριση προβληματικών καταστάσεων, με χρήση μεθόδων επίλυσης και ανάπτυξης της σκέψης τους. Μια διδασκαλία αυτού του τύπου περιλαμβάνει τη συζήτηση και ανάλυση κάθε συνιστώσας της διαδικασίας επίλυσης, την επισήμανση των ενεργειών των μαθητών, ενώ επιλύουν προβλήματα, καθώς και την υιοθέτηση μεταγνωστικού τύπου ελέγχου των βημάτων της επίλυσης και την ανάπτυξη στοιχείων αυτορρύθμισης.

γ) τη διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος, όπου η εστίαση βρίσκεται στους τρόπους με τους οποίους οι νέες γνώσεις μπορούν να αξιοποιηθούν για την επίλυση συνήθων ή μη-συνήθων προβλημάτων.

Η διδασκαλία μέσω της επίλυσης οδηγεί σε βελτίωση της απόδοσης των μαθητών, καθώς και στην ανάπτυξη θετικότερων στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά και τη χρησιμότητά τους (Harwell et al., 2007; Huntley et al., 2000; Riordan & Noyce, 2001; Schoenfeld, 2002; Thompson & Senk, 2001). Η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος μπορεί να ακολουθείται από διδασκαλία για την επίλυση, ώστε η νέα γνώση να εφαρμόζεται σε καινούργια πλαίσια (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001).

Σε κάθε περίπτωση διδασκαλίας προβλημάτων περιλαμβάνεται ο τονισμός στοιχείων που αποτελούν συνιστώσες κάθε είδους επίλυσης, όπως η προοδευτική εξέλιξη προς τον στόχο, η λειτουργική αξία του λάθους και η προσαρμοστικότητα της σκέψης.

(4γ). Διδακτικές πρακτικές στην τάξη των μαθηματικών: Η καθημερινή διδακτική πράξη διέπεται από ‘νόρμες’ εργασίας του εκπαιδευτικού, όπως είναι η διαχείριση του λάθους και η διαχείριση της μαθηματικής επικοινωνίας. Πρόκειται για πρακτικές διδακτικής διαχείρισης της μάθησης των μαθηματικών σε μικρο-επίπεδο, οι οποίες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές. Η παρούσα ενότητα εστιάζει αρχικά σε διδακτικές πρακτικές που στοχεύουν στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών, στην οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης και στην ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης. Ακολούθως προτάσσεται η συλλογική διάσταση της μαθηματικής δραστηριότητας που αναπτύσσεται στην τάξη. Προφανώς, οι δυο ομάδες διδακτικών πρακτικών αλληλεπιδρούν διαλεκτικά κατά την διάρκεια της εξέλιξης της διδασκαλίας.

(i) *Διδακτικές πρακτικές με έμφαση στη γνωστική διάσταση της εμπλοκής στη μάθηση των μαθηματικών: η περίπτωση της διαχείρισης του λάθους*: Η παιδαγωγική αξία **του λάθους** και η διδακτική του αξιοποίηση έχουν αναγνωριστεί στη βιβλιογραφία. Ειδικότερα, έχει βρεθεί ότι:

- Τα λάθη οδηγούν σε νέες ερωτήσεις και απορίες. Συχνά επιτρέπουν να αναδειχθούν νοήματα που δεν έχουν επαρκώς συγκροτηθεί από τους μαθητές.
- Τα λάθη επιτρέπουν μια βαθύτερη κατανόηση των παρανοήσεων που έχουν αναπτύξει οι μαθητές, με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να διαμορφώνει πληρέστερη αντίληψη των αδυναμιών τους.

- Η αναζήτηση του λάθους μετατοπίζει το βάρος από το αποτέλεσμα προς το συλλογισμό και τη μαθηματική επιχειρηματολογία. Έτσι, οι μαθητές διευκολύνονται στη σταδιακή ανάπτυξη ορθών μαθηματικών συλλογισμών.

Μια άλλη διδακτική πρακτική αφορά τη διδασκαλία με έμφαση στην **εννοιολογική κατανόηση** και όχι μόνο στην κατάκτηση διαδικαστικής γνώσης. Περιλαμβάνει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων, τη χρήση και σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων, την επισήμανση μαθηματικών σχέσεων μεταξύ αριθμών, παραστάσεων, σχέσεων, σχημάτων κλπ (Hiebert & Carpenter, 1992). Επιπλέον, η εννοιολογική κατανόηση περιλαμβάνει την επίγνωση της γνώσης που συγκροτείται στη βάση αυτής της κατανόησης (μεταγνώση). Η διδασκαλία είναι επιθυμητό να περιλαμβάνει την ανάπτυξη τόσο της εννοιολογικής όσο και της διαδικαστικής/ αλγοριθμικής κατανόησης που συμβάλλει στη σύνδεση της εννοιολογικής κατανόησης με τη συμβολική γλώσσα. Η εκμάθηση κανόνων και συμβόλων, χωρίς κατανόηση των εννοιών που βρίσκονται πίσω από αυτές, οδηγεί σε επιφανειακή κατανόηση που εύκολα μπορεί να ξεχαστεί αργότερα. Αντίθετα, η διδασκαλία με εννοιολογική εστίαση (όπως για παράδειγμα κατά την επίλυση ενός προβλήματος με τη διερεύνηση στρατηγικών επίλυσης) βοηθάει στον τρόπο ανασύστασης και αναδημιουργίας σχέσεων, που ενδεχομένως ένας μαθητής δεν θυμάται.

(ii) *Διδακτικές πρακτικές με έμφαση στην κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση της εμπλοκής στη μάθηση των μαθηματικών: η διαχείριση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στην τάξη*: Η διδακτική πράξη μπορεί να προσφέρει πολλαπλές ευκαιρίες για εμπλοκή των μαθητών σε **μαθηματικές συζητήσεις** μέσα στην τάξη. Οι συζητήσεις δημιουργούν ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές μαθαίνουν να ακούνε τα επιχειρήματα των άλλων, να ασκούν κριτική και να εκφράζουν τα δικά τους. Το περιβάλλον στο οποίο αυτό υλοποιείται μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές: μέσω της επικοινωνίας με έναν συμμαθητή τους, με άλλα μέλη μιας ολιγομελούς ομάδας ή μέσα στην ολομέλεια της τάξης. Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού ή των συμμαθητών μπορούν να αποτελέσουν το εφαλτήριο μιας συζήτησης: ερωτήσεις που αφορούν στην περιγραφή ή στην επεξήγηση μιας διαδικασίας, το σκεπτικό ενός τρόπου υπολογισμού, μιας προσέγγισης ή το σχηματισμό μιας εικασίας μπορούν να λειτουργήσουν ως αφετηρία ανάλυσης, επεξήγησης και σχηματισμού νέων ιδεών και οπτικών. Οι συζητήσεις μπορούν να προκληθούν και μετά από κατάλληλες ερωτήσεις του εκπαιδευτικού, οι οποίες επεκτείνουν τις σκέψεις των μαθητών, τους προκαλούν ή τους ξαφνιάζουν, που τους οδηγούν στην επανεξέταση και διερεύνηση συγκεκριμένων εννοιών, την ανάπτυξη ικανοτήτων και πρακτικών. Ο σχηματισμός χρήσιμων διδακτικά ερωτήσεων απαιτεί προετοιμασία από τον διδάσκοντα και ενασχόληση με θέματα που έχουν μαθηματικό ενδιαφέρον ή αποτελούν πηγές παρανοήσεων από τους μαθητές. Η χρήση ανοικτών ερωτήσεων, οι οποίες δεν απαντώνται με ένα ναι ή ένα όχι ή που έχουν πολλαπλές απαντήσεις ή ελλιπή δεδομένα, υποβοηθούν την ανάπτυξη συζητήσεων και συμμετοχικών διαδικασιών. Παράλληλα μεταφέρουν την εστίαση του διαλόγου από το δάσκαλο στους μαθητές και ενθαρρύνουν την έκφραση διαφορετικών οπτικών. Η υιοθέτηση ενός τέτοιου μοντέλου συζήτησης απαιτεί χρόνο εξοικείωσης από τους μαθητές.

Η διδακτική πρακτική της ενθάρρυνσης της **συνεργασίας** στην τάξη των μαθηματικών συνεισφέρει στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης αλλά και στη δημιουργία θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά (MacMath, Wallace, & Xiaohong, 2009). Ένα συνεργατικό περιβάλλον επιταχύνει την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών και παράλληλα συνεισφέρει στην ανάπτυξη αυτοπεποίθησης, συναισθημάτων ικανοποίησης και δημιουργία δεσμών συνάφειας με τα υπόλοιπα μέρη του συνόλου. Η κοινωνική δυναμική που δημιουργείται συνεισφέρει θετικά στη συμπερίληψη όλων των μαθητών σε ένα σύνολο ισότιμης συμμετοχής και δημιουργίας (Suurtamm et al., 2015). Η καλλιέργεια ισχυρών δεσμών μεταξύ των μελών συνεισφέρει στην ανάπτυξη της συνοχής της ομάδας και στην εκμάθηση τεχνικών συνεργασίας και συνεισφοράς σε ένα σύνολο. Παράλληλα, οι συνεργατικές τεχνικές είναι πιο αποτελεσματικές κατά την επίλυση προβλημάτων, καθώς η έκφραση διαφορετικών ιδεών οδηγεί συχνά σε καλύτερη κατανόηση των επόμενων σταδίων επίλυσης και διερεύνησης (Fleming, 2000).

Οι μαθητές χρειάζεται να ενθαρρύνονται να «κάνουν» Μαθηματικά μέσα από διαδικασίες που υποβοηθούν την εξερεύνηση και τη δημιουργία. Τρόποι ενεργής εμπλοκήςτων μαθητών μπορεί να είναι μέσω:

- της ενεργής αλληλεπίδρασης με άλλους μαθητές,
- της διερεύνησης μαθηματικών εννοιών με διαφορετικούς τρόπους (π.χ κιναισθητικός, αναλυτικός, εικονιστικός κλπ),
- της εμπλοκής τους σε συζητήσεις με σκοπό την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας,
- της διάθεσης ικανοποιητικού χρόνου για την ανάπτυξη και επεξεργασία των ιδεών τους.

Παράλληλα, η συνεργασία και η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης συντελεί στην αντιμετώπιση της **μαθηματικοφοβίας** (δηλαδή, συναισθημάτων άγχους, νευρικότητας και αποφυγής όταν ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με μαθηματικά προβλήματα) (Stuart, 2000). Οι αιτίες της μαθηματικοφοβίας μπορεί να αναζητηθούν στην έλλειψη αυτοπεποίθησης στις μαθηματικές ικανότητες του ίδιου του μαθητή, στις αντιλήψεις του εκπαιδευτικού, των άλλων μαθητών, του οικογενειακού ή κοινωνικού περιβάλλοντος. Λόγω της συσχέτισης που έχει η μαθηματικοφοβία με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά είναι σημαντικό να υιοθετηθούν στρατηγικές από τον εκπαιδευτικό μείωσης της, όπως αυτές που προτείνουν οι Jackson & Leffingwell (1999):

- προβολή θετικής στάσης απέναντι σε κάθε μαθητή ξεχωριστά
- ενθάρρυνση όλων των ερωτήσεων, αποριών κλπ των μαθητών
- συμπερίληψη των ενδιαφερόντων των μαθητών στις δραστηριότητες της τάξης
- αφιέρωση περισσότερου χρόνου σε μαθητές που δυσκολεύονται με τα Μαθηματικά
- χρήση ποικίλλων υλικών (π.χ γραπτές οδηγίες, ηλεκτρονικές πηγές, εποπτικό-χειραπτικό υλικό, χρήση ψηφιακών περιβαλλόντων)

Παράλληλα με την αντιμετώπιση της μαθηματικοφοβίας, η δημιουργία **θετικών στάσεων** απέναντι στα Μαθηματικά είναι σημαντικός παράγοντας δημιουργίας υψηλών επιδόσεων (Colgan, 2014). Πρακτικές όπως η στήριξη του εκπαιδευτικού προς τους μαθητές, η υιοθέτηση θετικών στάσεων και προδιαθέσεων από τον ίδιο τον διδάσκοντα και η συνεργασία με τους γονείς/κηδεμόνες των μαθητών μπορούν να βοηθήσουν σε αυτήν την προοπτική.

6. Βασικές Αρχές της Αξιολόγησης

Η *αξιολόγηση* συμβάλλει στην εξέλιξη της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών και των μαθητριών και υποστηρίζει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων για τη διδασκαλία και τη μάθηση (NCTM, 2000). Η αξιολόγηση δεν συνιστά μια διακριτή συνιστώσα της διδασκαλίας, αλλά εντάσσεται στις διδακτικές πρακτικές και αναδεικνύει τις κατανοήσεις που έχουν επιτευχθεί.

Οι μορφές αξιολόγησης εντάσσονται γενικότερα σε δύο κυρίως κατηγορίες, την τελική και τη διαμορφωτική. Η *τελική* αξιολόγηση συνιστά μια αποτίμηση αθροιστικού χαρακτήρα, η οποία υποστηρίζει ελάχιστα τις διδακτικές αποφάσεις ή τον εντοπισμό παρανοήσεων, καθώς λειτουργεί αποσπασματικά. Με τη *διαμορφωτική* αξιολόγηση καθορίζεται το 'σημείο' στο οποίο το άτομο τοποθετείται γνωστικά σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, ενώ η τοποθέτηση αυτή ερμηνεύεται και αξιοποιείται για τη λήψη αποφάσεων και για τον επανασχεδιασμό της διδασκαλίας. Βασικές πτυχές της διαμορφωτικής αξιολόγησης αποτελούν (α) ο προσδιορισμός του 'σημείου' στο οποίο τοποθετείται γνωστικά το άτομο, (β) ο καθορισμός των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων, (γ) η επιλογή τρόπων επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων και (δ) ο σχεδιασμός για μελλοντική δράση (van de Walle et al., 2017).

Με βάση την προβληματική που αναπτύχθηκε παραπάνω, υιοθετείται η προσέγγιση της αξιολόγησης που στοχεύει στη μάθηση (assessment for learning) και ανατροφοδοτεί μαθητές και εκπαιδευτικούς. Η αξιολόγηση για τη μάθηση αξιοποιεί το σύνολο των διαδικασιών αξιολόγησης, τόσο τις διαμορφωτικές όσο και τις αθροιστικές, ενώ πραγματοποιείται περισσότερες από μία φορές κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Στο πλαίσιο της αξιολόγησης για τη μάθηση, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν την αξιολόγηση ως εργαλείο διερεύνησης της γνώσης και των ικανοτήτων των μαθητών, των παρανοήσεων, των προκαταλήψεων ή των ελλειμμάτων που μπορεί να έχουν.

Τα *εργαλεία αξιολόγησης* που προτείνονται στο πλαίσιο της αξιολόγησης με στόχο τη μάθηση δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να συλλέξει δεδομένα, ώστε να αποκτήσει μια συνολική θέαση της μαθησιακής πορείας και της διδασκαλίας και να λάβει τεκμηριωμένες αποφάσεις για την ενίσχυση της μάθησης και την εξέλιξη της διδασκαλίας. Σε αυτήν την κατεύθυνση η αξιολόγηση, η διδασκαλία και η μάθηση αλληλοτροφοδοτούνται.

Η προσέγγιση της αξιολόγησης για τη μάθηση υιοθετεί μια κυκλική αντίληψη *σύνδεσης της αξιολόγησης με τις διδακτικές πρακτικές* του εκπαιδευτικού. Ειδικότερα, η αξιολογική διαδικασία θεωρείται πλήρως ενσωματωμένη στη διδασκαλία και αναπτύσσεται σε τέσσερα στάδια με βάση το σχήμα 3 παρακάτω.

Η κριτική διερεύνηση της μάθησης και της διδασκαλίας, ο σχεδιασμός, η μάθηση μέσα από τη διδακτική πρακτική και η ανάπτυξη αναστοχαστικών διαδικασιών ως μέρους του επανασχεδιασμού της διδασκαλίας και της αξιολόγησης συνιστούν ένα πλαίσιο ανάπτυξης των διδακτικών πρακτικών, αλλά και του ίδιου του εκπαιδευτικού.

Σχήμα 3. Στάδια ανάπτυξης της αξιολογικής διαδικασίας

7. Ο κύκλος σχεδιασμού, υλοποίησης και αξιολόγησης της διδασκαλίας ως πλαίσιο ανάπτυξης της διδακτικής πρακτικής και επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού

Οι σύγχρονες θεωρήσεις για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά προτείνουν την επαγγελματική μάθηση και τη συνεργασία μέσα από κοινότητες πρακτικής (Wenger, 1998) και κοινότητες διερεύνησης (Jaworski, 2006).

Κοινότητα πρακτικής: Τα άτομα "μοιράζονται" την επαγγελματική γνώση σε κοινές δράσεις και αλληλεπιδρούν στο πλαίσιο ενός κοινού εγχειρήματος. Η συμμετοχή του ατόμου στην κοινότητα πρακτικής αφορά τη διαπραγμάτευση και επαναδιαπραγμάτευση του εγχειρήματος (Lave & Wenger, 2005).

Η μάθηση των μελών μιας κοινότητας πρακτικής πραγματοποιείται μέσω μιας διαδικασίας νόμιμης 'περιφερειακής συμμετοχής'. Στο πλαίσιο αυτό η διδασκαλία αποτελεί μαθητεία σε μια κοινότητα πρακτικής, η οποία απαρτίζεται από έμπειρα και μη μέλη, τα οποία δεσμεύονται σε ένα κοινό εγχείρημα/ μια κοινή δράση (Wenger, 1998). Χαρακτηριστικά μιας κοινότητας πρακτικής είναι η *δέσμευση* στην κοινότητα, η *εικόνα-ταυτότητα* των ατόμων που την απαρτίζουν και η *ευθυγράμμιση* με τους στόχους της κοινότητας.

Κοινότητα διερεύνησης: Η Jaworski (2012) υπέδειξε την διερεύνηση της διδακτικής πράξης ως κρίσιμο *εργαλείο* επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά και ως *διαδικασία*, μέσα από την οποία οι εκπαιδευτικοί κατασκευάζουν ατομικές και συλλογικές εννοιολογικές κατανοήσεις και πρακτικές ως μέλη της κοινότητας πρακτικής τους (των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά). Χρησιμοποίησε τον όρο της 'κριτικής ευθυγράμμισης' για να αναφερθεί στην κριτική που ασκούν εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές στους στόχους, τις δράσεις και τις προοπτικές της κοινότητας πρακτικής (Goos, 2014). Η εξασφάλιση χρόνου για τη συνεργασία εκπαιδευτικών στο σχολείο αποτελεί σημαντικό παράγοντα υποστήριξης της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Sakonidis & Potari, 2014).

Μια εξαιρετικά δημοφιλής προσέγγιση στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά θεωρείται αυτή της *μελέτης μαθήματος (Lesson study)*, η οποία μπορεί να γίνει αντιληπτή ως μια δράση στο πλαίσιο της λειτουργίας μιας κοινότητας πρακτικής ή διερεύνησης (Huang, Takahashi & da Ponte, 2019). Οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται για να σχεδιάσουν επιλεγμένα μαθήματα και να εκφράσουν τον προβληματισμό τους για τη διδασκαλία που πρόκειται να πραγματοποιήσουν. Ειδικότερα, αποφασίζουν το μάθημα που θα διδαχθεί, προετοιμάζονται για τη συλλογή δεδομένων που αφορούν τους μαθητές και ορίζουν τον εκπαιδευτικό και την τάξη στην οποία θα πραγματοποιηθεί. Στη συνέχεια, σχεδιάζουν από κοινού το μάθημα, ένα μέλος της ομάδας διδάσκει και οι υπόλοιποι παρατηρούν, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία παρατήρησης που έχουν προ-αποφασίσει, Στη συνέχεια οργανώνουν και επεξεργάζονται τα δεδομένα που προκύπτουν από την παρατήρηση της διδασκαλίας. Τέλος, «μοιράζονται» τις παρατηρήσεις/ σημειώσεις τους, αναλύουν και συζητούν τα συμπεράσματα και (ως ομάδα) αναστοχάζονται σε σχέση με τη μάθηση που επιτεύχθηκε και το τι σήμαινε αυτό για τη δική τους διδασκαλία.

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν σε μια δράση 'μελέτης μαθήματος' αντιμετωπίζουν το μάθημα που αναλαμβάνουν καταρχήν ως το «καλύτερο» μάθημα που θα μπορούσαν να ετοιμάσουν και αφιερώνουν χρόνο για να συλλέξουν δεδομένα, συμπληρώνοντας φύλλα παρατήρησης. Για να αναστοχαστούν, δηλαδή, δημιουργούν μαθήματα από τα οποία πρόκειται να μάθουν. Μέσω της παρατήρησης εξασφαλίζουν ότι θα συζητήσουν για όσα συμβαίνουν πραγματικά στην τάξη και λαμβάνουν ενήμερες (informed) αποφάσεις, οι οποίες βασίζονται σε γεγονότα της τάξης (Dudley et al., 2019).

Στο πλαίσιο της προσέγγισης επαγγελματικής ανάπτυξης Lesson study οι εκπαιδευτικοί έχουν τον απαιτούμενο χρόνο για να σχεδιάσουν ένα μάθημα, να αλληλεπιδράσουν, να αναπτύξουν τη σκέψη τους και να προβληματιστούν σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών και αναλαμβάνουν την ευθύνη για την ατομική επαγγελματική εξέλιξη, εστιάζοντας την προσοχή τους στους δικούς τους μαθητές.

8. Βιβλιογραφία γενικού μέρους

Ainley, J., & Margolinas, C. (2013). Accounting for student perspectives in task design. *Task Design in Mathematics Education: an ICMI study 22*, 115-141.

Artigue, M. (2012). *Challenges in basic mathematics education.* Paris: UNESCO.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructive adaptive expertise*, 1-33. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Bussi, M. (2011). Artifacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 93-112.

Cai, J. & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 287-301.

Calleja, J. (2013). Mathematical investigations: The impact of students' enacted activity on design, development, evaluation and implementation In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22), 163–172. Oxford, UK. Available from http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Clarke, D. J., & Mesiti, C. (2013). Writing the student into the task: Agency and Voice. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A.

Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. Thompson, & Y. Yang (Eds.). *Proceedings of ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education*, 175–184. Oxford: International Commission on Mathematics Instruction.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 81-89.

Colgan, L. (2014). Hey, it's elementary-improving mathematics achievement with (in) possible thoughts. *Gazette-Ontario Association for Mathematics*, *52*(4), 15.

Dudley, P., Xu, H., & Lang, J. (2019). Empirical evidence of the impact of lesson study on: students' achievement, teachers' professional learning and on institutional and system evolution: an illustrative, complex case-development exemplar in London. *European Journal of* Education, 54(2), 202-217.

English, L. (1997). Promoting a Problem-Posing classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4, 172-179.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics* 66, 61-75.

Fleming, D. S. (2000). *A Teacher's Guide to Project-Based Learning*. Scarecrow Education, Attn: Sales Department, 15200 NBN Way, PO Box 191, Blue Ridge Summit, PA 17214.

González, G., & Eli, J. A. (2017). Prospective and in-service teachers' perspectives about launching a problem. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*, 159-201.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM,* 46(2), 189–200.

Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.) (2012) Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Harwell, M. R., Post, T. R., Maeda, Y., Davis, J. D., Cutler, A. L., Anderson, E., & Kahan, J. A. (2007). Standards based mathematics curricula and secondary students' performance on standardized achievement tests. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(1), 71-101.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997) Mathematical tasks and student cognition: Classroom based factors that support and inhibit high level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524–549.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195-222.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, *65*, 97.

Huang, R., Takahashi, A., da Ponte, J. (2019). *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics: An International Perspectiv*e. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Huntley, M. A., Rasmussen, C. L., Villarubi, R. S., Sangtong, J., & Fey, J. T. (2000). Effects of standards-based mathematics education: A study of the Core-Plus

Mathematics Project algebra and functions strand. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(3), 328-361.

Ing, M., Webb, N., Franke, M., Turrou, A., Wong, J., Shin. N. Fernandez, C. (2015). Student participation in elementary mathematics classrooms: the missing link between teacher practices and students' achievement? *Educational Studies in Mathematics* 66, 341-356.

Jackson, C. D., & Leffingwell, R. J. (1999). The role of instructors in creating math anxiety in students from kindergarten through college. *The Mathematics Teacher*, *92*(7), 583-586.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 187–211.

Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads. *ZDM,* 44, 613–625.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge university press.

Macmath, S., Wallace, J., and Chi, X. (2009). Problem-Based Learning in Mathematics A Tool for Developing Students' Conceptual Knowledge. *What Works? Research into Practice* (Online).

Margolinas, C. (2013). Task design in mathematics education. *Proceedings of ICMI study 22*, Oxford, UK: ICMI.

Mariotti M. A. (2000) Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25–53.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

Riordan, J. E., & Noyce, P. E. (2001). The impact of two standards-based mathematics curricula on student achievement in Massachusetts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(4), 368-398.

Sakonidis, C., & Potari, D. (2014). Mathematics teacher educators'/researchers' collaboration with teachers as a context for professional learning. *ZDM, 46*(2), 293–304. doi:10.1007/s11858-014-0569-z.

Schoenfeld, A. H. (2002). Purposes and methods of research in mathematics education. *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*, 221-236. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM*, *52*(6), 1163-1175.

Schroeder, T. L. & Lester, F. K., Jr (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton (Ed.) *New directions for elementary school mathematics*, 31-42. Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., & Kim, G. (2009) The role of mathematics curriculum materials in large scale urban reform. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction*, 37-55. New York: Routledge.

Stuart, V. (2000). Math curse or math anxiety? *Teaching children mathematics*, *6*(5), 330-335.

Suurtamm, C., & Neubrand, M. (2015). Assessment and testing in mathematics education. In Sung Je Cho (Ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges*, 557-562. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Thompson, D. R., & Senk, S. L. (2001). The effects of curriculum on achievement in second-year algebra: The example of the University of Chicago School Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 58-84.

Τζεκάκη, Μ. (2015). Μαθηματική Δραστηριότητα και μαθηματικά έργα. Στο Μ. Καλδρυμίδου & Ξ. Βαμβακούση (Επ.) *Πρακτικά 11ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 51-66. Ιωάννινα: ΕΝΕΔΙΜ.

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J., & da Ponte, J. P. (2020). Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-Based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2), 2-14.

van de Walle, J. A., Bay-Williams, J.M., Karp, K. S. (2014). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Toronto: Pearson Canada

van de Walle, J. A., Lovin L. H., K arp K. S., Bay - Williams J. M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο*, Αθήνα: Τυπωθήτω/ Δαρδανός.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wood, T. (2000). Differences in teaching and opportunities for learning in primary mathematics classes. *ZDM*, 5, 149-154.

Β. ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

α) Αριθμός, Άλγεβρα, Ανάλυση

1. Σημασία του πεδίου

Αριθμοί

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν το θεμέλιο των Μαθηματικών. Είναι άμεσα συνδεδεμένοι με όλα τα φαινόμενα της πραγματικής ζωής που περιγράφονται με μαθηματικά αντικείμενα (μεταβλητές, εξισώσεις, συναρτήσεις, κλπ). Για αυτό και η γνώση των ιδιοτήτων και των εφαρμογών των πραγματικών αριθμών αποτελεί βασική κατεύθυνση του Προγράμματος Σπουδών σε όλες τις τάξεις της δωδεκάχρονης εκπαίδευσης. Στο Λύκειο η μελέτη των αριθμών επικεντρώνεται στην εμβάθυνση των γνώσεων των ιδιοτήτων του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των βασικών υποσυνόλων του, δηλαδή των φυσικών, ακεραίων, ρητών και άρρητων αριθμών.

Άλγεβρα

Η Άλγεβρα αποτελεί ένα σημαντικό μέρος του μαθηματικού περιεχομένου στο Λύκειο. Χωρίζεται στις θεματικές ενότητες: Κανονικότητες, Συναρτήσεις, Αλγεβρικές Παραστάσεις, Αλγεβρικές Σχέσεις (Ισότητες – Ανισότητες) και Σύνολα. Ακολουθεί η ανάλυση της σημασίας του μαθηματικού περιεχομένου της Άλγεβρας στο Πρόγραμμα Σπουδών ανά θεματική ενότητα.

Κανονικότητες-Συναρτήσεις

Η μελέτη κανονικοτήτων, οι οποίες ουσιαστικά αποτελούν ειδική περίπτωση συνάρτησης, διατρέχει το πρόγραμμα σπουδών από την αρχή της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έως και το Λύκειο με την μελέτη των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων. Γενικότερα, η σύνδεση δύο μεταβλητών ποσοτήτων και η μελέτη της επίδρασης της μεταβολής του ενός στη μεταβολή του άλλου (συμμεταβολή), επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλων συναρτήσεων. Για τον λόγο αυτό, οι συναρτήσεις αποτελούν θεμελιώδη έννοια των Μαθηματικών και ένα σημαντικό εργαλείο για την μοντελοποίηση φυσικών και κοινωνικών φαινομένων. Ο «συναρτησιακός» τρόπος σκέψης μπορεί να αποτελέσει τη βάση ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών και προτάσεων. Στο Γυμνάσιο οι μαθητές έχουν γνωρίσει την έννοια της συνάρτησης κυρίως σημειακά, δηλαδή ως διαδικασία αντιστοίχισης ενός σημείου του πεδίου ορισμού σε ακριβώς ένα σημείο του πεδίου τιμών. Στο Λύκειο στόχος είναι η κατανόηση της συνάρτησης ως μαθηματικό αντικείμενο που συνδέει δύο συμμεταβαλόμενες ποσότητες. Γνώση που είναι απαραίτητη προκειμένου να γίνουν κατανοητές αργότερα οι έννοιες της Ανάλυσης.

Αλγεβρικές Παραστάσεις - Αλγεβρικές Σχέσεις

Η σημασία των Αλγεβρικών Παραστάσεων έχει αναδειχθεί στο Δημοτικό και κυρίως στο Γυμνάσιο. Στο Λύκειο παρουσιάζονται μαθηματικά ποιο σύνθετες μορφές αλγεβρικών μετασχηματισμών που σχετίζονται με τη ν-στη ρίζα και τους άρρητους αριθμούς.

Οι Αλγεβρικές Σχέσεις ομαδοποιούνται σε Ισότητες και Ανισότητες. Οι εξισώσεις, οι ανισώσεις και τα συστήματα (γραμμικά και μη-γραμμικά) εξισώσεων αποτελούν σημαντικά μαθηματικά εργαλεία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλήματος. Η μαθηματικοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης ή ενός φαινομένου μέσω εξίσωσης, ανίσωσης ή συστήματος επιτρέπει την βαθύτερη κατανόηση του φαινομένου, ενώ η επίλυσή τους και η ερμηνεία των λύσεων στο πλαίσιο του προβλήματος συμβάλει στην εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν το υπό εξέταση θέμα.

Σύνολα

Στα σχολικά μαθηματικά τα σύνολα χρησιμοποιούνται κυρίως ως γλώσσα έκφρασης μαθηματικών ισχυρισμών. Η μελέτη των βασικών σχέσεων των συνόλων και η αξιοποίηση τους σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών συνεισφέρει στη βαθύτερη κατανόηση εννοιών και την ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης των μαθητών. Ιδιαίτερα στη διδασκαλία και τη μάθηση των Στοχαστικών Μαθηματικών η χρήση των συνόλων και των ιδιοτήτων τους είναι αναγκαία.

Ανάλυση

Η Μαθηματική Ανάλυση θεωρείται ως ένα από τα κορυφαία επιτεύγματα της ανθρώπινης διανόησης με πλήθος εφαρμογών όχι μόνο στα Μαθηματικά αλλά και σε άλλα επιστημονικά πεδία. Με τη βοήθεια της Ανάλυσης εκφράστηκαν με μαθηματική ακρίβεια θεμελιώδεις έννοιες και λύθηκαν σημαντικά προβλήματα των Μαθηματικών και άλλων επιστημών. Βάση της Μαθηματικής Ανάλυσης είναι ο Απειροστικός Λογισμός στον οποίο εισάγονται οι μαθητές στο Λύκειο, ιδιαίτερα στα μαθήματα προσανατολισμού. Ο Απειροστικός Λογισμός απαιτεί την ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης ποιοτικά διαφορετικού από αυτόν που γνώρισαν οι μαθητές στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Ο πυρήνας αυτού του διαφορετικού τρόπου σκέψης είναι οι άπειρες διαδικασίες και ο προσδιορισμός αγνώστων ποσοτήτων μέσα από την προσέγγιση τους οσοδήποτε κοντά από γνωστές ποσότητες. Με τις διαδικασίες αυτές επιλύονται προβλήματα που δεν μπορούν να επιλυθούν με αλγεβρικές και γεωμετρικά μεθόδους (προσεγγιστική επίλυση εξισώσεων, υπολογισμοί εμβαδών κ.α.). Επειδή οι βασικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού καθώς και οι αποδείξεις ορισμένων θεωρημάτων είναι ιδιαίτερα δύσκολο να προσεγγιστούν από μαθητές του λυκείου, η διδασκαλία του στο λύκειο έχει ως κεντρικό στόχο να αναπτύξουν οι μαθητές μια πρώτη διαισθητική αντίληψη αυτών των εννοιών και να επιλύσουν προβλήματα που αναδεικνύουν τη σημασία του. Οι θεματικές ενότητες στις οποίες υποδιαιρείται η μελέτη της Ανάλυσης στην Τρίτη τάξη του Λυκείου είναι η σύγκλιση, η διαφόριση και η ολοκλήρωση.

Σύγκλιση

Η σύγκλιση και το όριο αποτελούν τη βάση της μαθηματικής ανάλυσης και η κατανόηση τους είναι θεμελιώδης για την μελέτη αυτής της περιοχής των μαθηματικών. Στον Απειροστικό Λογισμό αποτελούν τη βάση για τη μελέτη του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Είναι ιδιαίτερα δύσκολες έννοιες και χαρακτηρίζουν τον τρόπο σκέψης που απαιτείται στην ανάλυση. Με τη βοήθεια τους προσδιορίζουμε μεγέθη που δεν μπορούν να προσδιοριστούν με αλγεβρικές ή γεωμετρικές μεθόδους.

Διαφόριση

Κεντρική έννοια της διαφόρισης αποτελεί η παράγωγος συνάρτησης. Η παράγωγος είναι το βασικό εργαλείο για τη μελέτη των χαρακτηριστικών μιας συνάρτησης, όπως είναι η μονοτονία και τα ακρότατα, η κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Έτσι, είναι εφικτός ο σχηματισμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και γενικότερα η εξαγωγή συμπερασμάτων για την συμπεριφορά της σε όλο το πεδίο ορισμού της καθώς και η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με πολύπλοκη μορφή. Η παράγωγος είναι μια μορφή συμμεταβολής και εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους, σε πλήθος προβλημάτων και φαινομένων του φυσικού, κοινωνικού και οικονομικού περιβάλλοντος, όπως είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σώματος, η ένταση ηλεκτρικού ρεύματος, το οριακό κόστος μιας επιχείρησης κ.α.. Αυτή η διττή σημασία της παραγώγου, ως ρυθμός μεταβολής και ως εργαλείο της μελέτης των χαρακτηριστικών της συνάρτησης συνθέτει τη σημαντικότητα του διαφορικού λογισμού στα μαθηματικά και ειδικότερα στα σχολικά μαθηματικά.

Ολοκλήρωση

Η ολοκλήρωση αποτελεί μια πολύ ισχυρή μέθοδο επίλυσης προβλημάτων που δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με καθαρά γεωμετρικές ή αλγεβρικές μεθόδους. Έχοντας ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών στη Γεωμετρία, όπως στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, στη Φυσική, όπως στον υπολογισμό μάζας και έργου, στην Οικονομία και σε άλλα επιστημονικά πεδία, συμβάλλει ουσιαστικά στην κατανόηση και μοντελοποίηση του πραγματικού κόσμου. Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού αναδεικνύει τη σχέση της ολοκλήρωσης και της διαφόρισης ως δύο αντίστροφες διαδικασίες μέσα από ένα δίκτυο διαφορετικών αναπαραστάσεων (γραφικής, αναλυτικής).

2. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και δυσκολίες των μαθητών

Αριθμοί

Η διδασκαλία των αριθμών αρχίζει από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, με έμφαση στους φυσικούς αριθμούς και στις ιδιότητες των πράξεων, αξιοποιώντας την άτυπη αριθμητική γνώση των μαθητών. Στο Γυμνάσιο γίνεται η επέκταση του συνόλου των αριθμών και των ιδιοτήτων τους στους ακεραίους και στους ρητούς. Στη συνέχεια εισάγονται η έννοια της τετραγωνικής ρίζας και οι άρρητοι αριθμοί. Στόχος είναι η ανάδειξη των δομικών στοιχείων των αριθμητικών συνόλων.

Στο Λύκειο δίνεται έμφαση στη διάκριση ρητών και αρρήτων, καθώς και στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των υποσυνόλων του. Επίσης εισάγεται η έννοια της ν-στής ρίζας και ορίζεται η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Στα μαθηματικά προσανατολισμού δίνεται έμφαση στην μαθηματική επαγωγή και ορίζονται οι δυνάμεις με εκθέτη άρρητο αριθμό και οι λογάριθμοι. Οι λογάριθμοι ορίζονται μέσω της λογαριθμικής συνάρτησης η οποία ορίζεται ως η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής.

Όπως προκύπτει από ερευνητικά δεδομένα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στη διάκριση μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών. Πολλοί μαθητές, ακόμη και τελειόφοιτοι λυκείου, τους ρητούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία (περιοδικούς ρητούς) όπως π.χ. ο 0,555… ή ο 0,777… τους θεωρούν άρρητους. (Fischbein, Jehiam & Choen, 1995, Giannakoulias, Sougioul & Zachariades, 2007). Επειδή όμως ταυτόχρονα γνωρίζουν ότι ένα κλάσμα ακεραίων είναι ρητός αριθμός, δημιουργείται γνωστική σύγκρουση όταν πρέπει να αναγνωρίσουν αν ένας αριθμός είναι ρητός ή άρρητος και έχουν δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις του, π.χ. $\frac{2}{3}$ και $0{,}666\ldots$ Σε ορισμένους επικρατεί η αντίληψη ότι τα κλάσματα ακεραίων είναι ρητοί αριθμοί και αναγνωρίζουν τον αριθμό ως ρητό, ενώ σε άλλους επικρατεί η αντίληψη ότι οι όλοι οι αριθμοί με άπειρα μη μηδενικά δεκαδικά ψηφία είναι άρρητοι και αναγνωρίζουν τον αριθμό ως άρρητο. Υπάρχουν και μαθητές που δεν μπορούν να αποφασίσουν αν ο αριθμός αυτός είναι ρητός ή άρρητος (Giannakoulias, Sougioul & Zachariades, 2007, Zazkis & Sirotic 2010).

Σύγχυση επίσης προκαλεί η δεκαδική προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού η οποία χρησιμοποιείται σε αριθμητικούς υπολογισμούς, χωρίς να γίνεται πάντα κατανοητό ότι δεν αποτελεί αναπαράσταση του άρρητου αριθμού αλλά προσέγγισή του από έναν ρητό. Έτσι π.χ. πολλοί μαθητές ταυτίζουν τον αριθμό π με το 3,14 με συνέπεια να τους δημιουργείται σύγχυση σχετικά με το αν ο αριθμός π είναι ρητός ή άρρητος. Μαθησιακές δυσκολίες παρατηρούνται και αναφορικά με την πυκνότητα των ρητών αριθμών, δηλαδή ότι για κάθε δύο ρητούς $p < q$ υπάρχει ρητός s ώστε $p<s<q$. Πολλοί μαθητές, επηρεασμένοι από την ύπαρξη επόμενου αριθμού στο σύνολο των ακεραίων, θεωρούν ότι και στο σύνολο των ρητών υπάρχει επόμενος ρητός αριθμός. Π.χ. θεωρούν ότι μεταξύ του 2/5 και του 3/5 ή μεταξύ του 1,2 και του 1,3 δεν υπάρχει ρητός αριθμός (Vamvakousi & Vosniadou, 2007). Επίσης, υπάρχουν μαθητές που θεωρούν ότι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί εναλλάσσονται, δηλαδή ένας ρητός ακολουθείται από έναν άρρητο, αυτός ακολουθείται από ένα ρητό κ.ο.κ. (Sirotic & Zazkis, 2007). Είναι σημαντικό οι μαθητές να αντιληφθούν την πυκνότητα των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή ότι για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς $α<β$ υπάρχει ρητός $ρ$ ώστε $α<ρ<β$ και ως συνέπεια αυτού ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών καθορίζεται από το σύνολο των ρητών. Δηλαδή δύο πραγματικοί αριθμοί $α$, $β$ είναι ίσοι αν και μόνον αν κάθε ρητός που είναι μικρότερος του $α$ είναι μικρότερος του $β$ και κάθε ρητός μικρότερος του $β$ είναι μικρότερος του $α$. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να χρησιμοποιούμε στην πράξη κατάλληλες ρητές προσεγγίσεις πραγματικών αριθμών.

Στη Β΄ Λυκείου στο μάθημα προσανατολισμού οι μαθητές εισάγονται στην αρχή της μαθηματικής επαγωγής, την πλέον σημαντική ιδιότητα των φυσικών αριθμών. Οι μαθητές γνωρίζουν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι και έχουν χρησιμοποιήσει σε προηγούμενες τάξεις τον λεγόμενο εμπειρικό επαγωγικό συλογισμό. Δηλαδή, για να διαπιστώσουν αν μια σχέση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς, διαπιστώνουν ότι αυτή ισχύει για ένα «μεγάλο» αρχικό κομάτι των φυσικών αριθμών και οδηγούνται επαγωγικά στο συμπέρασμα ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στο ότι αυτού του τύπου ο συλογισμός δεν αποτελεί μαθηματική απόδειξη. Απλώς μας οδηγεί στη δημιουργία μιας εικασίας η οποία μπορεί και να είναι λανθασμένη. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής μας επιτρέπει σε δύο βήματα να αποδείξουμε την ισχύ μιας πρότασης για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Η αρχή αυτή, ως μέθοδος απόδειξης αποτελεί ένα από τα βασικά μαθηματικά αποδεικτικά σχήματα που μαθαίνει ο μαθητής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Από την έρευνα προκύπτει ότι σχετικά με την μαθηματική επαγωγή οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις παρακάτω δυσκολίες :

- ο κυκλικός συλλογισμός τους οδηγεί να θεωρούν ότι στο επαγωγικό βήμα η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε n (Ernest, 1984; Movshoviz-Hadar, 1993)
- εμφανίζουν δυσκολίες στην απόδειξη ότι η $P(n)$ συνεπάγεται την $P(n + 1)$ (Nardi & Iannone, 2003).
- δεν αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα του πρώτου βήματος, δηλαδή την επαλήθευση ότι η $P(1)$ αληθεύει και συχνά το παραμελούν (Dubinsky & Lewin, 1986; Stylianides et al., 2007).

- δεν συνειδητοποιούν ότι η μαθηματική επαγωγή αφορά το σύνολο φυσικών αριθμών και όχι μεγαλύτερα σύνολα όπως των πραγματικών αριθμών (Stylianides et al., 2007).

Η παρακάτω διαισθητική προσέγγιση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής θα μπορούσε να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της. Τοποθετούμε στη σειρά και σε όρθια θέση τα πλακίδια του γνωστού παιχνιδιού "ντόμινο" ώστε η απόσταση κάθε ενός από το επόμενο του να είναι μικρότερη του ύψους τους. Αν ρίξουμε το πρώτο πλακίδιο τότε θα πέσουν όλα. Αυτό συμβαίνει γιατί πέφτει το πρώτο (αληθεύει η P(1)) και, αν πέσει κάποιο θα πέσει και το επόμενο του (αν αληθεύει η P(n) τότε αληθεύει και η P(n + 1)).

Άλγεβρα

Κανονικότητες – Συναρτήσεις

Στο Γυμνάσιο η έννοια της συνάρτησης ερμηνεύεται ως σχέση μεταξύ δυο αλληλοεξαρτώμενων ποσοτήτων. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τέσσερις βασικές αναπαραστάσεις: λεκτική, γραφική, χρήση πινάκων και συμβολική (χρήση αλγεβρικών τύπων), μελετούν φαινόμενα συμμεταβολής μεγεθών και επιλύουν προβλήματα που συνδέονται με γραμμικές και απλές τετραγωνικές συναρτήσεις. Η κύρια εστίαση στο Γυμνάσιο είναι η γραμμική συνάρτηση και δευτερευόντως η $y=\alpha x^2$. Στο Λύκειο εισάγεται ο τυπικός συμβολισμός καθώς και η αντιστοίχιση μεταξύ στοιχείων δυο συνόλων. Η συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως σχέση αντιστοιχίας και παράλληλα ως συμμεταβολή μεγεθών. Οι μαθητές επιλύουν προβλήματα όπου χρησιμοποιούνται συναρτήσεις, μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις και μελετούν γραφικές παραστάσεις (πιο περιορισμένα στη Γενική Παιδεία και ευρύτερα στον Προσανατολισμό). Προκειμένου να αναπτυχθεί μια πλούσια εικόνα της έννοιας και να οικοδομηθούν συνδέσεις, οι μαθητές πρέπει σταδιακά να έλθουν σε επαφή με διαφορετικούς τρόπους αναπαραστάσεων συναρτήσεων (Thompson & Carlson, 2017), όπως: συμβολικός, γραφικός, διαγραμματικός (π.χ διάγραμμα Venn), λεκτικός, μέσω πίνακα, πεπλεγμένος (μέσω συναρτησιακής σχέσης). Ενώ στο Γυμνάσιο δίνεται έμφαση στις γραφικές παραστάσεις των ευθειών $y=\alpha x+\beta$, από την Α΄ Λυκείου μελετώνται πιο συστηματικά τα χαρακτηριστικά και οι μετασχηματισμοί των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων. Στη συνέχεια, στη Β΄ και στη Γ' Λυκείου στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας ορίζονται οι πολυωνυμικές, οι τριγωνομετρικές και οι εκθετικές συναρτήσεις. Παράλληλα, στο μάθημα προσανατολισμού της Β΄ και της Γ΄ Λυκείου, οι μαθητές εμβαθύνουν στις τριγωνομετρικές, πολυωνυμικές και εκθετικές-λογαριθμικές συναρτήσεις και μελετούν ιδιότητες τους (μονοτονία, ακρότατα, πεδία ορισμού). Έτσι η συνάρτηση από απλή διαδικασία θεωρείται ως αντικείμενο πάνω στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν νέες διαδικασίες – ενέργειες όπως η σύνθεση, οι αλγεβρικές πράξεις, η αντιστροφή, το όριο, η παραγώγιση και η ολοκλήρωση. Στη τελευταία τάξη του Λυκείου γίνεται η πλήρης συνειδητοποίηση της συμπληρωματικότητας της συμμεταβολής με αυτή της αντιστοιχίας. Διδακτικά, η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης είναι σημαντική γιατί αποτελεί:

α) μια έννοια που διατρέχει ολόκληρο το πρόγραμμα σπουδών και χρησιμοποιείται σε όλες τις περιοχές των Μαθηματικών. Για παράδειγμα, οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου μπορούν να ιδωθούν και να εξετασθούν ως συναρτήσεις.

β) ένα πολύτιμο εργαλείο για την αποσαφήνιση της μαθηματικής σκέψης και των μαθηματικών συλλογισμών που μπορεί να αλλάξει ριζικά την διατύπωση και απόδειξη σημαντικών προτάσεων.

γ) ένα μέσο για περιγραφή, αναπαράσταση και μοντελοποίηση φαινομένων, καταστάσεων ή προβλημάτων εκτός του πεδίου των μαθηματικών.

δ) ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών απαραίτητο για όσους μαθητές επιλέξουν σπουδές που θα χρησιμοποιούν μαθηματικά.

Οι δυσκολίες των μαθητών με τις συναρτήσεις σχετίζονται κυρίως με:

- τη συνθετότητα της έννοιας, την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή (ανεξάρτητη και εξαρτημένη), συμμεταβολή, σύνολο, καθώς και την ποικιλία των αναπαραστάσεών της (λεκτική διατύπωση, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών)
- το επίπεδο αφαίρεσης που απαιτεί η μελέτη της συνάρτησης στα διαφορετικά πλαίσια στα οποία μπορεί να εμφανίζεται (αριθμητική, μέτρηση κ.λπ.), καθώς και η ίδια η διαφορετικότητα αυτών των πλαισίων
- την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης ως διαδικασία και ως αντικείμενο που συνοδεύεται από μια ποικιλία αναπαραστάσεων. Συχνά οι μαθητές ταυτίζουν την έννοια της συνάρτησης με μια υπολογιστική διαδικασία ή έναν τύπο και δυσκολεύονται να περάσουν στο επίπεδο της συνάρτησης–αντικείμενο (πχ. να συσχετίσουν έναν τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο).

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές συχνά έχουν μια πολύ περιορισμένη αντίληψη για το τι είναι συνάρτηση το οποίο τους εμποδίζει να πουν τι είναι εκτός από πολύ συγκεκριμένες πρωτοτυπικές περιπτώσεις. Οι μαθητές σύμφωνα με τις έρευνες, συχνά ταυτίζουν την συνάρτηση με την ύπαρξη ενός απλού κανόνα. Έτσι, για παράδειγμα μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων συχνά θεωρείται ότι πρόκειται για δυο συναρτήσεις με βάση τα διαστήματα του πεδίου ορισμού (Clement, 2001). Η αναγκαιότητα ύπαρξης μιας αναλυτικής παράστασης - αλγεβρικού τύπου για να περιγράψει μια σχέση ως συνάρτηση είναι ένα διαδεδομένο λάθος των μαθητών, που αντιστοιχεί σε προηγούμενες ιστορικά οπτικές ακόμη και μετά από χρόνια ενασχόλησης με συναρτήσεις (Tall, 1996). Έτσι, η σχέση $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, θεωρείται συνάρτηση ενώ η σχέση που περιγράφει την πρόταση: Σε κάθε μαθητή/τρια μιας τάξης Β΄Λυκείου αντιστοιχούμε το ύψος του/της, δεν θεωρείται συνάρτηση αφού δεν υπάρχει κάποιος τύπος. Άλλη παρανόηση είναι η πεποίθηση ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν διακόπτεται, οπότε μια γραφική παράσταση με διακοπές, όπως π.χ. η γραφική παράσταση του ακέραιου μέρους, δεν θεωρείται ότι απεικονίζει συνάρτηση. Επίσης διαδεδομένη παρανόηση είναι η πεποίθηση ότι οι όλες οι συναρτήσεις πρέπει να είναι 1-1: για παράδειγμα η f (x) = 12 για αυτό το λόγο δεν θεωρείται συνάρτηση (Markovits, Eylon, & Bruckheimer, 1986).

Αλγεβρικές Παραστάσεις - Αλγεβρικές Σχέσεις (Ισότητες – Ανισότητες)

Οι Αλγεβρικές Παραστάσεις έχουν αναπτυχθεί στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο, με τη χρήση του γράμματος ως γενικευμένο αριθμό (άγνωστος, σταθερά, μεταβλητή), με τον υπολογισμό της αριθμητικής τους τιμής, την αναγνώριση και περιγραφή της δομής τους και τέλος τον μετασχηματισμό τους σε απλούστερες μορφές (κυρίως στη Γ Γυμνασίου). Στο Λύκειο, εξελίσσεται περεταίρω με την ενσωμάτωση νέων αλγεβρικών ταυτοτήτων και της νιοστής ρίζας.

Οι μαθητές έχουν ασχοληθεί με εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού στο Γυμνάσιο. Επίσης, έχουν μελετήσει την επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Έχουν επίσης διαπραγματευτεί την επίλυση γραμμικών συστημάτων 2x2 αλγεβρικά και γραφικά. Έχουν αναπτύξει στρατηγικές μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων με χρήση εξισώσεων και ανισώσεων α΄ και β΄ βαθμού.

Στο Λύκειο και συγκεκριμένα στην Α΄ τάξη, οι μαθητές μελετούν εξισώσεις και ανισώσεις α΄ και β΄ βαθμού καθώς και δυωνυμικές εξισώσεις. Στη Β΄ τάξη και συγκεκριμένα στην άλγεβρα γενικής παιδείας, μελετούν πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις οποιουδήποτε βαθμού και απλές άρρητες εξισώσεις οι οποίες συνήθως ανάγονται σε πολυωνυμικές. Οι αλγεβρικές σχέσεις της Β΄ τάξης περιλαμβάνουν επίσης τις τριγωνομετρικές εξισώσεις και ανισώσεις καθώς και τα γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα εξισώσεων. Οι εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις μελετώνται στα μαθηματικά στο μάθημα γενικής παιδείας Γ' Λυκείου και στο μάθημα προσανατολισμού της Β΄ τάξης. Τέλος, η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων γενικής μορφής, υλοποιείται αξιοποιώντας κυρίως τις συναρτήσεις και τις ιδιότητές τους (π.χ. μονοτονία) στα μαθηματικά προσανατολισμού των τάξεων Β΄ και Γ' τάξης.

Στο Λύκειο οι μαθητές επιλύουν τις εξισώσεις, τις ανισώσεις και τα συστήματα ακολουθώντας την αλγεβρική και την συναρτησιακή προσέγγιση (Drijvers, 2010). Στην αλγεβρική θεώρηση, το x παριστάνει την άγνωστη ποσότητα την οποία πρέπει να προσδιορίσουμε και αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους όπως, με μετασχηματισμό της εξίσωσης και τη βοήθεια παραγοντοποίησης. Παράλληλα όμως στο πρόγραμμα σπουδών ακολουθείται και η συναρτησιακή προσέγγιση, δηλαδή η αξιοποίηση της γραφικής παράστασης και των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης, π.χ. μονοτονία, για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων καθώς και η γραφική αναπαράσταση γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων για τη γραφική τους επίλυση.

Οι μαθητές συνήθως δυσκολεύονται στην αξιοποίηση της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων και συνήθως προτιμούν τις αλγεβρικές διαδικασίες επίλυσης (Huntley et al., 2007). Επίσης, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης μιας ρεαλιστικής κατάστασης και την αποτύπωσή της μέσω αλγεβρικής παράστασης. Τέλος, δυσκολίες προκύπτουν στις περιπτώσεις που η επίλυση εξίσωσης, ανίσωσης και συστημάτων δεν ακολουθεί τις συνήθεις αλγοριθμικές διαδικασίες και απαιτεί την ανάπτυξη μαθηματικών συλλογισμών και της μαθηματικής σκέψης.

Σύνολα

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και».

Οι δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται κυρίως με:

- τη διαφορετική ερμηνεία στα Μαθηματικά των σύνδεσμων «ή» και «και» από εκείνη που του αποδίδονται συνήθως στην καθημερινή χρήση τους.
- τη δυσκολία χρήσης του συμβολισμού και της μετάβασης από την αλγεβρική στην συνολοθεωρητική αναπαράσταση και αντίστροφα.

Ανάλυση

Σύγκλιση

Μια πρώτη επαφή με άπειρες διαδικασίες έχουν οι μαθητές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία με τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου. Σε αντίθεση με τον υπολογισμό του εμβαδού πολυγώνων, ο οποίος γίνεται με πεπερασμένες διαδικασίες, το εμβαδόν του κύκλου το υπολογίζουμε προσεγγίζοντας το οσοδήποτε κοντά από εγεγραμμένα και περιγεγραμμένα στον κύκλο κανονικά πολύγωνα. Αυτή η διαδικασία υπολογισμού έχει ως βάση την έννοια της σύγκλισης και του ορίου, η οποία αποτελεί την θεμελιώδη έννοια της Ανάλυσης. Οι μαθητές προσεγγίζουν διαισθητικά την έννοια της σύγκλισης αρχικά στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου για ακολουθίες και στη συνέχεια στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση ξένων διαστημάτων. Για την κατανόηση των ιδιοτήτων του ορίου συνάρτησης απαιτούνται γνώσεις συναρτήσεων που έχουν μελετήσει στην Β' Λυκείου. Στη Β' Λυκείου οι μαθητές, μέσα από την μελέτη προβλημάτων που δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με τις γνωστές μέχρι τότε σε αυτούς διαδικασίες, όπως π.χ. ο υπολογισμός του εμβαδού κύκλου, πρέπει να αντιληφθούν την αναγκαιότητα εισαγωγής άπειρων διαδικασιών και να προσεγγίσουν διαισθητικά τη σύγκλιση και το όριο ακολουθίας. Μέσα από απλά παραδείγματα και κατάλληλες αναπαραστάσεις θα αναπτυχθεί μια αρχική εικόνα για αυτές τις έννοιες συμβατή με τον τυπικό ορισμό τους και με κατάλληλες εφαρμογές θα αναδειχθεί πόσο σημαντικές είναι. Η σημασία της σύγκλισης ακολουθίας θα αναδειχθεί και στην Γ' Λυκείου μέσα από την χρήση της σε προσεγγιστικές μεθόδους. Μέσα από κατάλληλα παραδείγματα οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν πλούσιες αναπαραστάσεις για το όριο και τη συνέχεια συνάρτησης.

Από έρευνες προκύπτει ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν αντιλαμβάνεται σωστά την έννοια του ορίου. Οι αντιλήψεις που έχουν διαμορφώσει οι μαθητές από την χρήση των όρων στην καθημερινή ζωή δεν εξαφανίζονται αλλά αναμιγνύονται με την νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και αναπροσαρμόζονται. Για παράδειγμα οι λέξεις «τείνει» και «όριο» έχουν ήδη μια συγκεκριμένη σημασία για τους μαθητές πριν αρχίσουν να διδάσκονται τη σύγκλιση στο σχολείο και συνεχίζουν να βασίζονται σ' αυτές και στη συνέχεια. Τέτοιες περιπτώσεις είναι η έννοια του «τείνει προς» όπως: πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του), πλησιάζει ... χωρίς να το φθάνει, πλησιάζει ... μέχρι σχεδόν να το φθάσει, μοιάζει (π.χ. «αυτό το κόκκινο τείνει προς το ροζ»). Άλλες παρανοήσεις συνδέονται με την έννοια του αξεπέραστου ορίου (το οποίο μπορούμε να φθάσουμε ή είναι αδύνατο να φθάσουμε), με την έννοια του σημείου το οποίο πλησιάζουμε χωρίς να το φθάνουμε, με την έννοια του μέγιστου ή ελάχιστου ανώτερου ή κατώτερου ορίου και τέλος με την έννοια του τέλους ή τέρματος. Συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών αφορούν μια δυναμικού τύπου ερμηνεία της έννοιας σύμφωνα την οποία το όριο μιας συνάρτησης αποτελεί μια διακριτή ακολουθία βημάτων με σκοπό την καλύτερη προσέγγιση της τιμής της συνάρτησης (Oehrtman, 2009), ή εικόνες του ορίου ως ασύμπτωτης (η οποία δεν φτάνει ποτέ την τελική τιμή) ή ως σύνολα σημείων συσσώρευσης. Ως πηγή δημιουργίας προβλημάτων κατανόησης θεωρείται η διάσταση που υπάρχει μεταξύ του αλγεβρικού και του «αναλυτικού» τρόπου σκέψης. Η Μαθηματική Ανάλυση απαιτεί αλγεβρικές δεξιότητες και ικανότητες αλλά ταυτόχρονα και την υιοθέτηση ενός διαφορετικού τρόπου σκέψης καθώς και νέες τεχνικές. Αυτό επειδή στην Ανάλυση πολλές φορές τις ποσότητες που χρησιμοποιούμε δεν τις γνωρίζουμε ακριβώς, αλλά προσεγγιστικά, ως όρια γνωστών ποσοτήτων. Συνεπώς, ενώ η απόδειξη των ισοτήτων στην Άλγεβρα έχει στατικό χαρακτήρα στον Απειροστικό Λογισμό έχει δυναμικό κάτι το οποίο απαιτεί μια επιπλέον προσπάθεια προσαρμογής από τον μαθητή. Η έννοια της συνέχειας, από γνωστική άποψη παρουσιάζει παρόμοιες δυσκολίες. Για παράδειγμα, ένα εμπόδιο αποτελεί το γεγονός ότι υφίσταται μια αυθόρμητη αντίληψη που προκαλείται από τη χρήση στην καθημερινή ζωή φράσεων όπως «έβρεχε συνεχώς όλη μέρα» (δηλαδή, δεν υπήρξε διακοπή στη βροχόπτωση) ή «η σιδηροδρομική γραμμή είναι συνεχώς ενωμένη» (δεν υπάρχουν κενά στις ράγες). Αυτή η άποψη ενισχύεται συχνά από τις προσπάθειες «επεξήγησης» της έννοιας της συνέχειας με περιγραφές όπως ότι η γραφική παράσταση «είναι μονοκόμματη» ή «σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί», συγχέοντας μ' αυτό τον τρόπο τις μαθηματικές έννοιες της συνέχειας και της συνεκτικότητας (Tall &Vinner, 1981).

Διαφόριση

Η θεματική περιοχή της διαφόρισης εντάσσεται στη Γ' Λυκείου με τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας και τα Μαθηματικά προσανατολισμού. Στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας οι μαθητές χρησιμοποιούν τον λόγο μεταβολής για να ορίσουν τη στιγμιαία ταχύτητα, να αναγνωρίζουν ότι η παράγωγος εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους και να τον αξιοποιούν στην επίλυση απλών προβλημάτων και στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων. Στα Μαθηματικά προσανατολισμού, αναδεικνύεται ακόμα περισσότερο ο ρόλος της παραγώγου ως ρυθμού μεταβολής και δίνεται έμφαση στην αξιοποίηση της παραγώγου για την μελέτη ιδιοτήτων της συνάρτησης, καθώς και στην επίλυση ποιο σύνθετων προβλημάτων και στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων.

Κατά την ανάπτυξη των εννοιών του διαφορικού λογισμού υπάρχουν σημαντικές δυσκολίες ή παρανοήσεις από τους μαθητές (Tall, 2002). Οι μαθητές συνήθως ανταποκρίνονται επιτυχώς στην εύρεση της παραγώγου με την εφαρμογή των κανόνων παραγώγισης σε βασικές συναρτήσεις. Σημαντική όμως δυσκολία αποτελεί η σύνδεση της παραγώγου με διαφορετικές έννοιες ή αναπαραστάσεις, όπως είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της συνάρτησης και ο ρυθμός μεταβολής μεγεθών. Ενδεικτικά επισημαίνονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εφαρμογή της παραγώγου στην επίλυση προβλημάτων και ερμηνεία φαινομένων καθώς και σε παρανοήσεις που σχετίζονται με την έννοια της εφαπτομένης (Biza, Christou & Zachariades, 2008).

Ολοκλήρωση

Το ορισμένο ολοκλήρωμα εισάγεται μέσω της περιγραφής του υπολογισμού εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από μια θετική συνάρτηση και τον οριζόντιο άξονα. Αρχικά προσεγγίζεται διαισθητικά και στη συνέχεια αναδεικνύεται η σύνδεση του με τη παράγωγο μέσα από το θεμελιώδες θεώρημα. Οι προηγούμενες γνώσεις της παραγώγου είναι αποφασιστικής σημασίας για την κατανόηση της παραπάνω σύνδεσης. Η ενότητα του ολοκληρώματος (όπως και της παραγώγου) είναι μία από αυτές όπου, εκτός από την κατανόηση των εννοιών, οι μαθητές πρέπει να δουν και να αντιμετωπίσουν εφαρμογές σε προβλήματα. Μέσα από προβλήματα που αφορούν στην εύρεση εμβαδού, όγκου κ.α. θα φανεί η αποτελεσματικότητα των εργαλείων του Απειροστικού Λογισμού σε περιπτώσεις οι οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με άλλα εργαλεία. Αξιοποιώντας τις ΤΠΕ, θα γίνουν αντιληπτές έννοιες, όπως της παράγουσας μιας συνάρτησης (και κατ' επέκταση όλων των βασικών συναρτήσεων), του ορισμένου ολοκληρώματος και εφαρμογών του στον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων χωρίων και όγκων στερεών εκ περιστροφής.

Από αρκετές έρευνες (π.χ Metaxas, 2007) προκύπτει ότι οι μαθητές εμφανίζουν παρανοήσεις σε μια σειρά από έννοιες και τεχνικές που συναντούν στην ολοκλήρωση. Πολλές φορές επιδεικνύουν «ψευδο-εννοιολογική» συμπεριφορά που σημαίνει ότι χρησιμοποιούν την ελάχιστη προσπάθεια προκειμένου να ανταποκρίνονται με έναν τρόπο που θα κρίνεται από τον διδάσκοντα ως ικανοποιητικό. Στην περίπτωση της ολοκλήρωσης πολλές από τις παρατηρούμενες παρανοήσεις των μαθητών οφείλονται σε προηγούμενες συνδεόμενες έννοιες. Η γνωστή και από άλλες πλευρές της Ανάλυσης διάσταση μεταξύ της εννοιολογικής και διαδικαστικής κατανόησης υφίσταται και στον ολοκληρωτικό λογισμό, με αποτέλεσμα οι γνώσεις των μαθητών να είναι πολλές φορές αποσπασματικές. Έτσι, δεν μπορούν να διακρίνουν τις συνδέσεις μεταξύ των εννοιών και το χάσμα αυτό ενισχύεται από ελλιπείς γνώσεις σε προηγούμενες ενότητες της Ανάλυσης (όρια, συνεχείς συναρτήσεις και παράγωγοι). Για παράδειγμα, παρόλη τη κεντρική σημασία του θεμελιώδους θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού στην Ανάλυση, έρευνες έχουν καταγράψει σημαντικές δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση του. Η ελλιπής κατανόηση στην έννοια της συνάρτησης ως αντικείμενο, στο ρυθμό μεταβολής και στον τρόπο που συμμεταβάλονται ο ρυθμός μεταβολής με την ανεξάρτητη μεταβλητή οδηγούν τους μαθητές σε μηχανιστική εφαρμογή του θεωρήματος χωρίς βαθύτερη κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται.

3. Ενδεικτικά έργα

Έργο 1. (Α΄ Λυκείου, Αριθμοί)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	Υπολογισμός, αναπαράσταση, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες, τεκμηρίωση, εικασία	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων / στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Α΄ Λυκείου/ ανισότητες/ γραφικές παραστάσεις				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρημα-τολογίας	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά	***Συγκείμενο***	Αριθμητική, Φυσική		

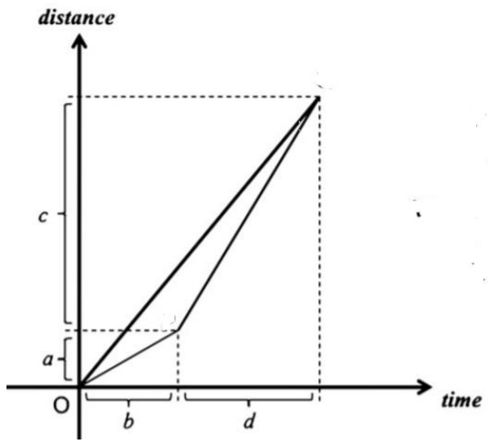
α) Συμφωνείτε με τη διαπίστωση του μαθητή;

Αν $\alpha\beta$ και $\gamma\delta$ θετικοί ρητοί αριθμοί με $\alpha\beta < \gamma\delta$ μπορείτε να βρείτε ένα ρητό αριθμό μεταξύ τους;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Στο παρακάτω διάγραμμα εκφράζουμε την κίνηση ενός κινητού που διανύει μια απόσταση α σε χρόνο b με ταχύτητα $\frac{\alpha}{b}$ και στη συνέχεια διανύει μια απόσταση c σε χρόνο d με ταχύτητα … Αν η δεύτερη ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από την πρώτη ταχύτητα του κινητού μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η μέση ταχύτητα με την οποία το κινητό διανύει το άθροισμα των αποστάσεων είναι μεταξύ των δυο ταχυτήτων; Πώς συσχετίζεται αυτό με το ερώτημα γ;



Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Ο στόχος είναι οι μαθητές να διερευνήσουν την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές διερευνούν την έννοια της «πυκνότητας» στους ρητούς, εφόσον έρχονται σε επαφή με έναν τρόπο εύρεσης ενός ρητού αριθμού ανάμεσα στο 1/2 και στο 3/4 και στη συνέχεια γενικεύουν την συγκεκριμένη μέθοδο για δύο τυχαίους θετικούς ρητούς. Μπορεί στην ερώτηση γ) ορισμένοι μαθητές να προτείνουν άλλο τρόπο προσδιορισμού ρητού μεταξύ των $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$, όπως π.χ. ο μέσος όρος τους. Αν δεν υπάρξουν τέτοιοι μαθητές, μπορεί ο καθηγητής να προκαλέσει συζήτηση για άλλο τρόπο προσδιορισμού ενδιάμεσου ρητού. Ως προς τη «διαδοχικότητα» των ρητών, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να εξηγήσουν εάν έχουν ή δεν έχουν νόημα φράσεις της μορφής ο «επόμενος» ρητός του 1/3 κλπ. Επίσης γίνεται διασύνδεση με ένα πρόβλημα της Φυσικής.

Έργο 2. (Α΄ Λυκείου, Αριθμοί-Σύνολα)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Εικασία, γενίκευση, απόδειξη</td><td rowspan="3">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α΄ Λυκείου/ Πραγματικοί αριθμοί /σύνολα</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td></td></tr>
</table>

Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρημα-τολογίας	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές		***Συγκείμενο***			

α) Συγκρίνετε τα σύνολα $A=\{q\in Q: q<\sqrt{2}\}$ και $B=\{q\in Q: q<\pi\}$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Εναλλακτική διατύπωση χωρίς χρήση συνόλων:

α΄) Έστω $q\in Q$. Ισχύει ότι $q<\sqrt{2}$ αν και μόνον αν $q<\pi$; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

β) Συγκρίνετε τα σύνολα $A=\{q\in Q: q<\sqrt{2}\}$ και $B=\{q\in Q: q<\sqrt{2}+0{,}1\}$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Εναλλακτική διατύπωση χωρίς χρήση συνόλων:

β΄) Έστω $q\in Q$. Ισχύει ότι $q<\sqrt{2}$ αν και μόνον αν $q<\sqrt{2}+0{,}1$; Δικαιολογείστε την απάντηση σας

γ) Αν α,β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί ώστε α<β να συγκρίνετε τα σύνολα

$A=\{q\in Q: q<\alpha\}$ και $B=\{q\in Q: q<\beta\}$

Εναλλακτική διατύπωση χωρίς χρήση συνόλων:

γ΄) Έστω α,β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί ώστε α<β και $q\in Q$. Ισχύει ότι $q<\alpha$ αν και μόνον αν $q<\beta$; Δικαιολογείστε την απάντηση σας

δ) Αν α,β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και $\{q\in Q: q<\alpha\}=\{q\in Q: q<\beta\}$ ποια από τις επόμενες σχέσεις ισχύει: α<β, α=β, α>β. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

Εναλλακτική διατύπωση χωρίς χρήση συνόλων:

δ΄) Έστω α,β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι: αν $q\in Q$ τότε $q<\alpha$ αν και μόνον αν $q<\beta$.

Ποια από τις επόμενες σχέσεις ισχύει;

$\alpha<\beta, \alpha=\beta, \alpha>\beta$.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Στο συγκεκριμένο έργο, μέσα από τα σύνολα των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροι από δύο πραγματικούς αριθμούς, οι μαθητές διερευνούν τη σημασία της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς. Για την κάθε ερώτηση δίνεται και εναλλακτική διατύπωση χωρίς χρήση συνόλων. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει την μια ή την άλλη προσέγγιση. Αρχικά οι μαθητές συνδέουν τη σχέση δύο συγκεκριμένων αριθμών με τους ρητούς που είναι μικρότεροι από αυτούς. Στην ερώτηση α μπορούν οι μαθητές εύκολα να βρουν ένα ρητό αριθμό μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του π. Στην ερώτηση β ο προσδιορισμός συγκεκριμένου αριθμού μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{2}$ + 0,1 ποιο δύσκολος. Ενδεχομένως, κάποιοι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την πυκνότητα των ρητών για να το αποδείξουν. Στις ερωτήσεις γ και δ γενικεύεται η σύνδεση της σχέσης δύο αριθμών με τη σχέση των συνόλων ρητών που είναι μικρότεροι από αυτούς. Στόχος της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη είναι να γίνει σαφές ότι οι ρητοί αριθμοί, αν και λιγότεροι, καθορίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αυτό έχει μεγάλη σημασία γιατί τους ρητούς αριθμούς τους γνωρίζουμε άμεσα σε αντίθεση με τους άρρητους. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε στην πράξη στη θέση ενός άρρητου μια όσο καλή προσέγγιση ρητού χρειαζόμαστε.

Έργο 3. (Α Λυκείου, σύνολα).

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Υπολογισμός, αναπαράσταση, τεκμηρίωση</td><td rowspan="3">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α Λυκείου Προσαν./ Σύνολα</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή Γενίκευση</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας, μοντελοποίηση</td><td>Γενικά</td><td>Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td></td></tr>
<tr><td>Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td>να μπορούν ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά</td><td>Συγκείμενο</td><td>επιστημονικό πρόβλημα</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Έστω Ω = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} και Α = {3,4,9,10,11} Β={1,3,4,7} και Γ={1,4,8,11}.

α) Να παραστήσετε ένα διάγραμμα Venn με τα σύνολα Ω,Α,Β,Γ.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους και να σκιάσετε στο διάγραμμα Venn που κανατε στην ερώτηση α) τα παρακάτω σύνολα: $A \cap B, B \cup \Gamma, A \cup (B \cap \Gamma), A \cap (B \cup \Gamma), A \cap B \cap \Gamma, A' \cap B'$.

γ) Βρείτε το σύνολο Δ που έχει στοιχεία όλα τα υποσύνολα του Α. Είναι το Α υποσύνολο του Δ; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Εισαγωγικά, μπορεί ο καθηγητής να υπενθυμίσει στους μαθητές τους ορισμούς της ένωσης και της τομής δύο συνόλων, καθώς και του συμπληρώματος συνόλου. Με τις ερωτήσεις α) και β) στόχος είναι η εφαρμογή των ορισμών των πράξεων συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και η σύνδεση αυτών. Μπορεί να συζητηθεί από τους μαθητές να αποδώσουν και λεκτικά τα σύνολα της ερώτησης β). Με βάση την ερώτηση γ) μπορεί να γίνει συζήτηση της διαφοράς που υπάρχει μεταξύ ενός στοιχείου και του μονοσυνόλου που περιέχει αυτό το στοιχείο.

Έργο 4. (Α Λυκείου, σύνολα).

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	Υπολογισμός, αναπαράσταση, τεκμηρίωση	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Α Λυκείου/ Σύνολα				
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή Γενίκευση				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας, μοντελοποίηση	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	να μπορούν ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά	***Συγκείμενο***	επιστημονικό πρόβλημα		

Το σύνολο Ω των μαθητών ενός Λυκείου έχει 300 μαθητές. Έστω Α το σύνολο των μαθητών του Λυκείου που δηλώνουν ότι γνωρίζουν Αγγλικά και Γ το σύνολο των μαθητών του Λυκείου που δηλώνουν ότι γνωρίζουν Γαλλικά. Το σύνολο Α έχει 220 μαθητές και το σύνολο Γ έχει 40 μαθητές και υπάρχουν 35 μαθητές που δηλώνουν ότι γνωρίζουν Αγγλικά και Γαλλικά.

α) Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα Venn με τα σύνολα Ω, Α και Γ.

β) Να γράψετε συμβολικά τα σύνολα των μαθητών που

i) γνωρίζουν και τις δύο γλώσσες

ii) γνωρίζουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες

iii) δεν γνωρίζει καμία από τις δύο γλώσσες

γ) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων των συνόλων

i) $Α \cap Γ$

ii) $Α \cup Γ$

iii) $(Α \cup Γ)'$

δ) Να περιγράψετε λεκτικά το σύνολο $Α \cap Γ'$, να το σκιάσετε στο διάγραμμα Venn και να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του.

ε) Να προτείνετε αντίστοιχη ερώτηση με την (δ) για ένα άλλο σύνολο σε ένα συμμαθητή σας και να συζητήσετε την απάντηση του.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, βοηθούν στη κατανόηση του ρόλου και των ιδιοτήτων του συνόλου. Οι μαθητές μπορούν να συζητήσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των συνόλων στις ερωτήσεις α) και β) και πάνω στο διάγραμμα Venn να σημειώσουν το πλήθος των στοιχείων κάθε συνόλου. Αυτό θα τους βοηθήσει να απαντήσουν την ερώτηση γ). Η δ) αναμένεται ίσως δυσκολέψει κάποιους μαθητές. Μπορεί ο καθηγητής να γράψει στον πίνακα ενδεχόμενες διαφορετικές λεκτικές περιγραφές μαθητών και να γίνει συζήτηση στην τάξη ώστε να προκύψει η σωστή λεκτική περιγραφή του συνόλου.

Έργο 5. (Α Λυκείου, Συναρτήσεις).

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Υπολογισμός, αναπαράσταση, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες, τεκμηρίωση, εικασία</td><td rowspan="3">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α Λυκείου /Δευτεροβάθμια εξίσωση, παραβολή</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή
Απόδειξη</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας</td><td>Γενικά</td><td>Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία</td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td>Αυθεντικό κείμενο, geogebra</td></tr>
</table>

			μαθηματικού συλλογισμού		
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Να κατανοούν τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού	***Συγκείμενο***	Μαθηματικό πρόβλημα		

Ο Γερμανός μαθηματικός August Ferdinand Möbius στα μέσα του 19ου αιώνα βρήκε έναν τρόπο να υπολογίζει το γινόμενο δυο θετικών αριθμών μέσω της γραφικής παράστασης της παραβολής $y=x^2$: για να βρει το γινόμενο α x β ένωσε τα σημεία της παραβολής με τετμημένες -α και β. Το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον κατακόρυφο άξονα είναι το ζητούμενο γινόμενο.

α) Ελέγξτε με έναν συμμαθητή σας τον ισχυρισμό για ένα ζευγάρι θετικών α και β.

β) Μπορείτε δουλεύοντας με έναν συμμαθητή σας να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας και του κατακόρυφου άξονα; Πώς τεκμηριώνεται ο ισχυρισμός του Mobius;

γ) Αν θεωρούσαμε άλλη παραβολή (π.χ την $y=2x^2$) τι θα ίσχυε; Μπορείτε να κάνετε έναν αντίστοιχο ισχυρισμό για την νέα παραβολή που θεωρήσατε;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Η διερεύνηση προβλημάτων μέσα στο ιστορικό πλαίσιο δημιουργίας τους προσφέρει τη δυνατότητα της σύνδεσης των μαθηματικών με την κοινωνία και της παρουσίασης των μαθηματικών με «ανθρώπινο πρόσωπο» δηλαδή ως ανθρώπινων δημιουργημάτων που απαντούν και αντανακλούν τις συνθήκες της εποχής τους. Η δυνατότητα της χρήσης των υπολογιστικών μηχανών σήμερα, δεν πρέπει να επισκιάζει τον σημαντικό ρόλο που έπαιζαν οι υπολογιστικές τεχνικές στο παρελθόν και κατά συνέπεια η βαρύτητα που είχε η εύρεση αριθμητικών τεχνικών όπως αυτή του έργου παραπάνω. Με αφορμή τέτοια έργα, μπορεί να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν και άλλα ιστορικά και κοινωνικά στοιχεία, όπως η χρησιμότητα των υπολογιστικών τεχνικών εκείνης της εποχής, ο ρόλος των απαιτήσεων των άλλων επιστημονικών πεδίων στα μαθηματικά κλπ προκειμένου να συμπεριληφθούν όλοι οι μαθητές στη συζήτηση αποτελώντας τμήμα της μαθηματικής κοινότητας της τάξης.

Έργο 6. (Α Λυκείου, Ρίζες Πραγματικών Αριθμών).

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	Επίλυση προβλήματος,	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά***	Επίλυση προβλήμ

Ενότητα	Α Λυκείου		αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (εξήγηση, τεκμηρίωση)	***της διδακτικής προσέγγισης***	ατος, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί, Προσέγγιση				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Μαθηματικής επικοινωνίας	***Γενικά***	Να μιλήσουν, να γράψουν και να ακούσουν μαθηματικά (Μαθηματική επικοινωνία)	***Προτεινόμενοι πόροι***	αριθμομηχανή
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση	***Συγκείμενο***	Επιστημονικό		

Δίνεται η παράσταση: $\left(\sqrt[3]{2}+3\right)\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-3\cdot\sqrt[3]{2}+9\right]$.

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση αριθμομηχανής, με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που βρήκατε με τις δυο μεθόδους.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Η μαθηματική δραστηριότητα έχει στόχο την σύγκριση των προσεγγιστικών και αλγεβρικών μεθόδων κατά τον μετασχηματισμό παραστάσεων. Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές διαπιστώνουν ότι η δεκαδική προσέγγιση των άρρητων αριθμών μπορεί να οδηγήσει σε σχετικά σημαντική διαφορά από το ακριβές αποτέλεσμα μιας αριθμητικής παράστασης. Με τον προσεγγιστικό υπολογισμό της παράστασης στο ερώτημα α, δεν επιτυγχάνεται το ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα με τη χρήση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων και χρειάζεται να αυξήσουμε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων ώστε το τελικό αποτέλεσμα να γίνει ίσο με 29. Αλλά και σε αυτή την περίπτωση πρέπει να γίνει σαφές στους μαθητές ότι το αποτέλεσμα της αριθμομηχανής σημαίνει ότι τα δεκαδικά ψηφία που υπολογίζει η αριθμομηχανή είναι 0 αλλά δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποια είναι τα επόμενα. Με την εφαρμογή των ταυτοτήτων πραγματικών αριθμών το αποτέλεσμα είναι ακριβές και άμεσο, αλλά απαιτεί μαθηματική σκέψη και όχι απλώς εκτέλεση αριθμητικών πράξεων και υπολογισμών. Προτείνεται η σύγκριση των μεθόδων να γίνει όχι μόνο ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος, αλλά και την ταχύτητα υλοποίησης.

Έργο 7 **(Β Λυκείου Γενική Παιδεία, Συναρτήσεις)**

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμοί, Άλγεβρα και Ανάλυση	***Ειδικά***	Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (Συμβολισμός, εξήγηση, τεκμηρίωση)	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία - πολλαπλά σημεία 'εισόδου', ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Β΄ Λυκείου, Συναρτήσεις				
Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Οπτικοποίησης, Επίλυσης προβλήματος, Μοντελοποίησης	***Γενικά***	Να μιλήσουν, να γράψουν και να ακούσουν μαθηματικά (Μαθηματική επικοινωνία)	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Να είναι μαθηματικά εγγράμματοι, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά αλλά και να επεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά.	***Συγκείμενο***	Προσωπικό		

Το ύψος του νερού σε έναν κόλπο μεταβάλλεται λόγω του φαινομένου της παλίρροιας και την άμπωτης. Εμπειρικά μετρήθηκε ότι το ύψος του νερού σε μέτρα δίνεται από τον τύπο h(t) = 25 + 2ημt, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή της παρατήρησης.

α) Σε τι ύψος βρισκόταν το νερό κατά τη στιγμή της έναρξης των παρατηρήσεων; Ήταν σε άμπωτη (χαμηλότερο σημείο), σε παλίρροια (υψηλότερο σημείο) ή σε ενδιάμεσο στάδιο;

β) Ποιο είναι το υψηλότερο και ποιο το χαμηλότερο ύψος του νερού και σε ποιες χρονικές στιγμές το πετυχαίνει σε διάστημα μιας ημέρας (ξεκινώντας την μέτρηση από τις 00:00).

γ) Λόγω της κλιματικής αλλαγής προβλέπεται ότι σε 10 χρόνια η εναλλαγή μεταξύ άμπωτης και παλίρροιας θα μειωθεί στον μισό χρόνο. Ποια συνάρτηση θα δίνει το ύψους την χρονική στιγμή t στις νέες συνθήκες;

δ) Σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και συζητείστε τις διαφορές ύψους του νερού στις δύο περιπτώσεις.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης

Εισαγωγικά μπορεί να γίνει μια συζήτηση στην τάξη για τα περιοδικά φαινόμενα. Σημαντικό στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας που θα αναπτυχθεί με βάση αυτό το έργο είναι η χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου. Στην ερώτηση δ) με βάση τις δύο γραφικές παραστάσεις μπορεί να γίνει συζήτηση για την εξέλιξη του φαινομένου στις δύο περιπτώσεις.

Έργο 8 **(Β Λυκείου Γενική Παιδεία, Συναρτήσεις)**

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμοί, Άλγεβρα και Ανάλυση	***Ειδικά***	Μετασχηματιστικές δράσεις (Συστηματοποίηση, οπτικοποίηση, αναπαράσταση)	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	Πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Β Λυκείου, Πολυώνυμα				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας, Μαθηματικής επικοινωνίας, Επιλογής και χρήσης εργαλείων	***Γενικά***	Να μιλήσουν, να γράψουν και να ακούσουν μαθηματικά (Μαθηματική επικοινωνία)	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Αξιοποιούν δεξιότητες αξιολόγησης, ελέγχου και αυτογνωστικής ρύθμισης της προόδου τους προκειμένου να οικοδομήσουν ισχυρές ταυτότητες				

	μαθητευομένων των μαθηματικών.				

Μια εταιρία θέλει να κατασκευάσει μια δεξαμενή σε σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ώστε η μεγάλη πλευρά της βάσης να είναι 1 μέτρο μεγαλύτερη από την άλλη και να έχει ύψος 1 μέτρο παραπάνω από το μήκος της μεγάλης πλευράς της βάσης.

α) Εκφράστε τον όγκο της δεξαμενής σε m^3 ως συνάρτηση της μικρής πλευράς της βάσης.

β) Βρείτε το μήκος της μικρής πλευράς της βάσης αν η δεξαμενή πρέπει να έχει χωρητικότητα 6 m^3.

γ) Η εταιρεία ρώτησε έναν μηχανικό αν μπορεί να κατασκευαστεί και μια μεγάλη δεξαμενή χωρητικότητας 2023 m^3 ώστε το μήκος της μικρής πλευράς της βάσης να είναι ακέραιος αριθμός. Ο μηχανικός απάντησε θετικά. Αν συμφωνείτε με τον μηχανικό βρείτε τα μήκη των τριών πλευρών. Αν διαφωνείτε με τον μηχανικό δικαιολογείστε την απάντηση σας.

δ) Υπάρχει τιμή για το μήκος της μικρής πλευράς της βάσης, ώστε αν αυτό διπλασιαστεί τότε να διπλασιαστεί και η χωρητικότητα της δεξαμενής;

ε) Γενικότερα, υπάρχει τιμή για το μήκος της μικρής πλευράς της βάσης, ώστε αν αυτό πολλαπλασιαστεί με έναν θετικό πραγματικό τότε και η χωρητικότητα της δεξαμενής να πολλαπλασιαστεί με τον ίδιο αριθμό;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης

Η ερώτηση γ) αναμένεται να δυσκολέψει τους μαθητές. Κάποιοι μπορεί να σκεφτούν να χρησιμοποιήσουν την μονοτονία της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) που εκφράζει τον όγκο της δεξαμενής και επειδή η P(x) είναι γνησίως αύξουσα με δοκιμές να καταλήξουν ότι P(11)<20233<P(12) και άρα δεν υπάρχει ακέρια λύση στην πολυωνυμική εξίσωσηP(x)=2023. Μια άλλη προσέγγιση αυτής της ερώτησης είναι μέσω της παρατήρησης ότι το γινόμενο άρτιου και περιττού αριθμού είναι άρτιος. Άρα το γινόμεο τριών διαδοχικών θετικών ακεραίων είναι άρτιος. Επίσης, οι μαθητές μπορεί να δυσκολευτούν στη διαμόρφωση των εξισώσεων των ερωτήσεων δ) και ε). Στην περίπτωση αυτή, ο καθηγητής μπορεί να τους βοηθήσει να διαμορφώσουν σταδιακά τα δύο μέλη της εξίσωσης.

Έργο 9. (Β Λυκείου Προσανατολισμού, Λογάριθμοι)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση	***Ειδικά***	Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (εξήγηση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων)	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	Επίλυση προβλήματος
Ενότητα	Συναρτήσεις				
Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή, Ισοδυναμία				
		Γενικά			

Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Επίλυσης προβλήματος		Να συλλογιστούν για διαφορετικούς σκοπούς, π.χ. για να εικάσουν, να πείσουν, να αποδείξουν (Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού/ flexible modality of reasoning)	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Να αναπτύσσουν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις	***Συγκείμενο***	Επιστημονικό		

Το μέγεθος R ενός σεισμού είναι το μέτρο της ενέργειας που εκλύεται από την εστία κατά τη διάρκεια της σεισμικής δόνησης

Ένταση I ενός σεισμού είναι η κατάταξη της σοβαρότητας της σεισμικής δόνησης σε μια περιοχή με βάση παρατηρήσεις. Εξαρτάται από το μέγεθος του σεισμού, την απόσταση της περιοχής από το επίκεντρο του σεισμού, το βάθος της εστίας και το μέσο μετάδοσης των σεισμικών κυμάτων.

Σύμφωνα με την κλίμακα Richter το μέγεθος R ενός σεισμού εντάσεως I δίνεται από τον τύπο

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

όπου I_0 η ελάχιστη ανιχνεύσιμη ένταση σεισμού από στους σεισμογράφους.

α) Να βρεθεί το μέγεθος ενός σεισμού που έχει ένταση 1000 φορές μεγαλύτερη από το σεισμό με την ελάχιστη ανιχνεύσιμη ένταση.

β) Να εκφραστεί η ένταση I ως συνάρτηση του μεγέθους R και του I_0.

γ) Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ενός σεισμού από την ένταση ενός άλλου που είναι μικρότερος κατά 1 μονάδα Richter;

δ) Ο μεγαλύτερος σεισμός που έχει καταγραφεί έγινε στη Χιλή στις 22 Μαΐου 1960, είχε μέγεθος 9,5 και διάρκεια 10 λεπτά, από τον οποίο οι νεκροί υπολογίζονται σε 5000 ανθρώπους. Στις 6 Φεβρουαρίου 2023 έγινε ένας σεισμός στην Τουρκία με μέγεθος 7,8 από τον οποίο οι νεκροί υπολογίζονται στους 46000 ανθρώπους. Πόσες φορές μεγαλύτερος είναι ο σεισμός της Χιλής από τον σεισμό της Τουρκίας;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

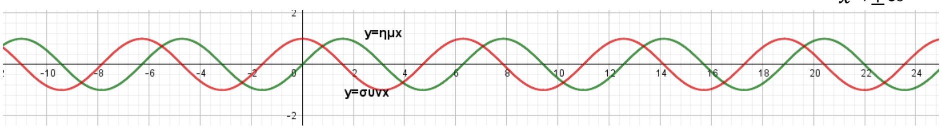
Το τέταρτο ερώτημα αποτελεί μία ανίσωση με άγνωστο την ένταση I. Η μέθοδος επίλυσης είναι αλγεβρική και βασίζεται στην έννοια της αντίστροφης συνάρτησης και αποτελεί το κεντρικό σημείο της επίλυσης. Προτείνεται επίσης η σύνδεση της αλγεβρικής επίλυσης στο ερώτημα δ) με την γραφική επίλυση, η οποία επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του ερωτήματος γ). Επιπλέον, η γενίκευση της παραπάνω μεθόδου σε συναρτήσεις γενικής μορφής είναι ένα σημείο που προτείνεται να τονιστεί στους μαθητές.

Τα δεδομένα των δύο σεισμών της ερώτηση δ) μπορεί να αποτελέσουν αφορμή για μια ευρύτερη συζήτηση με θέμα που οφείλονται οι τα αποτελέσματα ενός σεισμού.

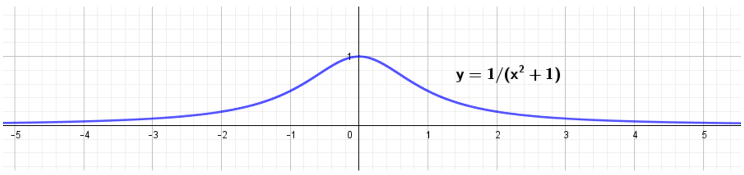
Έργο 10. (Γ Λυκείου προσανατολισμού, όριο συνάρτησης).

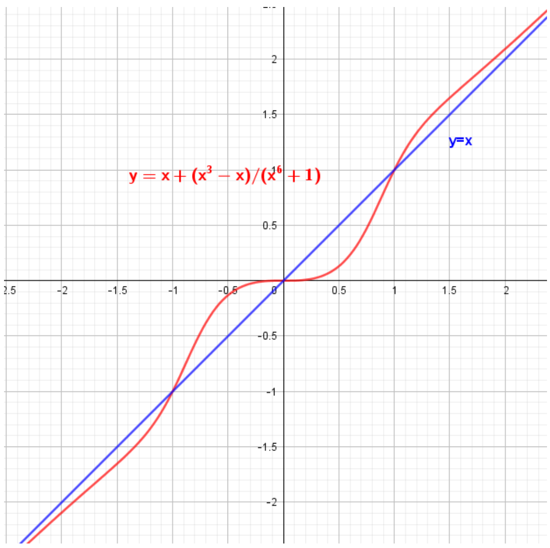
ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	Αναπαράσταση, δομή	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Γ Λυκείου /Όριο				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Ισοδυναμία, πρακτική συλλογισμού & επιχειρημα-τολογίας,	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	κατασκευή μέσω λογισμικού geogebra προσομείωσης
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές		***Συγκείμενο***	Μαθηματικό		

i) Με βάση τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων y = ημx και y = συνx να ελέγξετε, αν υπάρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ημx,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} συνx$



ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, g(x) = x + \frac{x^3-x}{x^6+1}$ και έπειτα να ελέγξετε, αν οι ασύμπτωτες έχουν κοινά σημεία με τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων.





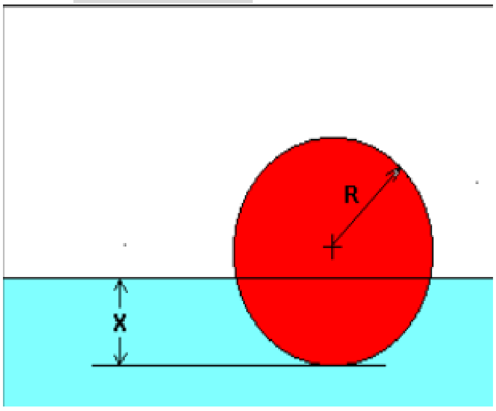
Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση.

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου και οι περισσότερες αποδείξεις των προτάσεων και των θεωρημάτων της Ανάλυσης είναι εκτός του πλαισίου των μαθηματικών του Λυκείου, για να αποτελέσει η διδασκαλία της μια πραγματική εισαγωγή στην περιοχή αυτή, πρέπει να συμβάλλει στην ανάπτυξη σωστών διαισθητικών αντιλήψεων από τους μαθητές για τις έννοιες, τις ιδιότητες τους και τα θεωρήματα της Ανάλυσης μέσα από την ουσιαστική χρήση οπτικών αναπαραστάσεων. Γι’ αυτό πρέπει να υπάρξει μια ισορροπία και σύνδεση των τυπικών λύσεων και των αντίστοιχων οπτικών αναπαραστάσεων με στόχο την κατανόηση των ιδιοτήτων της Ανάλυσης σε ένα πρώτο διαισθητικό επίπεδο. Αυτός πρέπει να είναι και ο στόχος της δραστηριότητας που θα αναπτυχθεί στην τάξη με βάση αυτό το έργο.

Έργο 11. (Γ Λυκείου Προσανατολισμού, Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	διαδικασίες εκτέλεσης, Οργάνωση, συστηματοποίηση	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Γ Λυκείου Προσανατολσμός/ Σύγκλιση, Διαφόριση				
Μεγάλες Ιδέες	Προσέγγιση – σύγκλιση				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων,	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία		

	Συλλογισμού & επιχειρημα-τολογίας		μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	κατασκευή προσομοίωσης μέσω λογισμικού geogebra
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές					



Μια σφαίρα ακτίνας R=0,055 μ. βρίσκεται βυθισμένη σε βάθος x το οποίο είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - 0{,}165x^2 + 3{,}993 \cdot 10^{-4} = 0$

α) Για να βρείτε μια προσέγγιση του x εφαρμόστε την μέθοδο της διχοτόμησης, θεωρώντας αρχικά τα σημεία 0, και 2R. Βρείτε την προσέγγιση μετά το δεύτερο και τρίτο βήμα και δείξτε ότι το σχετικό σφάλμα στην εκτίμηση στο τέλος του δεύτερου βήματος είναι 33,3% και του τρίτου 20% (υπολογίστε το $\varepsilon_4 = |\frac{x_4 - x_3}{x_4}|100$)

β) Εφαρμόστε την μέθοδο Newton-Raphson για $\mathrm{x}_0 = 0{,}05$. Βρείτε τη ρίζα μετά το δεύτερο και τρίτο βήμα και δείξτε ότι το σχετικό σφάλμα στην εκτίμηση στο τέλος του δεύτερου βήματος είναι 0,0716% και του τρίτου 0% ((υπολογίστε το $\varepsilon_4 = |\frac{x_4 - x_3}{x_4}|100$).

γ) Σχολιάστε τα αποτελέσματα του α) και του β).

δ) Θα μπορούσαμε στο β) παραπάνω να είχαμε πάρει $\mathrm{x}_0 = 0$ ή $\mathrm{x}_0 = 0{,}11$; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Οι μαθητές ελέγχουν και συγκρίνουν τα αποτελέσματα των δυο μεθόδων με σκοπό την καλύτερη κατανόηση. Έτσι αναδεικνύονται ορισμένα από τα χαρακτηριστικά κάθε μιας μεθόδου ενώ ταυτόχρονα τονίζεται η αναγκαιότητα χρήσης τέτοιων μεθόδων για τον υπολογισμό των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης που δεν μπορεί ή είναι δύσκολο να λυθεί με αλγεβρικές μεθόδους.

Έργο 12. (Γ Λυκείου Προσανατολισμού, Ολοκλήρωμα)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	υπόθεση, μοντελοποίηση, τεκμηρίωση	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Γ ΛΥΚΕΙΟΥ /ολοκλήρωμα				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Μοντελοποίηση Μεταγνωστική ενημερότητα	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού		
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές				***Προτεινόμενοι πόροι***	κατασκευή μέσω λογισμικού geogebra προσομείωσης
		Συγκείμενο	Ρεαλιστικό πρόβλημα		

Η σφαίρα ενός ψεύτικου πιστολιού, έχει το σχήμα του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή του επίπεδου χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στη $y=\ln(x)$, τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$ και τον οριζόντιο άξονα xx'. Η σφαίρα καρφώθηκε μέσα σε έναν παχύ τοίχο και σταμάτησε στο εσωτερικό του αφού διένυσε μια μικρή απόσταση δημιουργώντας μια κλειστή κυλινδρική οπή. Στην συνέχεια η σφαίρα αφαιρέθηκε αφήνοντας μια τρύπα (που περιλάμβανε την κυλινδρική οπή).

α) Σχεδιάστε το επίπεδο χωρίο που περιλαμβάνεται μεταξύ των γραμμών των $y=\ln(x)$, $x=1$ και $x=e$ και της xx'.

β) Υπολογίστε τον όγκο της τρύπας που έχει μείνει στον τοίχο μετά την αφαίρεση της σφαίρας

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση.

Ξεκινώντας με ένα μαθηματικοποιημένο πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις μεθόδους για τον υπολογισμό όγκου στερεού εκ περιστροφής προκειμένου να υπολογίσουν τα ζητούμενα στοιχεία. Η δραστηριότητα μπορεί να επεκταθεί με την εύρεση των υποθέσεων που οδήγησαν στη μαθηματικοποίηση του προβλήματος και να διερευνηθεί η δυνατότητα επίλυσης ενός αντίστοιχου προβλήματος με διαφορετικές υποθέσεις (διαφορετική μοντελοποίηση). Η χρήση των τύπων ολοκλήρωσης είναι απαραίτητη για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, αλλά δεν αποτελεί αυτοσκοπό.

4. Ενδεικτικό Παράδειγμα μαθησιακής εξέλιξης σε όλες τις βαθμίδες

Η έννοια της συνάρτησης ως μια από τις πιο κεντρικές των μαθηματικών, έχει παρουσία από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού έως και την τελευταία τάξη του Λυκείου. Αρχικά στο πρώτο στάδιο (προ-αλγεβρικό), το οποίο εκτείνεται στο Δημοτικό, οι μαθητές αποκτούν απαραίτητες δεξιότητες ώστε να μπορούν να εργαστούν με συναρτήσεις προκειμένου να λύσουν προβλήματα. Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν ακόμη μεταβλητές για να εκφράσουν συναρτησιακές σχέσεις αλλά σταδιακά έρχονται σε επαφή με την έννοια της μεταβλητής. Στο επόμενο στάδιο (προ-δομικό) οι μαθητές έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν μια αναπαράσταση συνάρτησης κάθε φορά χωρίς τη δυνατότητα συσχέτισης με άλλες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη μιας σχέσης μεταξύ των x και y όταν δίνονται σε μορφή πίνακα τιμές του x και οι αντίστοιχες τιμές του y, αλλά δεν μπορούν να εκφράσουν ακόμη την αλγεβρική σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές με μια συναρτησιακή σχέση. Στη συνέχεια οι μαθητές σταδιακά αρχίζουν να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων (μονο-δομικό επίπεδο) αλλά αυτές είναι κατά βάση απλές. Για παράδειγμα οι μαθητές μπορεί να είναι ικανοί να μεταφράζουν από μια πινακοποιημένη μορφή δεδομένων σε μια συμβολική αναπαράσταση αλλά να μην μπορούν να περιγράψουν λεκτικά τη συνάρτηση. Όταν οι μαθητές αρχίσουν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων (πινακοποιημένες, συμβολικές, λεκτικές αναπαραστάσεις) έχουν φτάσει στο επόμενο στάδιο (πολυ-δομικό επίπεδο). Εδώ, για παράδειγμα μπορούν να εξηγήσουν πώς η κλίσης μιας γραμμικής συνάρτησης σχετίζεται με σταθερή διαφορά των y για σταθερές μεταβολές των x. Καθώς οι μαθητές κατανοούν σε μεγαλύτερο βάθος την έννοια της συνάρτησης, μπορούν να συγκρίνουν και να αντιπαραβάλλουν πληροφορίες που δίνονται σε πολλαπλές αναπαραστάσεις και να επιλέγουν ποια αναπαράσταση είναι πιο χρήσιμη σε δεδομένο πλαίσιο (σχετικιστικό επίπεδο). Επίσης μπορούν να μετακινούνται με ευχέρεια μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων υιοθετώντας κάθε φορά διαφορετική οπτική και εργαλεία επίλυσης ενός προβλήματος (Chazan & Yerushalmy, 2003). Στο πιο υψηλό επίπεδο κατανόησης της έννοιας (αφηρημένο επίπεδο), οι μαθητές χρησιμοποιούν και εφαρμόζουν συναρτήσεις για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων ή τη δημιουργία νέων. Η γνωστική τροχιά της συνάρτησης περιέχει τα θέματα της συμμεταβολής και της αντιστοίχισης. Η έννοια της συμμεταβολής αναφέρεται στην αναγνώριση και ερμηνεία καταστάσεων οι οποίες μπορούν να περιγραφούν από την ταυτόχρονη μεταβολή δυο ποσοτήτων. Η έννοια της μεταβλητής ως μιας ποσότητας που μεταβάλλεται συνεχώς είναι απαραίτητη για την περιγραφή και επίλυση προβλημάτων που είναι οικεία στους μαθητές όπως προβλήματα κινηματικής ή μεταβολών μεγεθών όπως θερμοκρασία, βάρος κλπ. Η προσέγγιση των συναρτήσεων μέσω της συμμεταβολής, προϋποθέτει κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται οι δυο μεταβλητές. Αυτό σημαίνει κατανόηση του τρόπου που συντονίζεται η μεταβολή από το y_m στο y_{m+1} καθώς από το x_m μεταβαίνουμε στο x_{m+1}. Μέσω πινάκων αυτό σημαίνει τη συντονισμένη μεταβολή δυο ή περισσότερων στηλών. Μέσω γραφήματος, περιλαμβάνει την κατανόηση των αλλαγών στον κατακόρυφο άξονα καθώς η άλλη μεταβλητή κινείται οριζόντια. Η προσέγγιση της συμμεταβολής προετοιμάζει την μελέτη της Μαθηματικής Ανάλυσης και της μοντελοποίησης φυσικών φαινομένων. Οι μαθητές αρχικά στο Γυμνάσιο αναγνωρίζουν την εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ στη συνέχεια εντοπίζουν και εκφράζουν το είδος της μεταβολής (αύξηση ή μείωση) που μπορεί να επιφέρει στην εξαρτημένη μεταβλητή μια συγκεκριμένη αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η εύρεση αυτής της κατεύθυνσης της μεταβολής είναι η βάση της έννοιας της μονοτονίας που θα διδαχθεί στις πρώτες τάξεις του Λυκείου. Στο Γυμνάσιο οι μαθητές μπορούν να προσδιορίσουν σε συγκεκριμένες συναρτήσεις, τις τιμές της μιας μεταβλητής ώστε να ανταποκρίνεται σε συγκεκριμένες τιμές της άλλης (ανεξάρτητης ή εξαρτημένης). Η αναγνώριση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης αρχικά για σταθερές μεταβολές του x και στη συνέχεια για τυχαία μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής, είναι ο επόμενος σταθμός ανάπτυξης της έννοιας. Η εύρεση και ο υπολογισμός της μεταβολής του ρυθμού μεταβολής στην Γ Λυκείου είναι το τελικό σημείο διαπραγμάτευσης της έννοιας, όπου η μορφή της καμπύλης ως προς την κυρτότητα αναλύεται και προσδιορίζεται. Η οπτική της διμελούς σχέσης – αντιστοιχίας, αναπτύσσεται αρχικά στο Γυμνάσιο όπου η μεταβλητή αντιμετωπίζεται ως στοιχείο ενός συνόλου. Έτσι σταδιακά ο μαθητής εισάγεται στην έννοια της μονοσήμαντης αντιστοίχισης η οποία αποτελεί τη βάση του ορισμού της συνάρτησης. Οι μαθητές ορίζουν, υπολογίζουν, συγκρίνουν συναρτήσεις και συνθέτουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης (όπως η γραφική παράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα) σε μια ενιαία εικόνα της έννοιας. Η οπτική της αντιστοιχίας είναι φανερή και στον συμβολισμό: y=f(x) καθώς και σε μοντέλα ερμηνείας όπως αυτό της μηχανής (στο οποίο οι μεταβλητές αντιστοιχούν στα input–output) και υποβοηθά στην κατανόηση του γεγονότος ότι η αντιστοιχία μεταξύ δυο συνόλων αριθμών μπορεί να εκφραστεί μέσω γενικών αλγεβρικών «κανόνων». Από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου ένας στόχος είναι η αναπαράσταση της έννοιας της συνάρτησης ως σχέσης μεταξύ δυο ποσοτήτων που αλληλοεξαρτώνται. Χρησιμοποιούνται τέσσερις βασικές αναπαραστάσεις: λεκτική, γραφική, με χρήση πινάκων και συμβολική (χρήση αλγεβρικών τύπων). Στις τάξεις του Λυκείου εισάγεται ο τυπικός συμβολισμός με το y ή το f(x) καθώς και η αντιστοίχιση μεταξύ στοιχείων δυο συνόλων. Η κύρια εστίαση στο Γυμνάσιο είναι η γραμμική συνάρτηση και δευτερευόντως η $y = ax^2$. Αρχικά στο Γυμνάσιο δίνεται έμφαση στις γραφικές παραστάσεις των ευθειών y=αx+β, ενώ από την Α Λυκείου μελετώνται πιο συστηματικά τα χαρακτηριστικά και οι μετασχηματισμοί των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων. Οι μαθητές επιλύουν προβλήματα όπου χρησιμοποιούνται συναρτήσεις (στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο), μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις (κυρίως στο Λύκειο) και μελετούν γραφικές παραστάσεις (πιο περιορισμένα στο Γυμνάσιο και σε ευρύτερα είδη συναρτήσεων στο Λύκειο). Έτσι, διακρίνουν τις διαφορετικές όψεις της έννοιας και συνθέτουν διακριτές πλευρές της. Παράλληλα, στην κατεύθυνση της Β και της Γ, εμβαθύνουν σε νέες κατηγορίες συναρτήσεων (τριγωνομετρικές, πολυωνυμικές και εκθετικές-λογαριθμικές) και μελετούν ιδιότητες τους (μονοτονία, ακρότατα, πεδία ορισμού) τις οποίες είναι σε θέση να ορίσουν σε γενική μορφή. Έτσι η πορεία της συνάρτησης ως διαδικασίας φτάνει στο σημείο της υποστασιοποίησης και θεώρησης της ως ένα καινούργιο αντικείμενο πάνω στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν νέες διαδικασίες – ενέργειες όπως η σύνθεση, το όριο, η παραγώγιση και η ολοκλήρωση. Στη τελευταία τάξη του Λυκείου γίνεται η πλήρης συνειδητοποίηση της συμπληρωματικότητας της έννοιας της συμμεταβολής με αυτή της αντιστοιχίας. Οι δυο οπτικές της συνάρτησης μπορούν να λειτουργήσουν συμπληρωματικά. Για παράδειγμα ο ρυθμός μεταβολής είναι η έκφραση μιας σχέσης στην οποία οι αλλαγές στη μια μεταβλητή εκφράζονται συμβολικά ή αριθμητικά σε σχέση με τις αλλαγές στην άλλη μεταβλητή, όπου η συμμεταβολή γενικά δεν μπορεί να εκφράσει με ακρίβεια την αλλαγή αυτή. Στις περιπτώσεις όπου ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να υπολογιστεί αλγοριθμικά η συμμεταβολή δεν παίζει κάποιο ρόλο. Αντίστοιχα, ένας μαθητής μπορεί να εκφράσει μια κατάσταση ποιοτικά μέσω της συμμεταβολής δυο ποσοτήτων, χωρίς να μπορεί να την εκφράσει μέσω τύπων. Η χρήση παραδειγμάτων με μεταβολές από γραφήματα και πίνακες καθώς και από προβλήματα σε ρεαλιστικά πλαίσια, βοηθάει την υιοθέτηση και των δυο προσεγγίσεων ανάλογα με την περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (Wilmot et al., 2011)

Επίπεδο	Ο μαθητής μπορεί να	Ανταπόκριση του μαθητή
5. Αφηρημένο	δημιουργεί συνδέσεις όχι μόνο εντός του πεδίου αλλά και πέραν αυτού, γενικεύει και μεταφέρει τις βασικές ιδέες που περιγράφουν τη δεδομένη περίπτωση.	Προβλέπει, εξηγεί και συνθέτει την κατανόηση του σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Επιλύει μη-συνήθη προβλήματα με μη αλγοριθμικές μεθόδους
4. Σχετικιστικό	επιδεικνύει κατανόηση της σημαντικότητας των επιμέρους σε σχέση με το όλο.	Συγκρίνει /αντιπαραβάλλει πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις συναρτήσεων και επιδεικνύει κατανόηση περιεχομένου. Αναγνωρίζει ποιες αναπαραστάσεις να επιλέξει με βάση το πλαίσιο του προβλήματος. Επιλέγει αναπαραστάσεις και μεταβαίνει με ευχέρεια από την μια στην άλλη.
3. Πολυδομικό	Δημιουργεί συνδέσεις χωρίς να γίνεται αντιληπτή η σημασία τους.	Κάνει συνδέσεις μεταξύ περισσότερων από δυο αναπαραστάσεων και αναγνωρίζει τουλάχιστον δυο σχετικές ιδιότητες μιας συναρτησιακής σχέσης.
2. Μονοδομικό	Κάνει απλές και προφανείς συνδέσεις αλλά δεν γίνεται κατανοητή η σημασία τους.	Κάνει συνδέσεις μεταξύ δυο αναπαραστάσεων.
1. Προ-δομικό	Προσλαμβάνει τμήματα ασύνδετων πληροφοριών που δεν έχουν συνοχή ή νόημα.	Ερμηνεύει γραφήματα όπου με ανεξάρτητη μεταβλητή τον χρόνο. Κατανοεί μια συνάρτηση εκφρασμένη με μια αναπαράσταση.
0. Προ-αλγεβρικό	Αποκτάει αναγκαίες δεξιότητες.	Κατανοεί τη συναρτησιακή εξάρτηση όπου η μεταβολή μιας ποσότητας επηρεάζει μια άλλη ποσότητα.

Ενδεικτικό έργο μαθησιακής εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης (Γυμνάσιο και Λύκειο)

Η χρέωση δυο πακέτων Α και Β μιας εταιρίας κινητής τηλεφωνίας είναι ως εξής:

Στο πακέτο «Α» υπάρχει πάγιο 10 € ανά μήνα και η χρέωση είναι 0,20€ για κάθε λεπτό ομιλίας.

Στο πακέτο «Β» υπάρχει πάγιο 6€ ανά μήνα και η χρέωση είναι 0,50€ για κάθε λεπτό ομιλίας.

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις που δίνουν το ποσό που πρέπει να πληρώσουμε σε κάθε γραφείο για x λεπτά ομιλίας. (Β Γυμν.)

β) Για πόσα λεπτά ομιλίας το μήνα θα πληρώσει και στα δύο πακέτα το ίδιο ποσόν; (Β Γυμν.)

γ) Για πόσα λεπτά ομιλίας το μήνα συμφέρει να χρησιμοποιήσει κάποιος το πακέτο Α; (Γ Γυμν.)

δ) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων (αναφέρετε τις υποθέσεις που κάνατε) (Α Λυκ.)

ε) Μπορείτε να δημιουργήσετε ένα πακέτο που να έχει ίδιο πάγιο με το Α αλλά μέχρι 5 λεπτά ομιλίας να έχε μικρότερη χρέωση; Η συνάρτηση κόστους – χρόνου ομιλίας μπορεί να είναι γραμμική; (Β Λυκ.)

5. Βιβλιογραφία

Bezuidenhout, A. (2001). Metaphor and What Is Said: A Defense of a Direct Expression View of Metaphor. *Midwest Studies in Philosophy ,25*(1):156.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10(1),* 53 – 70.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1991*). A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In: Kilpatrick, J. Schifter, D. & Martin, G.(Eds) *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics* Publisher: NCTM.

Clement, L. (2001). What Do Students Really Know about Functions? *Mathematics Teacher*, *94(*9), p.745-48.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 167–192.

Drijvers, P. (Ed.). (2010). *Secondary Algebra Education*. Sense Publishers.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* Springer.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115–139.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235–261.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(4)*, 500–508.

Markovits, Z., Eylon, B, & Bruckheimer, M. (1986). Functions Today and Yesterday. *For the Learning of Mathematics 6*,2.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In M. Limon, & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233-258). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Metaxas, N. (2007). Difficulties on indefinite integral. *Proceedings of the 32nd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education v. 3*, p. 265-272. P.M.E –Korea. ISSN: 0771-100X.

Núñez, R.E., Edwards, L.D. & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 39,* 45–65.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Student Metaphors for Limit Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(4), 396-426.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology* (pp.25-58). Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America,Vol. 25.

Stewart, I., & Tall, D. (2015). *The foundations of mathematics*. Oxford University Press.

Tall, D. (1996). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. *L'Enseignement des Mathématiques*, *42*, 395– 415.

Tall, D. (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics. 12*. 10.1007/BF00305619.

Thompson, P. & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education* (pp.421-456) Chapter: 16. National Council of Teachers of Mathematics.

Voskoglou, M. & Kosyvas, G. (2012) Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. *Journal of Research in Mathematics Education, 1 (3)*, 301—336.

Wilmot, D., Schoenfeld, A., Wilson, M., Champney, D. & Zahner, W. (2011). Validating a Learning Progression in Mathematical Functions for College Readiness. *Mathematical Thinking and Learning, 13*. 259-291.

b) Γεωμετρία – Μέτρηση- Αναλυτική Γεωμετρία

1. Σημασία του πεδίου

Η μελέτη του πεδίου «Γεωμετρία & Μέτρηση» είναι σημαντική για τρεις βασικούς λόγους. Συμβάλλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης προσφέροντας δυνατότητες ερμηνείας και παρέμβασης στο φυσικό και δομημένο περιβάλλον. Αξιοποιείται ως εργαλείο για τη μελέτη άλλων θεμάτων στα μαθηματικά και την επιστήμη. Το πιο σημαντικό, ωστόσο, είναι ότι με τη μελέτη της γεωμετρίας αναπτύσσεται συστηματικά η μαθηματική συλλογιστική, με την οποία εξελίσσεται τόσο η λογική επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση η οποία είναι σημαντική για κάθε πολίτη όσο και η δημιουργική σκέψη σε πολλούς ερευνητικούς τομείς.

Η πρακτική και εκπαιδευτική αξία του πεδίου

Το πεδίο έχει μια γενική πρακτική και εκπαιδευτική αξία. Όλοι χρειάζονται γεωμετρικές γνώσεις προκειμένου να λειτουργήσουν ως πολίτες στην κοινωνία. Αυτές οι γνώσεις υποστηρίζουν τη χωρική αντίληψη του μαθητή και μελλοντικού πολίτη και χρησιμοποιούνται σε διαδικασίες όπως η ανάγνωση και λειτουργική χρήση σχεδίων, μοντέλων, διαγραμμάτων και χαρτών, παροχή οδηγιών, σχεδιασμού και κατασκευής αντικειμένων, οργάνωση και λειτουργική ταξινόμηση αντικειμένων στο χώρο, μετρήσεων, προσανατολισμού κ.α. Οι δεξιότητες αυτές είναι απαραίτητες ολοένα και περισσότερο για την αποτελεσματική λειτουργία ενός πολίτη στη σύγχρονη κοινωνία. Το συγκεκριμένο πεδίο μπορεί να καλύψει επίσης διαφοροποιημένες ανάγκες και ικανότητες των μαθητών οι οποίοι ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για την ανάπτυξη συλλογισμών με βάση τα σχήματα ή για καλλιτεχνικές δημιουργίες που βασίζονται σε γεωμετρικές ιδέες.

Η προπαρασκευαστική αξία του πεδίου

Ως προπαρασκευαστική αξία του πεδίου σε κάποιο επίπεδο/βαθμίδα θεωρούμε το απαραίτητο υπόβαθρο το οποίο οφείλει να έχει κάποιος μαθητής προκειμένου να είναι προετοιμασμένος για την παρακολούθηση σπουδών σε επόμενο επίπεδο. Με την έννοια αυτή η μελέτη του πεδίου στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μπορεί να καλλιεργήσει στους μαθητές το απαραίτητο διαισθητικό και εμπειρικό υπόβαθρο για την πιο τυπική και αφαιρετική προσέγγιση της Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επίσης, η δευτεροβάθμια εκπαίδευση οφείλει να καλλιεργήσει στους μαθητές γνώσεις και ικανότητες ανάπτυξης γεωμετρικού συλλογισμού τις οποίες μπορούν να αξιοποιήσουν τόσο στον επαγγελματικό και προσωπικό τους βίο όσο και στις μετέπειτα σπουδές τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Όμως η εκπαιδευτική αξία του πεδίου αναδεικνύεται και στις συνδέσεις του με άλλα γνωστικά πεδία τόσο των μαθηματικών όσο και άλλων επιστημών. Για παράδειγμα, είναι γνωστή η αξιοποίηση γεωμετρικών αναπαραστάσεων προκειμένου να βρεθεί κάποιος αλγεβρικός τύπος, η ανάπτυξη γεωμετρικών μοντέλων για την αναπαράσταση αριθμητικών πράξεων, η αξιοποίηση γεωμετρικών γνώσεων στη Φυσική κ.α.

Η συμβολή της Γεωμετρίας στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής και της απόδειξης

Είναι αναγνωρισμένη η συμβολή της Γεωμετρίας στην ανάπτυξη της ορθολογικής σκέψης μέσω της ικανότητας διάκρισης αιτιών και αποτελεσμάτων. Η ανάπτυξη της λογικής δομής των μαθηματικών στην οποία μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα με βάση κάποιες δεδομένες προτάσεις αναπτύχθηκε με βάση το γεωμετρικό μοντέλο από την εποχή του Ευκλείδη.

Η μαθηματική απόδειξη μιας πρότασης είναι αποτέλεσμα μιας ευρύτερης και πολύπλοκης διαδικασίας. Αυτή η διαδικασία μπορεί να παραμένει αδιαφανής για τους μαθητές που την διαβάζουν σε ένα βιβλίο. Η απόδειξη είναι μια διαδικασία στην οποία όχι μόνο η αφαιρετική συλλογιστική αλλά και η εξερεύνηση διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο (Pόlya, 1957). Η αποδεικτική διαδικασία είναι μία σύνθετη γνωστική δραστηριότητα η οποία δεν χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από τη λογική επιχειρηματολογία αλλά περιλαμβάνει πλούτο διερευνητικών, επαγωγικών και απαγωγικών διεργασιών. Η απόδειξη είναι μία σημαντική πτυχή της διδασκαλίας των μαθηματικών αλλά δεν αποτελεί αυτοσκοπό (Schoenfeld, 1994). Η ικανότητα διερεύνησης μιας προβληματικής κατάστασης, η ανταλλαγή επιχειρημάτων και η οργάνωσή τους σε μια λογική σειρά είναι επίσης σημαντικές ενέργειες για τη μάθηση των μαθητών.

Η αποδεικτική διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση γίνεται διερεύνηση της προβληματικής κατάστασης με στόχο την παραγωγή μιας εικασίας, στη συνέχεια μορφοποιείται μία εικασία σύμφωνα με τις συμβάσεις του περιεχομένου η οποία στην προσπάθεια τεκμηρίωσής της μπορεί να αναθεωρηθεί. Στο τέλος της πρώτης φάσης η εικασία ελέγχεται και διερευνώνται επιχειρήματα για την τεκμηρίωσή της. Η πρώτη φάση είναι μία «κρυφή» διαδικασία και δεν υπόκειται σε δημόσια επικοινωνία σε αντίθεση με τη δεύτερη φάση η οποία περιλαμβάνει την επιλογή και τον συνδυασμό συνεκτικών επιχειρημάτων σε μια αφαιρετική αλυσίδα, την οργάνωση αυτών των επιχειρημάτων σύμφωνα με τα μαθηματικά πρότυπα και την τελική διατύπωση της τυπικής απόδειξης (Boero, 1999).

Η ενίσχυση των ικανοτήτων των μαθητών να σκέφτονται λογικά και να επιχειρηματολογούν με συνέπεια θεωρείται σημαντικός στόχος της διδασκαλίας στο σχολείο. Η ανάπτυξη ικανοτήτων λογικής συλλογιστικής και επιχειρηματολογίας είναι σημαντικές για πολλούς και διαφορετικούς τομείς με ειδικό ρόλο στα μαθηματικά. Κατά συνέπεια, η συλλογιστική, η επιχειρηματολογία και η μαθηματική απόδειξη έχουν ενσωματωθεί στην τάξη των μαθηματικών σε όλα τα προγράμματα σπουδών μαθηματικών αλλά με διαφορετική εμφατικότητα και προσεγγίσεις. Ωστόσο, πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες με τη συνεπή συλλογιστική και επιχειρηματολογία, και ιδίως με τη μαθηματική απόδειξη (Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 1998; Reiss, Klieme, & Heinze, 2001).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω ερευνητικά αποτελέσματα, στο πρόγραμμα σπουδών προκρίνεται η διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας όπου δίνεται ιδιαίτερη έμφαση και στην πρώτη προπαρασκευαστική της φάση σε σχέση με την παραδοσιακή διδασκαλία που περιοριζόταν στη δεύτερη φάση της. Στόχος είναι η πρώτη φάση της αποδεικτικής διαδικασίας να αποτελέσει πεδίο διδακτικής διαπραγμάτευσης αναγνωρίζοντας τη σημαντικότητά της στη μάθηση των μαθηματικών. Είναι σημαντικό ότι η πρώτη φάση της αποδεικτικής διαδικασίας μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στην ενεργοποίηση, τη συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών και στην απόδοση νοήματος από τους ίδιους στην αποδεικτική διαδικασία.

Ενώ είναι σημαντικό για την ανάπτυξη της λογικής επιχειρηματολογίας και συλλογιστικής των μαθητών αυτοί να εμπλέκονται σε μαθησιακά περιβάλλοντα επίλυσης προβλήματος και διερευνήσεων εντούτοις έρευνες υποδηλώνουν ότι οι διαδικασίες αυτές δεν οδηγούν απαραίτητα τους μαθητές σε ανάπτυξη ιδεών για μαθηματική απόδειξη. Το μαθηματικό περιβάλλον δεν οφείλει μόνο να επιτρέπει εξερευνήσεις και υποθέσεις αλλά είναι σημαντικό να παρέχει συγκεκριμένη υποστήριξη σε σχέση με την αποδεικτική διαδικασία.

Το θεματικό πεδίο στο Λύκειο υποδιαιρείται σε : α) Γεωμετρία, β) Μετρήσεις και γ) Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Γεωμετρία

Στη Γεωμετρία η ανάπτυξη της γνώσης στο Λύκειο οργανώνεται με βάση απλές αρχές και προχωρά στη μελέτη και ανάλυση των συνεπειών τους. Επιπλέον οι γεωμετρικές έννοιες οργανώνονται στο πλαίσιο ενός συστήματος, μιας δομής όπου διερευνώνται χαρακτηριστικά και ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων από τους μαθητές συχνά συνδέεται με προσωπικά νοήματα και εμπειρικές προσεγγίσεις. Σε αντίθεση με τους αριθμούς που αναφέρονται μόνο έμμεσα σε κάποια μεγέθη και έτσι δεν συμπεριλαμβάνουν την ποσότητα στην οποία αναφέρονται, τα γεωμετρικά σχήματα συχνά παραμένουν για τους μαθητές χωρικά αντικείμενα και ως τέτοια έχουν χωρικές ιδιότητες όπως μορφή, θέση, μέγεθος και προσανατολισμό. Όμως στο πλαίσιο μιας τυπικής μαθηματικής θεώρησης τα γεωμετρικά σχήματα αποτελούν νοητικές κατασκευές που προσδιορίζονται με βάση τους ορισμούς και τις ιδιότητές τους. Αυτές οι δύο προσεγγίσεις συχνά φέρουν σε νοητική σύγκρουση τους μαθητές η οποία έχει ληφθεί υπόψη στην ανάπτυξη του προγράμματος σπουδών. Κάθε σχήμα έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και χωρικές ιδιότητες. Ο γεωμετρικός συλλογισμός χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στη χωρική και εννοιολογική πτυχή των γεωμετρικών εννοιών, εξετάζει αφενός αφηρημένες ιδέες (έννοιες) και αφετέρου, αναπαραστάσεις με συγκεκριμένες σχηματικές πληροφορίες και διαδικασίες. Οι λανθασμένες εκφάνσεις του συλλογισμού μπορούν να ερμηνευτούν ως δυσαρμονία μεταξύ της χωρικής και της εννοιολογικής λειτουργίας των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων (Fischbein, 1993).

Βασικός στόχος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο Λύκειο είναι οι μαθητές να κατοχυρώσουν την αντίληψη τους για τα γεωμετρικά σχήματα με βάση τις ιδιότητες τους και όχι με τον προσανατολισμό τους και τις πρωτοτυπικές μορφές τους. Στην προσπάθεια αυτή οι ιδιότητες των σχημάτων οργανώνονται σε λογικές δομές και αναπτύσσονται λογικοί συλλογισμοί και αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων.

Μέτρηση

Η Μέτρηση είναι ιδιαίτερα σημαντική για τα μαθηματικά και έχει σπουδαία παιδευτική αξία για τους μαθητές, επειδή συνδυάζει θεωρητικά ζητήματα με την εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων. Παρόλο που είναι γνωστό ότι η έννοια της μέτρησης στη Γεωμετρία συνδέεται με την Άλγεβρα και την Ανάλυση, στο πρόγραμμα σπουδών του Λυκείου μελετάται με στόχο την ανάδειξη των γεωμετρικών ιδιοτήτων των σχημάτων και των διαδικασιών μετασχηματισμού τους και δεν περιορίζεται σε υπολογιστικές ασκήσεις εφαρμογής των τύπων.

Οι μαθητές στο Λύκειο σε κάποιες περιπτώσεις αξιοποιούν άμεσες μετρήσεις γεωμετρικών μεγεθών χρησιμοποιώντας εργαλεία μέτρησης προκειμένου να κάνουν εικασίες για τους τρόπους υπολογισμού τους. Κυρίως όμως εμπλέκονται σε αποδεικτικές διαδικασίες για την επικύρωση τύπων υπολογισμού των γεωμετρικών μεγεθών και αξιοποίησης των τύπων αυτών στην επίλυση προβλημάτων. Θεωρούν το μέτρο ενός γεωμετρικού μεγέθους ως το λόγο του προς μία κατάλληλη μονάδα μέτρησης.

Οι μαθητές στην ανώτερη σχολική βαθμίδα αναγνωρίζουν ενιαία χαρακτηριστικά στην έννοια της μέτρησης όπως η καθιέρωση μονάδας μέτρησης. Διακρίνουν την ισότητα των γεωμετρικών σχημάτων από την ισότητα μεγεθών που αφορούν αυτά τα σχήματα. Για παράδειγμα μετασχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο σε ένα ισεμβαδικό ορθογώνιο. Αξιοποιούν αυτή τη διεργασία για την ανακάλυψη και απόδειξη τύπων για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων βασικών σχημάτων. Αξιοποιούν τους τύπους αυτούς για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

Αναλυτική Γεωμετρία

Στην Αναλυτική Γεωμετρία χρησιμοποιούνται αλγεβρικοί συμβολισμοί και μέθοδοι για την αναπαράσταση και την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Η σημασία της Αναλυτικής Γεωμετρίας στο πρόγραμμα σπουδών έγκειται στην θεώρηση συστήματος συντεταγμένων προκειμένου να προσδιοριστούν οι θέσεις των σημείων στο επίπεδο με διατεταγμένα ζεύγη και οι γραμμές με αλγεβρικές εξισώσεις. Αυτή η προσέγγιση δίνει τη δυνατότητα διαπραγμάτευσης γεωμετρικών προβλημάτων με αντίστοιχα προβλήματα στην Άλγεβρα και αντίστροφα αξιοποιώντας με τον τρόπο αυτό τις μεθόδους του κάθε πεδίου στην επίλυση προβλημάτων του άλλου. Επιπλέον έμφαση δίνεται στην αξιοποίηση της Αναλυτικής Γεωμετρίας για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων και την ερμηνεία φαινομένων του φυσικού κόσμου.

2. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και δυσκολίες των μαθητών

Γεωμετρία

Η μελέτη της Γεωμετρίας στο πρόγραμμα σπουδών αποφεύγει μια εξαντλητική τυπική αξιωματική θεμελίωση στο πρώιμο στάδιο εισαγωγής των μαθητών στο Λύκειο. Άλλωστε έρευνες (π.χ. van Hiele 1986) έχουν δείξει ότι οι μαθητές στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δυσκολεύονται ιδιαίτερα να κατανοήσουν το νόημα μιας τέτοιας θεμελίωσης. Σκοπός του προγράμματος είναι να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να διαπραγματευτούν γεωμετρικές έννοιες και προβλήματα με πραγματικό νόημα για τους ίδιους και έχοντας προχωρήσει σε περιεχόμενο και διαδικασίες να διαμορφωθεί το υπόβαθρο για την αναγκαιότητα της αξιωματικής θεμελίωσης.

Η Γεωμετρία στο Λύκειο αναπτύσσεται στις εξής θεματικές ενότητες: (α) Γεωμετρία του επιπέδου (β) τριγωνομετρία, (γ) μετασχηματισμοί και (δ) Γεωμετρία του Χώρου

Γεωμετρία του επιπέδου

Η θεματική ενότητα «Γεωμετρία του επιπέδου» αναφέρεται στη μελέτη (i) γραμμών και γωνιών, (ii) πολυγώνων και (iii) κύκλου.

Η μελέτη των γραμμών και γωνιών, των πολυγώνων και του κύκλου που συνιστούν την θεματική ενότητα της γεωμετρίας του επιπέδου αναπτύσσεται με βάση: (α) την αναγνώριση, (β) τις ιδιότητες, (γ) τη σχεδίαση και τις κατασκευές και (δ) τις σχέσεις τους. (van Hiele 1986; Clements, & Battista, 1992). Οι διεργασίες αυτές ειδικά για την διδακτική διαπραγμάτευση στο Λύκειο αποτελούν ένα ενιαίο πλέγμα νοητικής προσέγγισης των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η αναγνώριση των γεωμετρικών αντικειμένων στο Λύκειο επιδιώκεται να γίνεται αποκλειστικά με βάση τις ιδιότητες τους. Για παράδειγμα, ένα τετράπλευρο που μορφολογικά φαίνεται ορθογώνιο, αναγνωρίζεται ως τέτοιο, μόνο στην περίπτωση που είναι γνωστό ότι έχει εκείνες τις ιδιότητες που προσδιορίζουν ένα ορθογώνιο. Στο πλαίσιο αυτό οι μετρήσεις δεν θεωρούνται αποδεκτή μέθοδος τεκμηρίωσης των ιδιοτήτων των σχημάτων.

Οι μαθητές, ακόμα και στο Λύκειο, δυσκολεύονται να αποδεχθούν τις ιδιότητες των σχημάτων ως μοναδικό κριτήριο προσδιορισμού τους και καταφεύγουν σε εμπειρικές προσεγγίσεις, επηρεαζόμενοι σε σημαντικό βαθμό από τις μορφές πρωτοτυπικών σχημάτων και τον προσανατολισμό τους. Για το σκοπό αυτό είναι σημαντικό να αναπτύσσονται διδακτικές πρακτικές με τις οποίες θα αναδεικνύονται οι αδυναμίες των εμπειρικών προσεγγίσεων και οι δυνατότητες εγκυροποίησης των συμπερασμάτων που βασίζονται σε αποδεικτικές διαδικασίες.

Οι ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων είναι σε σημαντικό βαθμό γνωστές στους μαθητές από τις προηγούμενες τάξεις. Στο Λύκειο αποδεικνύονται οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τον ορισμό τους και επιπλέον διαμορφώνονται εκείνες οι ιδιότητες που προσδιορίζουν τα γεωμετρικά αντικείμενα και λειτουργούν ως κριτήρια συγκρότησης ευρύτερων κλάσεων. Έτσι, για παράδειγμα ορίζουμε ως παραλληλόγραμμο το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και αποδεικνύουμε ότι οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι κάθε τετράπλευρο στο οποίο και τα δύο ζεύγη των απέναντι γωνιών είναι ίσα είναι παραλληλόγραμμο. Μπορεί όμως να αποδειχθεί με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι η ισότητα μόνο του ενός ζεύγους των απέναντι γωνιών δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα ένα παραλληλόγραμμο. Στο ίδιο πλαίσιο μία ενδιαφέρουσα δραστηριότητα είναι να ζητείται η απόδειξη μίας ιδιότητας ενός γεωμετρικού σχήματος καθώς και η διατύπωση και ο έλεγχος της αντίστροφης της συγκεκριμένης πρότασης. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν ότι οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα και να ελέγξουν αν είναι ρόμβος το τετράπλευρο του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. Επίσης, μπορούν να ανακαλύψουν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου προκειμένου αυτό να είναι ρόμβος.

Οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων είναι το καθοριστικό κριτήριο για την ταξινόμηση τους. Η οργάνωση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους επιτρέπει στους μαθητές να θεωρούν τα σχήματα που ανήκουν σε μια κατηγορία ότι ανήκουν επίσης σε όλες τις υποκατηγορίες αυτής της κατηγορίας. Έτσι τα ειδικά παραλληλόγραμμα (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) έχουν όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και επιπλέον κάποια ή κάποιες επιπλέον ιδιότητες που τα προσδιορίζουν. Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων με βάση τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες μπορεί να συμβάλλει ουσιαστικά στη απόρριψη της μορφολογικής τους προσέγγισης και την ένταξή τους στο πλαίσιο μιας λογικής δομής. Με αφορμή την ταξινόμηση των παραλληλογράμμων αναπτύσσεται ένας σημαντικός ευρύτερος στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης που είναι η διαμόρφωση ενός πλαισίου παραγωγής λογικών επιχειρημάτων. Ο στόχος αυτός ξεπερνά την ενασχόληση με τα ίδια τα γεωμετρικά αντικείμενα συμβάλλοντας ουσιαστικά στη θεώρησή τους στο πλαίσιο λογικών δομών που αποτελεί σημαντική πτυχή ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης.

Ιδιαίτερη σημασία αποδίδεται από το πρόγραμμα σπουδών στο Λύκειο στη διαμόρφωση των ορισμών των γεωμετρικών εννοιών και σχημάτων. Εξηγούνται οι όροι που χρησιμοποιούνται στους ορισμούς, η αναγκαιότητα της ύπαρξης κάθε όρου καθώς και η σημασία τους στην ανάπτυξη της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, όταν ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα τετράπλευρο είναι τραπέζιο θα πρέπει να αποδειχθεί όχι μόνο ότι οι δύο του πλευρές είναι παράλληλες αλλά και ότι οι άλλες δύο τέμνονται. Οι μαθητές αναγνωρίζουν τον ορισμό μιας κλάσης σχημάτων (π.χ. παραλληλόγραμμα) ως πρόταση που καθορίζει μονοσήμαντα την κλάση αυτή και αποτελεί το σημείο αναφοράς για τη διαμόρφωση κριτηρίων για την ένταξη ενός σχήματος στη συγκεκριμένη κλάση. Οι ορισμοί ενσωματώνουν σημαντικά επιστημολογικά στοιχεία διαμόρφωσης της έννοιας τα οποία σε αρκετές περιπτώσεις δεν αναφέρονται ρητά και έχουν ξεχωριστή αξία για τα μαθηματικά. Για παράδειγμα, ενώ η ισότητα των γεωμετρικών σχημάτων αναφέρεται στη δυνατότητα ταύτισής τους μετά από κατάλληλους μετασχηματισμούς, συχνά αποδίδεται μέσω της ισότητας των στοιχείων που τα αποτελούν χωρίς να ελέγχεται η δυνατότητα ταύτισής τους.

Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν σχεδιάσει αρκετά γεωμετρικά αντικείμενα με δεδομένα χαρακτηριστικά αξιοποιώντας διάφορα όργανα σχεδίασης. Οι διαδικασίες που ακολουθούνται στις γεωμετρικές κατασκευές στην ανώτερη σχολική βαθμίδα είναι κυρίως νοητικές υπερβαίνοντας το χειραπτικό και εργαλειακό χαρακτήρα που έχουν στις προηγούμενες βαθμίδες και στοχεύουν στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού και την απόδειξη με την αξιοποίηση κατάλληλων εργαλείων.

Για τις ανάγκες της απόδειξης μιας γεωμετρικής πρότασης σχεδιάζεται ένα σχήμα που λειτουργεί ως οπτικό ερέθισμα για το μαθητή στο οποίο όμως ενσωματώνονται νοητικά όλες οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το συγκεκριμένο σχήμα. Στο πλαίσιο αυτό οι άμεσες μετρήσεις με γεωμετρικά όργανα δεν υιοθετούνται ως αποδεκτή μέθοδος τεκμηρίωσης των ιδιοτήτων των σχημάτων. Αξιοποιούνται θεωρήματα για να τεκμηριώσουν συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές. Σχεδιάζονται σχήματα σε προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας που «αντέχουν στο σύρσιμο», δηλαδή, σχήματα που διατηρούν τη δομή τους αν μετακινηθεί κάποια κορυφή τους. Σε ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον οι αλλαγές μέσω του «συρσίματος» δίνουν στους μαθητές την ευκαιρία για μια μορφή γεωμετρικού συλλογισμού που «οι ιδιότητες και οι σχέσεις ενός γεωμετρικού συστήματος ή σχήματος, είτε είναι μετρικές, είτε περιγραφικές, παραμένουν έγκυρες σε όλα τα διαδοχικά στάδια μετασχηματισμού κατά τη διάρκεια της κίνησης που διατηρεί τις ιδιότητες ορισμού αυτού του σχήματος ή συστήματος» (Sinclair & Yurita, 2005, σ. 5). Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει ο σχεδιασμός του σχήματος να γίνει με βάση τις γεωμετρικές του ιδιότητες και με όχι με βάση τη μορφή του. Τέτοιες κατασκευές προσδίδουν στο σχήμα δυναμικά χαρακτηριστικά δίνοντας τη δυνατότητα παρατήρησης μεταβλητών και αναλλοίωτων στοιχείων του.

Οι μαθητές στο Λύκειο αρχικά διαπραγματεύονται γεωμετρικές κατασκευές (με κανόνα και διαβήτη) οι οποίες μπορεί να είναι γνωστές από το Γυμνάσιο αλλά τεκμηριώνονται με βάση τις προτάσεις που διδάσκονται. Αρχικά εκπονούν απλές γεωμετρικές κατασκευές και στη συνέχεια πιο σύνθετες αιτιολογώντας το συλλογισμό τους. Για παράδειγμα, μπορούν βρουν διαφορετικές γεωμετρικές κατασκευές της διχοτόμου μιας γωνίας. Στη συνέχεια αξιοποιούν νέες προτάσεις για να πραγματοποιήσουν νέες συναφείς γεωμετρικές κατασκευές. Για παράδειγμα, μπορεί να αξιοποιηθεί ότι η εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή για να κατασκευαστεί γεωμετρικά η εφαπτομένη ενός κύκλου που διέρχεται από σημείο εκτός αυτού.

Η μελέτη προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών έρχεται να συμβάλλει στην ανάπτυξη δημιουργικής σκέψης των μαθητών μέσω της διαπραγμάτευσης πρωτόγνωρων προβλημάτων τα οποία δεν κατηγοριοποιούνται με ευκολία και συνεπώς η επίλυσή τους δεν ανάγεται στην εφαρμογή μιας γνωστής μεθοδολογίας.

Η διαπραγμάτευση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών στη Γ΄ Λυκείου αξιοποιεί τις γνώσεις που οι μαθητές έχουν διδαχθεί στις προηγούμενες τάξεις και εξελίσσεται με την Αναλυτική – Συνθετική μέθοδο η οποία περιλαμβάνει τα εξής βήματα: (α) Ανάλυση, (β) Σύνθεση, (γ) Απόδειξη και (γ) Διερεύνηση.

Το πρώτο βήμα της Ανάλυσης το εφαρμόζουμε όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο σχήμα έχει κατασκευαστεί και προσπαθούμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδιότητές του που ανάγουν τον προσδιορισμό του σε ήδη γνωστές γεωμετρικές κατασκευές. Στη Σύνθεση πραγματοποιούμε τις επιμέρους γεωμετρικές κατασκευές που ανακαλύψαμε στην Ανάλυση και κατασκευάζουμε το σχήμα. Με το βήμα της Απόδειξης επιβεβαιώνουμε ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε ικανοποιεί τα δεδομένα στοιχεία του προβλήματος. Τέλος στο βήμα της Διερεύνησης, διερευνούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα ώστε το πρόβλημα να έχει λύση καθώς και το πλήθος των λύσεων. Επιπλέον στη Διερεύνηση εξετάζεται και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος. Η Αναλυτική - Συνθετική μέθοδος χρησιμοποιείται τόσο σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών αλλά σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.

Οι γεωμετρικοί τόποι που θα διαπραγματευτούν οι μαθητές στη Γεωμετρία του Λυκείου είναι ευθείες ή τμήματα αυτών και κύκλοι ή τμήματά τους και προσδιορίζονται γεωμετρικά. Η παιδευτική αξία της διαπραγμάτευσης των γεωμετρικών τόπων είναι ιδιαίτερα σημαντική επειδή οι μαθητές προσδιορίζουν ένα σχήμα το οποίο δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων αλλά με βάση τις ιδιότητές του και στη συνέχεια αποδεικνύουν τον ισχυρισμό τους.

Μέσω της μελέτης των γεωμετρικών τόπων δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν σε διερευνητικές διαδικασίες, να κάνουν εικασίες τις οποίες να ελέγξουν, να αναπτύξουν συλλογισμούς για την απόδειξη τους, να αναζητήσουν περιορισμούς με βάση τα δεδομένα του προβλήματος και να ελέγξουν την ύπαρξη διαφορετικών λύσεων. Επίσης, μέσω της διερεύνησης των γεωμετρικών τόπων εμπλέκονται σε διαδικασίες όπου το γεωμετρικό σχήμα γίνεται δυναμικό, μεταβάλλεται και προσδιορίζονται οι γραμμές στις οποίες διαγράφουν τα κινούμενα μέρη του.

Οι μαθητές δεν έχουν πρότερες γνώσεις με την έννοια του γεωμετρικού τόπου όμως έχουν αρκετές γνώσεις σε σχέση με τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων τις οποίες οφείλουν να αξιοποιήσουν για τον προσδιορισμό γεωμετρικών τόπων. Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών τόπων ειδικά στο μάθημα προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στην αξιοποίηση γεωμετρικών γνώσεων από τις προηγούμενες τάξεις του Λυκείου με μια ενιαία μέθοδο σε μία νοητική διαδικασία υψηλού επιπέδου.

Βασική δυσκολία των μαθητών στα προβλήματα των γεωμετρικών τόπων είναι ο προσδιορισμός τους. Ο εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να γνωρίζει τη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στην αναγνώριση ενός σχήματος μόνο από κάποια χαρακτηριστική του ιδιότητα. Ενδεχομένως οι μαθητές να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα απόδειξης ότι κάθε σημείο της γραμμής που βρήκαν έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου. Συχνά οι μαθητές αποφεύγουν να ελέγξουν αν όλα τα σημεία μιας γραμμής που έχουν προσδιορίσει ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

Με βάση τις γνωστές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους γεωμετρικούς τόπους πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή τόσο στη δυσκολία των θεμάτων που θα κληθούν οι μαθητές να διαπραγματευτούν όσο και στη διαδικασία μετάβασης από πιο απλά σε πιο σύνθετα θέματα. Σε κάθε περίπτωση είναι εκτός των απαιτήσεων του προγράμματος εξεζητημένα προβλήματα γεωμετρικών τόπων που παλαιότερα χρόνια διδάσκονταν για την προετοιμασία υποψηφίων στις πολυτεχνικές και σχολές θετικών επιστημών.

Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές αρχικά προσδιορίζουν γνωστά γεωμετρικά αντικείμενα όπως η μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος και η διχοτόμος γωνίας ως γεωμετρικούς τόπους. Στη συνέχεια αξιοποιούν τις γνώσεις τους για τους γεωμετρικούς τόπους και σε συναφείς περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αξιοποιώντας τις ιδιότητες της διχοτόμου βρίσκουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες. Στη Α' Λυκείου οι μαθητές μπορούν να βρουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που απέχουν δεδομένη απόσταση από μία ευθεία και στη Β΄ Λυκείου να βρουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που σχηματίζουν με δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα τρίγωνο με γνωστό εμβαδόν. Για την εύρεση των γεωμετρικών τόπων ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Αρχικά θεωρούμε ένα σημείο του επιπέδου το οποίο έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και αποδεικνύουμε ότι το σημείο αυτό ανήκει σε μία συγκεκριμένη γραμμή C την οποία προσδιορίζουμε γεωμετρικά. Στη συνέχεια εξετάζουμε ποια από τα σημεία της γραμμής C ικανοποιούν την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου και συμπεραίνουμε ότι τα σημεία αυτά αποτελούν το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο.

Για την ανακάλυψη ενός γεωμετρικού τόπου οι μαθητές μπορούν να αξιοποιούν και λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας με τα οποία δίνεται η δυνατότητα σχεδιασμού ενός σχήματος με βάση τις ιδιότητές του και ταυτόχρονα έχουν τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του σχήματος και αποτύπωσης του ίχνους κινούμενων μερών του.

Στη Γ΄ Λυκείου βασικοί γεωμετρικοί τόποι που έχουν διδαχθεί στις προηγούμενες τάξεις θεωρούνται γνωστοί και μελετώνται πιο σύνθετοι, εφαρμόζοντας πιο τυπικές προσεγγίσεις. Οι μαθητές ανακαλύπτουν και αποδεικνύουν γεωμετρικούς τόπους αξιοποιώντας τόσο τις γνωστές γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων όσο και τις γνώσεις τους από την Αναλυτική Γεωμετρία χωρίς να αυξάνεται σημαντικά ο βαθμός δυσκολίας. Επιπλέον αξιοποιούνται γνωστοί γεωμετρικοί τόποι στις γεωμετρικές κατασκευές.

Στη Γεωμετρία του επιπέδου διακρίνουμε τις εξής βασικές σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων: (α) σχέση ισότητας, (β) ανισοτικές σχέσεις και (γ) σχέση ομοιότητας.

Δύο γεωμετρικά αντικείμενα θεωρούνται ίσα όταν εφαρμόζεται το ένα επί του άλλου. Στην περίπτωση αυτή τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται και έτσι η ισότητα τους ανάγεται στην ισότητα των αντίστοιχων στοιχείων τους. Ειδικά για τα πολύγωνα η ισότητά τους ανάγεται στην ισότητα των πλευρών και των αντίστοιχων γωνιών. Έτσι προκύπτει και η αναγκαιότητα διαμόρφωσης κριτηρίων ισότητας των γεωμετρικών αντικειμένων δηλαδή των ελάχιστων ίσων στοιχείων που πρέπει να έχουν δύο σχήματα ώστε να είναι ίσα.

Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στη διάκριση ανάμεσα στα σχήματα όπου η ισότητα των μέτρων τους συνεπάγεται την ισότητα των ίδιων των σχημάτων όπως το ευθύγραμμο τμήμα και η γωνία σε σχέση με σχήματα όπως τα πολύγωνα όπου η ισότητα των εμβαδών τους δεν συνεπάγεται την ισότητα των αντίστοιχων σχημάτων.

Στην προσπάθεια σύγκρισης δύο γεωμετρικών αντικειμένων ιδιαίτερα στο Λύκειο προκρίνονται οι γεωμετρικές ιδιότητες και μέθοδοι από τις διαδικασίες μέτρησης.

Με την έννοια αυτή η σύγκριση των βασικών γεωμετρικών αντικειμένων (ευθυγράμμων τμημάτων, γωνιών, τόξων) δεν προϋποθέτει τη μέτρηση. Η σύγκριση δεν επεκτείνεται σε άλλα γεωμετρικά αντικείμενα πέρα από τα βασικά μέσω της σύγκρισης των μέτρων τους. Δηλαδή, για δύο τρίγωνα που δεν είναι ίσα δεν έχει νόημα η αναζήτηση μιας συγκεκριμένης σχέσης διάταξης μεταξύ τους.

Η ομοιότητα με τη γενική έννοια αποτελεί ένα χαρακτηριστικό του αντιληπτικού μας συστήματος μέσω του οποίου ταξινομούμε τα φαινόμενα (Lakoff & Johnson 1980). Η ομοιότητα είναι ένας όρος ο οποίος έχει και καθημερινή χρήση η οποία έχει διαφορές με τη μαθηματική του σημασία και για το λόγο αυτό μπορεί να προκαλέσει παρανοήσεις στους μαθητές. Έτσι ενώ με την κοινή χρήση του όρου δύο αντικείμενα χαρακτηρίζονται όμοια όταν «έχουν την ίδια μορφή» στα μαθηματικά δύο αντικείμενα είναι όμοια όταν μπορούν να ταυτιστούν μετά από σμίκρυνση ή μεγέθυνση, ή με όρους μετασχηματισμών όταν μπορούν να γίνουν ομοιόθετα μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών.

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν μελετήσει τόσο την έννοια της ομοιότητας όσο και την έννοια της ομοιοθεσίας. Στο λύκειο περιορίζονται στην αξιοποίηση της ομοιότητας πολυγώνων για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων μετρικών σχέσεων.

Τριγωνομετρία

Η θεματική ενότητα «τριγωνομετρία» αποτελεί ένα μικρό μέρος της Γεωμετρίας στο Λύκειο επειδή ο συγκεκριμένος κλάδος έχει μελετηθεί στο Γυμνάσιο αλλά και στην Άλγεβρα του Λυκείου. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα ασχοληθούν με τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων που βοηθούν στο πρόβλημα της επίλυσης τριγώνου τους οποίους εφαρμόζουν σε προβλήματα μαθηματικών και Φυσικής.

Μετασχηματισμοί

Η θεματική ενότητα «μετασχηματισμοί» αναφέρεται στη μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο επίπεδο μέσω κατάλληλου συστήματος εξισώσεων. Οι μαθητές έχουν διδαχθεί τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στο Γυμνάσιο. Στη Γ' Λυκείου οι μετασχηματισμοί διδάσκονται στο πλαίσιο της Γεωμετρίας. Ορίζεται ο πίνακας του μετασχηματισμού και συνδέονται οι πράξεις των πινάκων με τις αντίστοιχες ιδιότητες των μετασχηματισμών. Μελετώνται οι ιδιότητες των σχημάτων που διατηρούνται μετά από συγκεκριμένους μετασχηματισμούς. Οι μαθητές πραγματεύονται έργα αναγνώρισης ιδιοτήτων συγκεκριμένων μετασχηματισμών καθώς και έργα εύρεσης εξισώσεων γεωμετρικού σχήματος το οποίο έχει προκύψει από το μετασχηματισμό άλλου σχήματος.

Γεωμετρία του χώρου

Η θεματική ενότητα «γεωμετρία του χώρου» αναφέρεται στη μελέτη επιπέδων, ευθειών και δίεδρων γωνιών στο χώρο και μελετάται στην Α΄ Λυκείου. Στο πρόγραμμα σπουδών αξιοποιούνται οι γνώσεις των μαθητών για τα γεωμετρικά σχήματα στο χώρο τα οποία έχουν μελετηθεί στις προηγούμενες τάξεις και η έμφαση δίνεται σε προσεγγίσεις που μπορούν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης των μαθητών και στην αντίστοιχη νοηματοδότηση των προβλημάτων. Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να συμβάλλει και η μελέτη του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου των στερών σωμάτων η οποία αναπτύσσεται στις Μετρήσεις.

Μετρήσεις

Οι Μετρήσεις αναπτύσσονται στις εξής θεματικές ενότητες: (α) μήκος, (β) μέτρο γωνίας , (γ) εμβαδόν και (δ) όγκος.

Οι μαθητές στο Λύκειο ενθαρρύνονται να αποδεσμευθούν από προηγούμενα χαρακτηριστικά ανάπτυξης της γεωμετρικής τους σκέψης όπως ο προσανατολισμός. Έτσι στην περίπτωση των μετρήσεων μπορούν να εφαρμόζουν για παράδειγμα τους τύπους των εμβαδών του τριγώνου και του παραλληλογράμμου χωρίς να αναφέρονται σε «βάσεις» αλλά σε πλευρές και σε αντίστοιχα ύψη. Στο Λύκειο είναι σημαντικό οι μαθητές να αναγνωρίσουν τον προσεγγιστικό και υποκειμενικό χαρακτήρα της μέτρησης. Αξιοποιούν τη μέτρηση κυρίως για τη διατύπωση εικασιών οι οποίες οφείλουν να εγκυροποιηθούν με αποδεικτικές διαδικασίες. Σε κάποιες περιπτώσεις δυσκολεύονται να διακρίνουν γεωμετρικά μεγέθη όπως τα ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες που η ισότητα των μέτρων τους είναι ισοδύναμη με την ισότητα των αντίστοιχων μεγεθών από άλλα γεωμετρικά μεγέθη όπως τα τόξα όπου η ισότητα των μέτρων τους δεν εξασφαλίζει την ισότητα των αντίστοιχων τόξων ή τα πολυγωνικά χωρία όπου η ισότητα των εμβαδών τους δεν συνεπάγεται την ισότητα των αντίστοιχων χωρίων. Ειδικά για τη μέτρηση χαρακτηριστικών στερεών σχημάτων οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν αναλογικά ιδιότητες σε επίπεδα σχήματα και αντίστροφα.

Ως προς τη μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου οι μαθητές ακόμη και στην ανώτερη σχολική βαθμίδα επηρεάζονται σημαντικά από τον προσανατολισμό του σχήματος. Έτσι δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου ή παραλληλογράμμου σε περιπτώσεις που οι πλευρές δεν έχουν οριζόντιο προσανατολισμό και τα ύψη δεν έχουν κατακόρυφο προσανατολισμό. Επίσης δυσκολεύονται να δουν ως ισεμβαδικά όλα τα τρίγωνα με την ίδια βάση και ίσα ύψη ιδιαίτερα όταν τα ύψη είναι εκτός των τριγώνων. Επίσης οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να συνδέσουν το λόγο των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων και το λόγο των όγκων δύο όμοιων στερεών όταν είναι γνωστός ο λόγος ομοιότητάς τους. Η πρώτη θεματική ενότητα, «μήκος» αναφέρεται στο μήκος ευθυγράμμου τμήματος το οποίο ορίζεται ως ο λόγος του τμήματος προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο θεωρείται ως μονάδα μέτρησης. Αντίστοιχα ορίζονται και τα υπόλοιπα μέτρα γεωμετρικών μεγεθών (μέτρο γωνίας, εμβαδόν επιφάνειας, όγκος στερεού). Η μέτρηση μήκους στην ανώτερη σχολική βαθμίδα περιορίζεται στη μέτρηση του μήκους κύκλου και τόξου (Β΄ Λυκείου). Το μήκος κύκλου υπολογίζεται από την προσέγγιση του κύκλου με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε αυτόν πολύγωνα. Η μέτρηση τόξου υπολογίζεται αναλογικά από το μήκος κύκλου διαμορφώντας έτσι τους σχετικούς τύπους.

Η δεύτερη θεματική ενότητα «μέτρο γωνίας» αναφέρεται στη μέτρηση γωνίας με διαφορετικές μονάδες μέτρησης, η οποία έχει μελετηθεί σε προηγούμενες τάξεις.

Η τρίτη θεματική ενότητα «εμβαδόν» αναφέρεται στον υπολογισμό εμβαδού επίπεδων χωρίων.

Βασικός στόχος της διδασκαλίας της μέτρησης της επιφάνειας είναι οι αποδείξεις των τύπων που δίνουν τα εμβαδά των βασικών σχημάτων (ορθογώνιο, ορθογώνιο τρίγωνο, τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο) οι οποίοι είναι γνωστοί από προηγούμενες βαθμίδες. Σημαντικό στόχο της διδασκαλίας αποτελεί και η εφαρμογή των τύπων εμβαδού βασικών σχημάτων για την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων. Τα εμβαδά σχημάτων μπορούν να αξιοποιηθούν και στην απόδειξη μετρικών σχέσεων που αναφέρονται σε γινόμενα ή λόγους τμημάτων.

Στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές αποδεικνύουν τύπους υπολογισμού των βασικών επίπεδων πολυγωνικών χωρίων μέσω αναδιατάξεων σχημάτων γνωστού εμβαδού ξεκινώντας από το εμβαδόν τετραγώνου γνωστής πλευράς. Αξιοποιούν τις γνώσεις αυτές για τον προσδιορισμό του εμβαδού της επιφάνειας πρισμάτων. Προσεγγίζουν το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με το εμβαδόν εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων στον κύκλο πολυγώνων και αναλογικά υπολογίζουν και το εμβαδόν κυκλικού τομέα.

Η τέταρτη θεματική ενότητα «όγκος» αναφέρεται στον υπολογισμό του όγκου πρισμάτων, πυραμίδων και στερεών από περιστροφή. Στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές εξηγούν τη διαδικασία διαμερισμού και ανασύνθεσης ορθού πρίσματος και πυραμίδας για την εύρεση του τύπου του όγκου τους.

Σε κάθε περίπτωση οι τύποι υπολογισμού εμβαδών και όγκων βασικών σχημάτων χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων σύνθετων σχημάτων.

Αναλυτική Γεωμετρία

Η Αναλυτική Γεωμετρία αναπτύσσεται στις εξής θεματικές ενότητες: (α) διανύσματα,

(β) ευθεία, (γ) κωνικές τομές.

Διανύσματα

Η έννοια του διανύσματος αναπτύχθηκε από την αλληλεπίδραση των μαθηματικών και της Φυσικής. Στο πλαίσιο της Φυσικής ο διανυσματικός λογισμός αξιοποιείται στη μελέτη διανυσματικών μεγεθών όπως η ταχύτητα, η δύναμη κ.λπ. Όμως η μελέτη διανυσματικών λογισμού αναπτύχθηκε και αυτόνομα στα μαθηματικά συμβάλλοντας στην εξέλιξη ολόκληρων μαθηματικών κλάδων όπως η Γραμμική Άλγεβρα με ευρύτερες εφαρμογές. Έτσι η μελέτη των διανυσματικού λογισμού στα Μαθηματικά προσανατολισμού στη Β΄ λυκείου έχει να εκπληρώσει ένα διπλό στόχο. Από τη μία προσφέρει θεωρητική θεμελίωση και υποστήριξη των γνώσεων των μαθητών στη μελέτη των φυσικών μεγεθών και από την άλλη εμπλέκοντας τους μαθητές με τις ιδιότητες και ιδιαιτερότητες του διανυσματικού λογισμού τους τροφοδοτεί με νέα θεωρητικά εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων. Σημειώνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους από το πεδίο των μαθηματικών στο πεδίο της Φυσικής και αντίστροφα και για το λόγο αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία η συσχέτιση των δύο πεδίων κατά τη διδασκαλία. Οι δυσκολίες μετάβασης από το ένα πεδίο στο άλλο εδράζονται σε επιστημολογικά ζητήματα των δύο πεδίων τα οποία θα πρέπει να επισημανθούν. Στη φυσική το διάνυσμα της δύναμης έχει κάποιο σημείο εφαρμογής ενώ στα μαθηματικά το διάνυσμα μελετάται με την έννοια του ελεύθερου διανύσματος, δηλαδή χωρίς να καθορίζεται η αρχή του. Η θεώρηση του διανύσματος με καθορισμένη αρχή δυσκολεύει τους μαθητές στην ευέλικτη θεώρηση των διανυσμάτων και από την άλλη η εκδοχή του ελεύθερου διανύσματος παρασύρει τους μαθητές να το συνδέουν με μία συγκεκριμένη θέση. Έτσι για παράδειγμα οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να μεταφέρουν ένα διάνυσμα σε κατάλληλη θέση ή θεωρούν ότι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων συνδέονται με τη θέση που αυτά σχεδιάζονται στο σύστημα συντεταγμένων. Οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται και με τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης ενός διανύσματος. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρικά) και μέσω των συντεταγμένων του (αλγεβρικά).

Μια βασική δυσκολία των μαθητών σε σχέση με τα διανύσματα οφείλεται στο ότι αυτά καθορίζονται από τη διεύθυνση, τη φορά και το μέτρο τους. Συχνά δυσκολεύονται να διακρίνουν το μέτρο ενός διανύσματος από το ίδιο το διάνυσμα και την αλγεβρική τιμή του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι δυσκολίες των μαθητών στη διάκριση της μετατόπισης ενός κινητού από την αλγεβρική τιμή της, το μέτρο της και την απόσταση που διανύει το κινητό. Σε αρκετές περιπτώσεις οι συμβολισμοί δεν είναι πλήρως διευκρινισμένοι και χρησιμοποιούνται χωρίς ιδιαίτερη προσοχή.

Έτσι συχνά οι μαθητές αντιμετωπίζουν το διάνυσμα ως αριθμητική οντότητα σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο με μια ιδιόμορφη λειτουργία συμβόλων και πράξεων (Δημητριάδου & Τζανάκης, 2003). Για παράδειγμα, προσθέτουν τα μέτρα δύο διανυσμάτων με την ίδια διεύθυνση για να βρουν το μέτρο του αθροίσματος τους, χωρίς να ελέγχουν αν αυτά είναι ομόρροπα. Επίσης, συχνά θεωρούν ότι το άθροισμα δύο διανυσμάτων έχει μέτρο μεγαλύτερο από τα μέτρα των διανυσμάτων που προστίθενται.

Ο διανυσματικός λογισμός μπορεί να αξιοποιηθεί ως δομημένο μαθηματικό πλαίσιο όπου συζητούνται κοινά και μη κοινά στοιχεία μεταξύ των ιδιοτήτων των διανυσμάτων και των ιδιοτήτων των αριθμών. Δίνεται λοιπόν η ευκαιρία στους μαθητές να μελετήσουν μαθηματικές δομές που δεν ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες ενός αριθμητικού συστήματος. Στο πλαίσιο αυτό είναι σημαντικό να συζητηθούν οι λόγοι για τους οποίους δεν ισχύουν σχέσεις όπως (α) η προσεταιριστική ιδιότητα στο εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$, (β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, (γ) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$.

Επιπλέον η μελέτη του διανυσματικού λογισμού είναι σημαντική επειδή αξιοποιείται τόσο στη θεμελίωση εννοιών όσο και στην επίλυση προβλημάτων που θα συναντήσουν οι μαθητές στη συνέχεια των σπουδών τους στην Αναλυτική Γεωμετρία και στα Μαθηματικά γενικότερα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δυνατότητα επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων με την αξιοποίηση του διανυσματικού λογισμού.

Ευθεία

Οι μαθητές έχουν μελετήσει την εξίσωση ευθείας σε αρκετές από τις προηγούμενες τάξεις. Στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας στη Β΄ Λυκείου μελετούν τη γενική της μορφή και τις ειδικές της περιπτώσεις. Συχνά οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα με τα χαρακτηριστικά της ευθείας που είναι παράλληλη στους άξονες και τη διαχείρισή της στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης οι μαθητές πραγματεύονται παραμετρικές γραμμικές εξισώσεις εξετάζοντας τις περιπτώσεις που αυτές είναι εξίσωση ευθείας. Με τον τρόπο αυτό δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να μελετήσουν «οικογένειες» ευθειών με κοινά χαρακτηριστικά μέσα από την παραμετρική τους εξίσωση, προσδίδοντας έναν δυναμικό χαρακτήρα στην προσέγγιση της ευθείας, η οποία μπορεί να αναδειχθεί ιδιαίτερα αξιοποιώντας προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας.

Στην ενότητα αυτή επιπλέον οι μαθητές προσδιορίζουν εξισώσεις ευθειών με δεδομένα χαρακτηριστικά, μελετούν τις σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο με τη μέθοδο των οριζουσών, βρίσκουν τη γωνία δύο ευθειών, εξετάζουν αν τρία σημεία είναι συνευθειακά και προσδιορίζουν γεωμετρικούς τόπους σημείων που είναι ευθείες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν προβλήματα που για την επίλυσή τους απαιτείται να θεωρηθεί κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.

Κωνικές τομές

Η μελέτη του κύκλου γίνεται στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄Λυκείου και των άλλων κωνικών τομών γίνεται Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου.

Ο κύκλος ορίζεται ως γεωμετρικό τόπος και αποδεικνύεται η εξίσωση του στη γενική της μορφή. Επίσης, αποδεικνύεται η εξίσωση εφαπτομένης κύκλου του οποίου το κέντρο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

Η μελέτη των υπόλοιπων κωνικών τομών μπορεί να ξεκινήσει με την παρατήρηση των τομών ενός κώνου από ένα επίπεδο σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν μία πρώτη εικόνα για τις κωνικές τομές και την αιτιολόγηση του αντίστοιχου ονόματός τους. Στη συνέχεια οι κωνικές τομές ορίζονται ως γεωμετρικοί τόποι σημείων του επιπέδου και περιορίζονται στις περιπτώσεις που έχουν άξονες συμμετρίας τους άξονες x΄x και y΄y και κέντρο ή κορυφή την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στη σχετική θέση της ευθείας με τις κωνικές τομές που η διαπραγμάτευσή της βασίζεται στην επίλυση του συστήματος της εξίσωσης της κωνικής τομής και της εξίσωσης της ευθείας. Σύμφωνα με το πρόγραμμα η εφαπτομένη κάθε κωνικής τομής θα βρεθεί μέσω του διαφορικού λογισμού. Είναι ωφέλιμο όμως να συζητηθεί ότι μία ευθεία που έχει μοναδικό κοινό σημείο με μία παραβολή δεν εξασφαλίζει ότι η ευθεία είναι εφαπτόμενη της παραβολής. Οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν και να αποδείξουν ιδιότητες των κωνικών τομών και να βρουν γεωμετρικούς τόπους σημείων που είναι κωνικές τομές.

Ιδιαίτερη έμφαση αξίζει να δοθεί στην εφαρμογή των κωνικών τομών στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων μέσω της ανακλαστικής τους ιδιότητας αλλά και την ερμηνεία φυσικών φαινομένων όπως οι τροχιές των πλανητών.

3. Ενδεικτικά έργα

Έργο 1 (Α΄ Λυκειου, Γεωμετρία του επιπέδου)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (διατύπωση εικασίας, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Διερευνητική μάθηση</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Α΄ Λυκείου/Γεωμετρία του επιπέδου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Απόδειξη</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Συλλογισμού και επιχειρηματολογίας</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2">Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Σε συνεργασία με έναν συμμαθητή σου να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε μία πρόταση για το είδος του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ και να την αποδείξετε.

β) Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΚΛΜΝ με κορυφές Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του ΑΒΓΔ και να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ αποδεικνύοντας τους ισχυρισμούς σας. Αντίστοιχα αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος ή τετράγωνο ποιο είναι το είδος του ΚΛΜΝ;

γ) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

i) Αν το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος και οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

ii) Αν το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο και οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Να εξετάσετε την ορθότητα των προηγούμενων ισχυρισμών αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Διδακτική διαχείριση

Το έργο αυτό προσφέρεται, σε περίπτωση που υπάρχει η δυνατότητα, η διαπραγμάτευσή του να γίνει και σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας όπου φαίνεται ότι το σύρσιμο μιας κορυφής ενός τετραπλεύρου αφήνει αναλλοίωτο το είδος του τετραπλεύρου που ορίζουν τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, μέσω του δυναμικού χειρισμού του σχήματος δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να διατυπώσουν και να ελέξουν εικασίες και να βοηθηθούν στην ανάπτυξη αποδεικτικών συλλογισμών. Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα δίνεται επίσης η ευκαιρία στους μαθητές να θεωρήσουν ότι αν ένα σχήμα ανήκει σε μία κατηγορία παραλληλογράμμων τότε ανήκει και σε οποιαδήποτε υποκατηγορία. Επιπλέον οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες ελέγχου της αντίστροφης μιας πρότασης και διαμόρφωσης των προϋποθέσεων και του συμπεράσματος μιας πρότασης.

Έργο 2 (Β΄Λυκείου, Γεωμετρία του επιπέδου)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (διατύπωση, υπόθεσης, συμβολισμός, μοντελοποίηση, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία - πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους.</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Β΄ Λυκείου/ Γεωμετρία του επιπέδου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Απόδειξη</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Συλλογισμού και επιχειρηματολογίας</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Μαθηματική επικοινωνία
Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού
Τα μαθηματικά ως πολιτισμικό διακύβευμα</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2">Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας</td></tr>
<tr><td></td><td>Εκτιμούν την ομορφιά και την</td></tr>
</table>

Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	κομψότητα των μαθηματικών	***Συγκείμενο***	Επιστημονικό – Προσωπικό		

Εργαστείτε σε μικρές ομάδες ώστε:

α) Να προτείνετε κανονικά πολύγωνα με ίδιο πλήθος πλευρών με τα οποία καλύπτεται το επίπεδο χωρίς κενά και επικαλύψεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

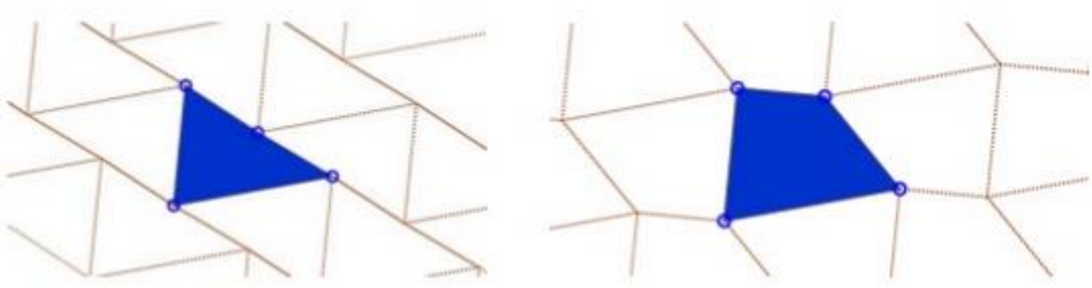
β) Καλύπτεται το επίπεδο με ίσα κανονικά πεντάγωνα ή ίσα κανονικά δεκάγωνα;

γ) Με βρείτε με ποια κανονικά πολύγωνα καλύπτεται το επίπεδο και να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

δ) Να προτείνετε τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να καλυφθεί το επίπεδο με συνδυασμό κανονικών πολυγώνων που δεν είναι του ίδιου είδους.

Σχεδιάστε τις προτάσεις σε χαρτί ή περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και χρωματίστε τα σχέδιά σας.

ε) Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται ότι ένα τυχαίο τρίγωνο ή τετράπλευρο μπορούν να καλύψουν το επίπεδο. Μπορείτε να προτείνετε με ποια διαδικασία μπορεί να καλυφθεί το επίπεδο με δεδομένο ένα τρίγωνο ή τετράπλευρο;



Διδακτική διαχείριση

Οι μαθητές με το συγκεκριμένο έργο μπορούν να εμπλακούν σε μια διερευνητική διαδικασία όπου κάνουν εικασίες σχετικά με την κάλυψη του επιπέδου από κανονικά και μη κανονικά πολύγωνα και τεκμηριώνουν τις προτάσεις που διατυπώνουν με αποδεικτικές διαδικασίες. Επιπλέον δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν με εικαστικό τρόπο με τα μαθηματικά εκτιμώντας την ομορφιά και την κομψότητα τους. Τέλος οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν τους μετασχηματισμούς που έχουν μελετήσει στις προηγούμενες βαθμίδες προκειμένου να απαντήσουν σχετικά ζητήματα.

Έργο 3 (Β΄Λυκείου, Εμβαδόν)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
Πεδίο	Γεωμετρία & Μέτρηση	***Ειδικά***	Δράσεις οικοδόμησης	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά***	Επίλυση προβλήματος,

Ενότητα	Β΄ Λυκείου/ Μετρήσεις		έννοιας (βαρύκεντρο)/ συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες. Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση (πρόβλεψη, τεκμηρίωση) Διεπιστημονική προσέγγιση	***της διδακτικής προσέγγισης***	πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Μεγάλες Ιδέες	Ισοδυναμία, Απόδειξη				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Συλλογισμού και επιχειρηματολογίας/ Μοντελοποίηση	***Γενικά***	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Μαθηματικός γραμματισμός (τα μαθηματικά ως εργαλείο οργάνωσης φυσικών φαινομένων)	***Συγκείμενο***	Διεπιστημονικό (Φυσική – Μαθηματικά)		

α) Να προσδιορίσετε την ευθεία που διέρχεται από μία κορυφή ενός τριγώνου και το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Να εξηγήσετε τον τρόπο που σκεφτήκατε σε ένα συμμαθητή σας και να εξηγήσετε γιατί η ευθεία που προσδιορίσατε είναι λύση του προβλήματος. Να συμπληρώσετε την πρόταση: Αν μία τριγωνική ομοιογενής πλάκα δεθεί με ένα σχοινί από μία κορυφή της και κρεμαστεί τότε η ευθεία του σχοινιού διέρχεται από το ....

Να εξηγήσετε τη γνώμη σας.

β) Συζητήστε στην τάξη για το σημείο στο οποίο ισορροπεί μία τριγωνική ομοιογενής πλάκα. Διατυπώστε με μαθηματικούς όρους την υπόθεσή σας με τη βοήθεια του καθηγητή σας και προσπαθήστε να αποδείξετε την μαθηματική πρόταση που διατυπώσατε.

γ) Να προσδιορίσετε το σημείο ισορροπίας μιας πλάκας σχήματος παραλληλογράμμου αιτιολογώντας την απάντησή σας.

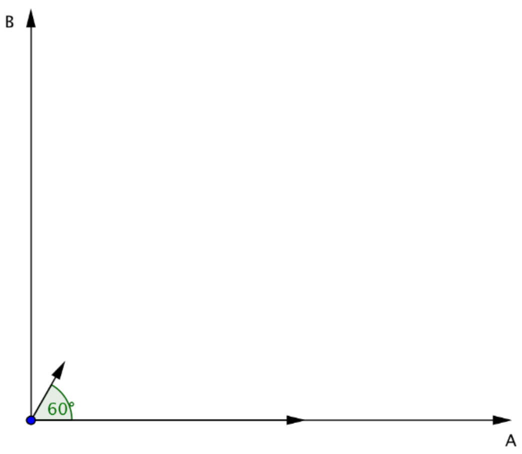
Διδακτική διαχείριση

Βασικός στόχος του συγκεκριμένου έργου είναι να συνδέσουν οι μαθητές την έννοια του βαρύκεντρου ενός τριγώνου με τη φυσική του σημασία δηλαδή το σημείο ισορροπίας του τριγώνου με το μαθηματικό του προσδιορισμό δηλαδή το σημείο τομής των διαμέσων τριγώνου. Καθοριστικό ρόλο στην προσπάθεια αυτή έχει η ιδέα ότι ισεμβαδικές ομοιογενείς τριγωνικές πλάκες έχουν το ίδιο βάρος. Με την έννοια αυτή μπορεί να αποδειχθεί αντίστροφα ότι το σημείο ισορροπίας ενός τριγώνου δηλαδή το σημείο το οποίο σχηματίζει με τις πλευρές του τριγώνου ισεμβαδικά τρίγωνα είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου.

Έργο 4 (Β΄ Λυκείου: Διανύσματα)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
Πεδίο	Γεωμετρία & Μέτρηση	***Ειδικά***	Μετασχηματιστικές δράσεις (Οργάνωση, αναπαράσταση)	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	Επίλυση προβλήματος, πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Β΄ Λυκείου/ Διανύσματα				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Επίλυση προβλήματος	***Γενικά***	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού		
				Προτεινόμενοι πόροι	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Μαθηματικός γραμματισμός (τα μαθηματικά ως εργαλείο οργάνωσης φυσικών φαινομένων)	***Συγκείμενο***	Διεπιστημονικό (Φυσική-Μαθηματικά)		

Ένα αεροπλάνο πετά ανατολικά με ταχύτητα 500 km/h και για κάποια περίοδο συναντά άνεμο ταχύτητας 70 km/h που πνέει βορειοανατολικά σχηματίζοντας γωνία 60^0 με την κατεύθυνση του αεροπλάνου. Να βρείτε την νέα κατεύθυνση του αεροπλάνου προσδιορίζοντας τη γωνίας της με την αρχική του κατεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητάς του μετά την επίδραση του ανέμου.



Διδακτική διαχείριση

Με το συγκεκριμένο έργο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τις γνώσεις τους για τα διανύσματα μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα και να τις αξιοποιήσουν στην επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα φαίνεται η σημασία της εύρεσης της γωνίας δύο διανυσμάτων και της κατεύθυνσης ενός διανύσματος για την ερμηνεία και την εξέλιξη ενός φαινομένου. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει το βαθμό μοντελοποίησης του προβλήματος που θα ζητήσει από τους μαθητές είτε καλώντας να δημιουργήσουν ένα μοντέλο από τη λεκτική περιγραφή του προβλήματος. Είτε με τη μορφή που παρουσιάζεται στον οδηγό του εκπαιδευτικού είτε με τον πλήρη σχεδιασμό των διανυσμάτων.

Έργο 5(Β΄Λυκείου: Διανύσματα)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
Πεδίο	Γεωμετρία & Μέτρηση	***Ειδικά***	Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (περιορισμός, γενίκευση, σύγκριση, εξειδίκευση)	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Β΄Λυκείου/ Διανύσματα				
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων	***Γενικά***	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο	***Συγκείμενο***	Επιστημονικό		

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποιες γνωστές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών και ζητείται να εξετάσουμε αν επεκτείνονται στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Εργαζόμενοι ανά δύο, αν θεωρείτε ότι κάποια από τις σχέσεις στα παρακάτω ερωτήματα (β) ισχύει να την αποδείξετε. Αν θεωρείτε ότι δεν ισχύει να βρείτε αντιπαράδειγμα. Μπορείτε να βρείτε προϋποθέσεις ώστε να ισχύει; Μπορείτε να προσαρμόσετε τη σχέση ώστε να ισχύει;

1. Ιδιότητες του μέτρου

α) Αν α, β πραγματικοί αριθμοί τότε:

β) Ισχύει ότι $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$;

2. Ιδιότητες των δυνάμεων

α) Αν α, β πραγματικοί αριθμοί τότε $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\ \beta^2$

β) Ισχύει ότι: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$;

3. Προσεταιριστική ιδιότητα

α) Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί τότε: (αβ)γ = α(βγ),

β) Ισχύει ότι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$;

4. Ο νόμος της διαγραφής

α) Αν α, β, γ αριθμοί και α γ = β γ με γ $\neq 0$ τότε α = β

β) Ισχύει ότι αν $\vec{a}\ \vec{\gamma}=\vec{\beta}\ \vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma}\neq\vec{0}$ τότε $\vec{a}=\vec{\beta}$;

5. Γινόμενο ίσο με μηδέν

α) Αν α, β αριθμοί τότε αβ=0 $\Leftrightarrow$ α = 0 ή β = 0

β) Ισχύει ότι: αν $\vec{a}\ \vec{\beta}=0$ τότε $\vec{a}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$;

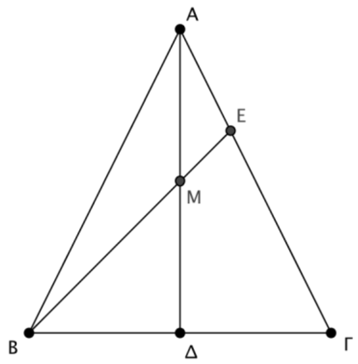
Διδακτική διαχείριση

Είναι συχνό φαινόμενο στους μαθητές να μεταφέρουν τις γνώσεις τους από ένα πλαίσιο στο άλλο χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους τις απαραίτητες προϋποθέσεις. Με το συγκεκριμένο έργο οι δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αντιληφθούν ότι το σύνολο των διανυσμάτων εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο έχει διαφορετικές ιδιότητες και ως εκ τούτου διαφορετική δομή από το σύνολο των αριθμών εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό. Επιπλέον με το συγκεκριμένο έργο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν με σημαντικά βήματα της μαθηματικής δραστηριότητας όπως ο έλεγχος ενός ισχυρισμού, η αναθεώρηση ενός αρχικού ισχυρισμού, η διατύπωση μιας υπόθεσης και η απόδειξη μιας πρότασης.

Έργο 6 (Β΄Λυκείου: Ευθεία)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
Πεδίο	Γεωμετρία & Μέτρηση	***Ειδικά***	Επίλυση προβλήματος (συμβολισμός, τεκμηρίωση)	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	Επίλυση προβλήματος, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους.
Ενότητα	Β΄ Λυκείου/ Διανύσματα/Ευθεία				
Μεγάλες Ιδέες	Απόδειξη				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Μοντελοποίηση	***Γενικά***	*Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού*	***Προτεινόμενοι πόροι***	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο	***Συγκείμενο***	Επιστημονικό		

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , το ύψος του ΑΔ και Μ το μέσο του ΑΔ. Αν Ε σημείο της ΑΓ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ να αποδειχθεί ότι τα σημεία Β, Μ και Ε είναι συνευθειακά. Εργαζόμενοι ανά δύο:



α) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και να ορίσετε σε αυτό τις συντεταγμένες σημείων Α, Β και μέσω αυτών τις συντεταγμένες των σημείων Β, Μ και Ε καθώς και των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ και στη συνέχεια να λύσετε το πρόβλημα.

β) Να λύσετε το πρόβλημα στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας χωρίς τη θεώρηση συστήματος συντεταγμένων χρησιμοποιώντας διανύσματα.

γ) Να λύσετε το πρόβλημα στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Υπόδειξη: Θεωρήστε Κ το μέσο του ΕΓ) και να συγκρίνετε τις τρεις μεθόδους.

Διδακτική διαχείριση

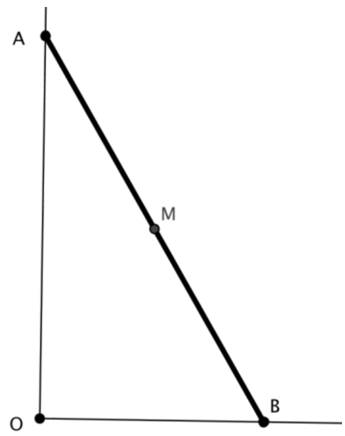
Με το έργο αυτό δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν την αξία της υιοθέτησης ενός συστήματος συντεταγμένων για την επίλυση ενός προβλήματος. Επιπλέον οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν τα κριτήρια επιλογής ενός συστήματος συντεταγμένων, τις αυθαίρετες επιλογές για τις συντεταγμένες κάποιων σημείων και εξαρτώμενων στοιχείων από τις επιλογές τους. Στο ερώτημα (β) ζητείται η προσέγγιση του προβλήματος στο πλαίσιο του διανυσματικού λογισμού χωρίς τη χρήση συστήματος συντεταγμένων και στο ερώτημα (γ) ζητείται η επίλυση του προβλήματος στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας με στόχο τη σύγκριση των τριών μεθόδων.

Έργο 7 (Γ΄ Λυκείου, Γεωμετρικοί τόποι)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
Πεδίο	Γεωμετρία & Μέτρηση	***Ειδικά***	Επίλυση προβλήματος (Διατύπωση εικασίας, τεκμηρίωση	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο
Ενότητα	Γ΄ Λυκείου/ Γεωμετρία του επιπέδου				

Μεγάλες Ιδέες	Απόδειξη				επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Επίλυση προβλήματος	***Γενικά***	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο	***Συγκείμενο***	Επιστημονικό		

Η όψη μίας σκάλας μήκους 3 m έχει το ένα άκρο της Α σ' ένα τοίχο ΟΑ και το άλλο άκρο της Β στο πάτωμα (ΟΑ κάθετη στην ΟΒ). Ξεκινώντας από όρθια θέση η σκάλα γλιστράει ώστε το Α να κινείται προς το πάτωμα και το Β να απομακρύνεται από τον τοίχο.



α) Να βρείτε τις θέσεις του Μ όταν το Β ταυτίζεται με το Ο και όταν το Α ταυτίζεται με το Ο. Να διατυπώσετε εικασίες για το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΑΒ και να τις συζητήσετε με τους συμμαθητές σας.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του Μ αποδεικνύοντας τους ισχυρισμούς σας.

Διδακτική διαχείριση

Το συγκεκριμένο έργο μπορεί να υλοποιηθεί με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις, γεωμετρική και αναλυτική. Με γεωμετρική προσέγγιση αξιοποιείται η γνωστή πρόταση από την γεωμετρία της Α΄ Λυκείου η οποία συνδέει τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα. Με την αναλυτική προσέγγιση προσφέρεται η δυνατότητα θεώρησης κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων ώστε να βρεθεί η εξίσωση του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Επίσης, προτείνονται μέθοδοι διερεύνησης της μεταβλητής κατάστασης όπως ο έλεγχος των ακραίων θέσεων που συμβάλλουν στη διατύπωση εικασιών για το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Σε περίπτωση που οι μαθητές δυσκολεύονται να προσδιορίσουν το ζητούμενο γεωμετρικό τόπο, μπορούν να σχεδιάσουν κατάλληλο σχήμα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας όπου προσφέρεται η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του σχήματος και έτσι ενεργοποιώντας το ίχνος του σημείου του οποίου ζητείται ο γεωμετρικός τόπος μπορούν να διευκολυνθούν στον προσδιορισμό του.

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Επίλυση προβλήματος (υπόθεση, πρόβλεψη, τεκμηρίωση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Επίλυση προβλήματος, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Γ΄ Λυκείου/ Γεωμετρία του επιπέδου</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Απόδειξη</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Επίλυση προβλήματος</td><td rowspan="2">Γενικά</td><td rowspan="2">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2"></td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td></td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Συνεργάσου με ένα συμμαθητή σου για την επίλυση του παρακάτω προβλήματος.

Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα $BG = a$, υ και μ.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Α ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει εμβαδόν

$$(ABG) = \frac{1}{2} a u.$$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Α ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει διάμεσο ΑΜ = μ .

γ) Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $BG = a$, ύψος $AD = u$ και διάμεσο ΑΜ = μ. Πόσα διαφορετικά σημεία Α αποτελούν κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ που κατασκευάσατε;

δ) Να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα α, υ και μ ώστε να έχει λύση το πρόβλημα (γ) καθώς και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος (γ).

Διδακτική διαχείριση

Οι μαθητές με το συγκεκριμένο έργο τους δίνεται η δυνατότητα να εμπλακούν στη διαδικασία επίλυσης δύο προβλημάτων γεωμετρικών τόπων και τον προσδιορισμό σημείων ως τομή δύο γραμμών. Το ερώτημα (α) εναλλακτικά θα μπορούσε να ζητείται να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν από μία ευθεία απόσταση ίση με το μήκος του τμήματος υ. Με αφορμή αυτό το ερώτημα μπορεί να συζητηθεί η διάκριση των ίσων τριγώνων από τα ισεμβαδικά τρίγωνα. Στο ερώτημα (β) υπάρχει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού για τον γεωμετρικό τόπο χρειάζεται να εξαιρεθούν τα σημεία της ευθείας ΒΓ που τέμνουν τον κύκλο με κέντρο το μέσο του ΒΓ και ακτίνα μ. Επιπλέον οι μαθητές μπορούν να διερευνήσουν τις σχέσεις των τμημάτων α και μ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι (i) οξυγώνιο, (ii) ορθογώνιο ή (iii) αμβλυγώνιο. Τα ερωτήματα (γ) και (δ) έχουν διερευνητικό χαρακτήρα επειδή θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή τόσο για τις συνθήκες με τις οποίες έχει λύση το πρόβλημα όσο και για τη σχέση των συνθηκών αυτών με το πλήθος των λύσεων.

Έργο 9 (Γ΄ Λυκείου, Μετασχηματισμοί)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Γεωμετρία & Μέτρηση</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Μετασχηματιστικές δράσεις (Οργάνωση, αναπαράσταση)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Γ΄ Λυκείου/ Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μετασχηματισμοί</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td rowspan="2">Δημιουργία συνδέσεων</td><td rowspan="3">Γενικά</td><td rowspan="3">Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προτεινόμενοι πόροι</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>Επιστημονικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2, 1), Β(3, 1) και Γ(2, 3)

α) Να βρείτε τις κορυφές του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ που προκύπτει από τη στροφή του ΑΒΓ κατά 90^0 γύρω από την αρχή των αξόνων Ο καθώς και τον αντίστοιχο πίνακα μετασχηματισμού Α.

β) Να βρείτε τις κορυφές του τριγώνου Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ που προκύπτει από την ανάκλαση του Α΄Β΄Γ΄ ως προς τον άξονα xx΄ καθώς και τον αντίστοιχο πίνακα μετασχηματισμού Β.

γ) Αν ένα κινητό σημείο Μ διαγράφει τη διαδρομή Α΄→ Β΄→ Γ΄ στις πλευρές του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ να βρείτε τη διαδρομή που διαγράφει το συμμετρικό Μ΄ του Μ ως προς τον άξονα x΄x και να διατυπώσετε ένα συμπέρασμα για τις δύο διαδρομές.

δ) Να βρείτε τον πίνακα του μετασχηματισμού με τον οποίο το τρίγωνο ΑΒΓ αντιστοιχεί στο Α΄΄Β΄΄Γ΄΄.

ε) Αν θεωρήσουμε ΚΛΜ το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τον άξονα x΄x και στη συνέχεια το τρίγωνο Κ΄Λ΄Μ΄που προκύπτει από τη στροφή του του ΚΛΜ κατά 90^0 να βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού με τον οποίο το τρίγωνο ΑΒΓ αντιστοιχεί στο τρίγωνο Κ΄Λ΄Μ΄. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα Κ΄Λ΄Μ΄ και Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ταυτίζονται.

Διδακτική διαχείριση

Με το έργο αυτό δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να βρούν την εικόνα ενός τριγώνου που έχει προκύψει από την στροφή δεδομένου τριγώνου.Επιπλέον δίνεται η δυνατότητα να βρεθεί το συμμετρικό τριγώνου ως προς τον άξονα x΄x και να διαπιστωθεί ότι η ανάκλαση δεν διατηρεί τον προσανατολισμό. Στη συνέχεια δίνεται η δυνατότητα να μελετηθεί η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση δύο μετασχηματισμών και να συνδεθεί η σύνθεση δύο μετασχηματισμών με το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων και τις ιδιότητές της. Συνίσταται οι εικόνες των τριγώνων που προκύπτουν να σχεδιάζονται σε σύστημα συντεταγμένων ώστε να φαίνεται η σύνδεση της αλγεβρικής επεξεργασίας με τις αντίστοιχες γραφικές αναπαραστάσεις.

4. Ενδεικτικό παράδειγμα μαθησιακής εξέλιξης σε όλες τις βαθμίδες

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα παράδειγμα που αναδεικνύει την εξέλιξη των ΠΜΑ στις διάφορες βαθμίδες και τάξεις στην υποενότητα «σχεδιασμός – κατασκευές» της θεματικής ενότητας «Γεωμετρία του επιπέδου».

Σχεδιάζουν τρίγωνα με κανόνα και μοιρογνωμόνιο: Στην Ε΄ Δημοτικού μπορεί να δοθεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ στους μαθητές και να τους ζητηθεί να μετρήσουν τις γωνίες του Β και Γ και το τμήμα ΒΓ. Στη συνέχεια μπορεί να τους ζητηθεί να σχεδιάσουν ένα τμήμα ΓΔ ίσο με το ΒΓ και γωνίες με πλευρά τη ΓΔ ίσες με τις γωνίες Β και Γ ώστε να σχηματίζεται ένα τρίγωνο. Στο τέλος οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν το τρίγωνο ΑΒΓ με το τρίγωνο που σχεδίασαν και να συζητήσουν στην τάξη για τη διαδικασία της μέτρησης.

Κατασκευάζουν και σχεδιάζουν πολύγωνα (φυσικά υλικά, ψηφιακό περιβάλλον): Στους μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού μπορεί να ζητηθεί να κατασκευάσουν πολύγωνα χρησιμοποιώντας χαρτόνι και ψαλίδι. Επίσης, μπορεί να δοθεί σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και δύο γωνίες φ και θ και να τους ζητηθεί αξιοποιώντας τα εργαλεία του προγράμματος να σχεδιάσουν τρίγωνο ΑΒΓ όπου οι γωνίες Β και Γ να είναι ίσες με τις γωνίες φ και θ. Στη συνέχεια μπορούν να διερευνήσουν τους περιορισμούς του προβλήματος και να συζητήσουν για τις λύσεις του.

- Σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα τρίγωνα και παραλληλόγραμμα με δεδομένα χαρακτηριστικά και περιγράφουν τα βήματα της σχεδίασης: Οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου μαθαίνουν να σχεδιάζουν με κανόνα και διαβήτη γωνία ίση με δεδομένη γωνία και αξιοποιούν αυτή τη γνώση για την κατασκευή τριγώνου ΑΒΓ όπου δίνεται η πλευρά ΒΓ και γωνίες ίσες με τις Β και Γ. Στη συνέχεια επεκτείνουν την κατασκευή σε παραλληλόγραμμο και συζητούν για τους περιορισμούς και τις λύσεις του προβλήματος.

- Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τρίγωνα για τα οποία δίνονται βασικά τους στοιχεία (γωνίες, πλευρές)

Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ίσες με δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα και αξιοποιούν την τριγωνική ανισότητα για να προσδιορίσουν τη συνθήκη ώστε η κατασκευή αυτή να είναι εφικτή. Επίσης, χρησιμοποιούν το κατάλληλο κριτήριο ισότητας τριγώνων για να βρουν το πλήθος των διαφορετικών λύσεων του προβλήματος.

- Χρησιμοποιούν τις σχέσεις ορθογωνίων τριγώνων στην επίλυση προβλημάτων κατασκευών: Στους μαθητές της Β΄ Λυκείου μπορεί να δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β και να τους ζητηθεί να κατασκευάσουν τρίγωνο με πλευρές α και β και με την ιδιότητα μία διάμεσος να είναι το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

- Ορίζουν και κατασκευάζουν σχήματα που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες χρησιμοποιώντας Ανάλυση – Σύνθεση – Διερεύνηση: Στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου μπορεί να δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και μ και να τους ζητηθεί να κατασκευαστεί γεωμετρικά (με κανόνα και διαβήτη) τρίγωνο με πλευρές α και β και διάμεσο, που περιέχεται σε αυτές τις πλευρές, ίση με μ.

5. Βιβλιογραφία

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8.*

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Δημητριάδου, Ε. & Τζανάκης, Κ. (2003). Οι δυσκολίες κατανόησης της γλώσσας του διανυσματικού λογισμού από μαθητές Γ΄ γυμνασίου. *2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education III (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. University of London, Institute of Education: Technical report on the nationwide survey. London.

Lakoff G. & Johnson M. (1980), ''Metaphors We Live By'', The university Press. Chicago.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing thinking in geometry*. Sage.

Pierre M. van Hiele P. (1986) *Structure and Insight*, Orlando: Academic Press.

Pólya, G. (1957). How to solve it. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Reiss, K., Klieme, E., & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 4, pp. 97–104). Utrecht: Utrecht University.

Sinclair, N., & Yurita, V. (2005). Characteristic features of discourse in a sketchpad classroom. Paper presented at the 27th Annual Meeting ofthe North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Virginia Tech.

Stroup, W. (2005). Learning the basics with calculus. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 24(2), 179-197.

Schoenfeld Schoenfeld, A.H. (1994). Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Orlando. FL: Academic Press.

c) Στοχαστικά Μαθηματικά

1. Σημασία του Πεδίου

Τα ***Στοχαστικά Μαθηματικά*** (***Πιθανότητες και Στατιστική***) είναι μια ιδιαίτερη περιοχή των Μαθηματικών που στην εποχή μας γίνεται όλο και πιο επίκαιρη. Ένας βασικός λόγος που αυτό συμβαίνει είναι γιατί τα προβλήματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε με μαθηματικά εργαλεία γίνονται πιο πολύπλοκα και **η πολυπλοκότητα εμφανίζεται ως τυχαιότητα.** Για να κατανοήσει κανείς αυτό, αρκεί να φανταστεί το στρίψιμο ενός κέρματος. Παρότι η κίνηση του κέρματος υπακούει στους νόμους της κλασικής μηχανικής, το να βρει κανείς πώς εξαρτάται το αποτέλεσμα από τον τρόπο που στρίβουμε το κέρμα είναι μια διαδικασία τόσο πολύπλοκη που πρακτικά είναι αδύνατη, γι' αυτό και φανταζόμαστε συχνά το αποτέλεσμα ως τυχαίο. Σε ένα ακόμα παράδειγμα, ας φανταστούμε ένα πείραμα που το αποτέλεσμά του είναι συνάρτηση πολλών παραμέτρων, από τις οποίες εμείς γνωρίζουμε μόνο ένα μέρος. Ας φανταστούμε ακόμα ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα, κρατώντας τις παραμέτρους που γνωρίζουμε σταθερές. Το αποτέλεσμα του πειράματος μπορεί να αλλάζει σε κάθε επανάληψη, παρότι εμείς κρατάμε τις παραμέτρους που γνωρίζουμε σταθερές, επειδή αλλάζουν οι παράμετροι που δεν μπορούμε να ελέγξουμε. Αυτός ο μηχανισμός ***μεταβλητότητας*** κάνει το αποτέλεσμα του πειράματος να *φαίνεται σε εμάς* τυχαίο.

Η καθημερινότητά μας κατακλύζεται από τέτοια παραδείγματα. Φανταστείτε για παράδειγμα μια γιατρό που προσπαθεί να αποφασίσει αν ένας ασθενής που προσέρχεται στο Τμήμα Επειγόντων Περιστατικών θα χρειαστεί να διασωληνωθεί, βασιζόμενη μόνο στις παραμέτρους που αποτυπώνονται στις εξετάσεις του ασθενούς. Προκειμένου να κατανοήσουμε πολύπλοκα φαινόμενα και να λάβουμε **ορθολογικές αποφάσεις μέσα στις συνθήκες αβεβαιότητας** που αυτή η πολυπλοκότητα συνεπάγεται, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε **μαθηματικά μοντέλα που ποσοτικοποιούν την αβεβαιότητα** και να αναπτύξουμε εργαλεία για την ανάλυση αυτών των μοντέλων. Αυτός ακριβώς είναι και ο σκοπός των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Επιπλέον, τα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι ένα σύγχρονο πολιτισμικό αγαθό για τους πολίτες, καθώς παρέχουν τα εργαλεία για την ανάλυση δεδομένων και την *εξαγωγή πληροφοριών* από αυτά. Εκτιμάται ότι από τα δεδομένα που έχουν παραχθεί από ανθρώπινη δραστηριότητα από την αρχή της ιστορίας το 90% έχει παραχθεί τα τελευταία 2 χρόνια. Ο πολίτης κατακλύζεται καθημερινά από στατιστικές πληροφορίες. Στις δημοσκοπήσεις, στις οικονομικές αναλύσεις, στις επιστημονικές ανακοινώσεις, στις κοινωνικές μελέτες χρησιμοποιούνται στατιστικά διαγράμματα και δείκτες ώστε να παρουσιαστούν, να αναλυθούν και να ερμηνευτούν τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί με σκοπό την λήψη αποφάσεων. Τις στατιστικές μεθόδους τις χρησιμοποιεί σχεδόν το σύνολο των επιστημονικών κλάδων, με σκοπό να εξαχθούν συμπεράσματα, να ανακαλυφθούν σχέσεις εξάρτησης και να θεμελιωθούν προβλέψεις με ***επαγωγικό*** τρόπο· με βάση την πληροφορία που διαθέτουμε από ένα υποσύνολο του υπό μελέτη πληθυσμού εξάγουμε συμπεράσματα για όλον τον πληθυσμό. Συνήθως ο εν λόγω πληθυσμός αποτελείται από ένα τεράστιο το πλήθος μονάδες (τις οποίες μπορεί και να μην έχουμε μηχανισμούς καταγραφής τους), οπότε η ***ολική απογραφή*** είναι είτε χρονοβόρα είτε αδύνατον να επιτευχθεί. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα αφορούν ένα ή περισσότερα ***χαρακτηριστικά*** του εν λόγω πληθυσμού, τα οποία εμπλέκονται στο πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε.

Η ***στατιστική επίλυση προβλημάτων*** είναι μια διαδικασία η οποία περιλαμβάνει τέσσερα βασικά στάδια με την ακόλουθη σειρά:

1. Διευκρίνηση του ερευνητικού προβλήματος και διατύπωση ερωτήσεων που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα.
2. Σχεδιασμός και συλλογή δεδομένων.
3. Ανάλυση των δεδομένων με χρήση κατάλληλα επιλεγμένων γραφικών αναπαραστάσεων, στατιστικών δεικτών και εν συνεχεία πιθανοθεωρητικών μοντέλων.
4. Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και απάντηση των αρχικών ερευνητικών ερωτημάτων.

Οι ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα, συνήθως αφορούν πολύπλοκους φυσικούς μηχανισμούς, στους οποίους είναι σχεδόν αδύνατη μια αιτιοκρατική προσέγγιση. Για την εξαγωγή έγκυρης γνώσης χρησιμοποιούνται ***εμπειρικά δεδομένα παρατήρησης***, τα οποία πρέπει να ***συλλεχθούν ορθώς***, ώστε να «μιμούνται» κατάλληλα τον φυσικό μηχανισμό που μελετάμε, και εν συνεχεία να αναλυθούν, να παρουσιαστούν συνοπτικά, και να μοντελοποιηθούν κατάλληλα, ώστε να προκύψουν από αυτά χρήσιμες πληροφορίες και ασφαλή συμπεράσματα για λήψη ορθών αποφάσεων.

Η ύπαρξη της ***μεταβλητότητας*** είναι αυτή που διαφοροποιεί ένα ***ντεντερμινιστικό*** από ένα ***στατιστικό*** ερώτημα. Η ερώτηση, για παράδειγμα, πόσο ψηλός είμαι, μπορεί να απαντηθεί με έναν μόνο αριθμό και δεν αποτελεί στατιστικό ερώτημα, μιας και όσες φορές καταγράψουμε (σε ένα μικρό χρονικό διάστημα) την ζητούμενη τιμή, αυτή θα είναι πάντα η ίδια. Αντίθετα η ερώτηση πόσο ψηλοί είναι οι ενήλικοι άνδρες στην Ελλάδα, θα αποτελούσε μια ντεντερμινιστική ερώτηση μόνο αν όλοι οι ενήλικοι άνδρες στην Ελλάδα είχαν το ίδιο ύψος. Το γεγονός πως υπάρχουν διαφορετικά ύψη, σημαίνει πως αναμένουμε μια απάντηση που στηρίζεται σε μετρήσεις ύψους που μεταβάλλονται, οπότε έχουμε ένα στατιστικό ερώτημα. Είναι εύλογο τότε αυτές τις μεταβαλλόμενες τιμές να τις περιγράψουμε κατάλληλα, δίνοντας πληροφορία για ένα ή περισσότερα ***μέτρα θέσης*** αυτών (αντιπροσωπευτικές τιμές), όπως και πληροφορία για το βαθμό ***μεταβλητότητας*** αυτών.

Στη **Στατιστική**, τα εμπειρικά δεδομένα που συλλέγουμε, είναι σημαντικό να τα ***περιγράψουμε*** με κάποιον συνοπτικό τρόπο, χωρίς όμως έτσι να χάσουμε την πληροφορία που μας παρέχουν, ώστε να εξάγουμε την απαιτούμενη πληροφορία που αναζητάμε από αυτά. Η συνοπτική αυτή παρουσίαση μπορεί να στηρίζεται σε ***γραφικές μεθόδους***, όπου κατάλληλα επιλεγμένα ***διαγράμματα*** δημιουργούνται, καθώς και σε ***αριθμητικές μεθόδους***, όπου στατιστικοί δείκτες υπολογίζονται με σκοπό τον προσδιορισμό ***μέτρων θέσης και μεταβλητότητας*** των δεδομένων αυτών. Για την ορθή επιλογή διαγραμμάτων και στατιστικών δεικτών, πρέπει αρχικά να είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε αν τα δεδομένα προέρχονται από ***κατηγορικά*** ή ***ποσοτικά*** χαρακτηριστικά του υπό μελέτη πληθυσμού. Επιπλέον τα ποσοτικά χαρακτηριστικά, μπορούμε να τα διαχωρίσουμε σε ***διακριτά*** και ***συνεχή***. Τα διαγράμματα καθώς και οι κατάλληλα επιλεγμένοι αριθμητικοί δείκτες, μπορούν να χρησιμοποιηθούν, επιπλέον, για να ανακαλυφθούν **σχέσεις εξάρτησης** που διέπουν τα δεδομένα. Η ***ερμηνεία*** των αποτελεσμάτων είναι πολύ σημαντική. Από τα παραγόμενα διαγράμματα και τους στατιστικούς δείκτες πρέπει να εξάγουμε κάποια πρώτα συμπεράσματα, τα οποία σε ένα αρχικό στάδιο να απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί. Εν συνεχεία, με χρήση κατάλληλων (***στοχαστικών) μοντέλων*** θα προσπαθήσουμε να αποφανθούμε αν τα αρχικά αυτά συμπεράσματα που καταλήξαμε, με βάση τα δεδομένα που διαθέτουμε, οφείλονται στην τύχη ή μπορούν να γενικευτούν σε όλο τον πληθυσμό.

Η **Θεωρία των Πιθανοτήτων** παρέχει το μαθηματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε στοχαστικά μοντέλα για πολύπλοκα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου και να αναλύσουμε αυτά τα μοντέλα για να εξερευνήσουμε τις συνέπειές τους. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου, η πεποίθησή μας για το πόσο βέβαιο θεωρούμε να συμβεί το ενδεχόμενο, αποκτά συγκεκριμένο μαθηματικό νόημα και αναπτύσσεται σε ένα σύνολο από κανόνες λογισμού που συνδέουν τις πιθανότητες ενδεχομένων και μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων από εκείνες απλούστερων. Ταυτόχρονα αναπτύσσουμε μεθόδους που επιτρέπουν να αξιοποιούμε πληροφορίες που λαμβάνουμε για το φαινόμενο που μάς ενδιαφέρει ώστε να επικαιροποιούμε τις πεποιθήσεις μας με βάση αυτές τις πληροφορίες (**δεσμευμένη πιθανότητα**). Έννοιες του πραγματικού κόσμου όπως η **ανεξαρτησία,** το να μην επηρεάζει δηλαδή η εμφάνιση ενός ενδεχομένου την εμφάνιση ενός άλλου, αποκτούν συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο και μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε απλά πιθανοθεωρητικά μοντέλα, όπως το στρίψιμο ενός κέρματος, ως δομικούς λίθους για να κατασκευάσουμε πολύπλοκα ρεαλιστικά μοντέλα για προβλήματα του πραγματικού κόσμου και να κατανοήσουμε τις βαθιές και συχνά απρόβλεπτες συνέπειές τους. Έτσι, η Θεωρία Πιθανοτήτων δεν παρέχει απλά τη μαθηματική θεμελίωση των στατιστικών μεθόδων αλλά έχει εξελιχθεί σε έναν κεντρικό κλάδο των σύγχρονων Μαθηματικών με συνδέσεις και προβολές σε πολλά πεδία των Θεωρητικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Ο στόχος της σχολικής εκπαίδευσης στα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι να δωσει τη δυνατότητα στους αυριανούς πολίτες

• να οργανώνουν και να παρουσιάζουν δεδομένα με σκοπό να επικοινωνήσουν πληροφορίες με εύληπτο και έγκυρο τρόπο, αξιοποιώντας και ψηφιακά εργαλεία,

• να είναι ικανοί και κριτικοί χρήστες των στατιστικών πληροφοριών που μας κατακλύζουν και των συμπερασμάτων που συχνά εξάγονται,

• να κατανοούν ποσοτικά την εγγενή αβεβαιότητα πολύπλοκων καταστάσεων και να μπορούν να κάνουν ορθολογικά δικαιολογημένες προσωπικές επιλογές σε καταστάσεις που εμπεριέχουν ρίσκο.

Η Στατιστική, στο Λύκειο, αναπτύσσεται σε τρεις θεματικές ενότητες: (α) την ενότητα «διαχείριση δεδομένων», (β) την ενότητα «μέτρα θέσης -μεταβλητότητα» και (γ) την ενότητα «σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών». Οι Πιθανότητες, στο Λύκειο, αναπτύσσονται σε δύο θεματικές ενότητες: (α) την ενότητα «πειράματα τύχης και πιθανότητες» και (β) την ενότητα «συσχέτιση».

Στο **Λύκειο, όσον αφορά τη διδασκαλία της Στατιστικής,** οι μαθητές καλούνται από τα δεδομένα να ανακαλύψουν ***σχέσεις εξάρτησης*** μεταξύ δύο χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Τα δεδομένα πλέον απαρτίζουν ένα δείγμα, δύο χαρακτηριστικών των μονάδων του πληθυσμού, και σκοπός των μαθητών είναι με χρήση διαγραμματικών αναπαραστάσεων, ποσοτικών χαρακτηριστικών και πιθανοθεωρητικών μοντέλων, να ανακαλύψουν σχέσεις εξάρτησης που διέπουν τα δεδομένα και να αναρωτηθούν αν αυτές μπορούν να αποτελούν σχέσεις αιτίας-αιτιατού στον πληθυσμό. Διατυπώνουν λοιπόν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ: (α) ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού, (β) δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών και (γ) δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών. Κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα για να περιγράψουν τις τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού στις στάθμες του κατηγορικού χαρακτηριστικού, πίνακες συνάφειας συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων και δεσμευμένων σχετικών συχνοτήτων σε περιπτώσεις δεδομένων από δύο κατηγορικές μεταβλητές και διαγράμματα διασποράς σε περιπτώσεις δεδομένων προερχόμενα από δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά. Με την βοήθεια των πινάκων συνάφειας κατασκευάζουν στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων ώστε εποπτικά να αναπαραστήσουν τις διαφοροποιήσεις. Ως ένα επιπλέον μέτρο μεταβλητότητας για ποσοτικά δεδομένα υπολογίζουν την τυπική απόκλιση (και τη διασπορά) χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις από τον δειγματικό μέσο. Διερευνούν πώς επηρεάζεται η διασπορά (εκφρασμένη με τετραγωνικές ή απόλυτες αποκλίσεις) και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών. Επιπλέον περιγράφουν και προσδιορίζουν τον συντελεστή μεταβλητότητας ώστε να συγκρίνουν τη μεταβλητότητα ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης σε διαφορετικούς πληθυσμούς. Τέλος, προσδιορίζουν την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, και σχολιάζουν εποπτικά την προσαρμογή της, ενώ με τη βοήθεια της τιμής του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του *Pearson* σχολιάζουν την ύπαρξη και το είδος (θετική – αρνητική) της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Προτείνεται η χρήση **ψηφιακών εργαλείων,** ώστε να είναι σε θέση να κατασκευάσουν διαγράμματα, να υπολογίσουν στατιστικούς δείκτες και να προσαρμόσουν απλά γραμμικά μοντέλα και σε δεδομένα μεγάλης κλίμακας από τον πραγματικό κόσμο.

Σε ό,τι αφορά τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων, οι μαθητές γνωρίζουν ήδη από το Γυμνάσιο να χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας σε πειράματα τύχης με ισοπίθανες εκβάσεις και να χρησιμοποιούν τη βασική αρχή απαρίθμησης. Εδώ οι μαθητές αντιλαμβάνονται την πιθανότητα ως ένα **υποκειμενικό** μέτρο που εκφράζει τις πεποιθήσεις μας και τον χώρο πιθανότητας ως ένα **μαθηματικό μοντέλο** για ένα πείραμα τύχης: ο δειγματικός χώρος περιγράφει τι μπορεί να συμβεί και η πιθανότητα εκφράζει πόσο πιθανό θεωρούμε οτιδήποτε μπορεί να συμβεί. Με αυτή την οπτική, οι μαθητές διατυπώνουν υποθέσεις για τις ιδιότητες που πρέπει να έχει η πιθανότητα (κανόνες λογισμού) και αποδεικνύουν αυτές τις ιδιότητες από τα αξιώματα. Με την κατανόηση αρχών απαρίθμησης για διατάξεις με/χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις, και συνδυασμούς οι μαθητές λύνουν πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. Οι μαθητές υπολογίζουν δεσμευμένες πιθανότητες, τις ερμηνεύουν ως επικαιροποιημένες πεποιθήσεις και εισάγονται στην έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας. Με τη βοήθεια των θεωρημάτων ολικής πιθανότητας και Bayes και με τη μελέτη των βασικότερων διακριτών κατανομών οι μαθητές μοντελοποιούν μαθηματικά και λύνουν ακόμα περισσότερα πραγματικά προβλήματα.

Περιεχόμενο-Παρουσίαση της ανάπτυξης των θεματικών ενοτήτων

(1) Στατιστική

Η Στατιστική στο Λύκειο αναπτύσσεται σε τρεις ενότητες: (α) διαχείριση *δεδομένων,* (β) *μέτρα θέσης και μεταβλητότητας* και (γ) *σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών.*

➢ Η πρώτη ενότητα «διαχείριση *δεδομένων»* περιλαμβάνει τις υποενότητες: α) διατύπωση ερωτημάτων, β) συλλογή, γ) αναπαράσταση και δ) ερμηνεία.

Στο Λύκειο η υπο-ενότητα «διατύπωση ερωτημάτων» εξελίσσεται ως εξής:

— ερωτήματα που αφορούν **σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού** (Α' Λυκείου),

— ερωτήματα που αφορούν **σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού** (Β' Λυκείου),

— ερωτήματα που αφορούν **σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού** (Γ' Λυκείου).

Η συλλογή των δεδομένων, στο Λύκειο, πραγματοποιείται μέσω ερευνών και μελετών, όπου αντιπροσωπευτικά δείγματα χρησιμοποιούνται για την επαγωγική εξαγωγή συμπερασμάτων στον πληθυσμό.

Οι τρόποι αναπαράστασης των δεδομένων που χρησιμοποιούν οι μαθητές εξελίσσονται ως εξής:

— κατασκευή πολλαπλών θηκογραμμάτων, υπολογίζοντας πλέον και **οριακές τιμές**, για την περιγραφή των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού (Α' Λυκείου),

— κατασκευή πινάκων συνάφειας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων διπλής εισόδου, για την περιγραφή δεδομένων προερχόμενα από δύο διαφορετικά κατηγορικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη πληθυσμού (Β' Λυκείου),

— κατασκευή στοιβαγμένων ραβδογραμμάτων συχνοτήτων και ομαδοποιημένων ραβδογραμμάτων σχετικών συχνοτήτων (Β' Λυκείου),

— κατασκευή του διαγράμματος διασποράς των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών (Γ' Λυκείου).

➢ Η δεύτερη ενότητα «μέτρα θέσης και μεταβλητότητας» αφορά στη χρήση αριθμητικών εκφράσεων θέσης και μεταβλητότητας, οι οποίες επιτρέπουν τη συνοπτική περιγραφή δεδομένων, προερχόμενα από ποσοτικά χαρακτηριστικά, καθώς και τη σύγκριση ομάδων δεδομένων με βάση αυτά. Πιο συγκεκριμένα:

— Στην Α' Λυκείου περιγράφουν και προσδιορίζουν τη διασπορά και την τυπική απόκλιση ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις. Επιπλέον, περιγράφουν και προσδιορίζουν μέτρα θέσης (μέση τιμή και διάμεσος) και μέτρα μεταβλητότητας (διασπορά, τυπική απόκλιση, ενδοτεταρτημοριακό εύρος) των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού και τα συγκρίνουν.

— Στην Α' Λυκείου περιγράφουν και προσδιορίζουν τον συντελεστή μεταβλητότητας των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού και αναγνωρίζουν τη χρησιμότητά του στη σύγκριση μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης.

— Στην Γ΄ Λυκείου χρησιμοποιούν πιο σύντομες μορφές, με χρήση του συμβόλου του αθροίσματος, για να αναπαραστήσουν τη μέση τιμή και διασπορά των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού.

➢ Η τρίτη ενότητα «σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών» αφορά στη χρήση αριθμητικών μέτρων, πινάκων, διαγραμμάτων και στοχαστικών μοντέλων για τον εντοπισμό σχέσεων εξάρτησης μεταξύ δύο χαρακτηριστικών. Πιο συγκεκριμένα:

— Στην Α' Λυκείου με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων κάνουν συγκρίσεις και εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

— Στην Β' Λυκείου με τη βοήθεια στοιβαγμένων ραβδογραμμάτων συχνοτήτων και ομαδοποιημένων ραβδογραμμάτων σχετικών συχνοτήτων εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δύο κατηγορικών μεταβλητών.

— Στην Γ΄ Λυκείου με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση. Επιπλέον, με τη βοήθεια της τιμής του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson σχολιάζουν την ύπαρξη και το είδος (θετική ή αρνητική) της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.

— Στην Γ' Λυκείου προσδιορίζουν την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και σχολιάζουν εποπτικά την προσαρμογή της. Επιπλέον ερμηνεύουν με απλά λόγια τις τιμές των συντελεστών της ευθείας παλινδρόμησης και εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης.

(2) Πιθανότητες

Οι Πιθανότητες στο Λύκειο αναπτύσσονται σε δύο ενότητες: (α) Πειράματα τύχης και πιθανότητες και (β) Συσχέτιση.

➢ Όπως και στο Γυμνάσιο, η ενότητα «Πειράματα τύχης και πιθανότητες» συγκροτείται από δύο υποενότητες: «Δειγματικοί χώροι» και «Πιθανότητες ενδεχομένων»

— Στην υποενότητα «Δειγματικοί χώροι» οι μαθητές αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα πιθανοθεωρητικών μοντέλων στη μελέτη πολύπλοκων φαινομένων, αντιλαμβάνονται τον δειγματικό χώρο ως σύνολο, και χρησιμοποιούν τη γλώσσα της θεωρίας συνόλων για να αναπαραστήσουν ενδεχόμενα που περιγράφονται στη φυσική γλώσσα και αντίστροφα. Χρησιμοποιούν έννοιες από τη συνδυαστική ανάλυση όπως οι διατάξεις με/χωρίς επαναλήψεις, οι μεταθέσεις και οι συνδυασμοί για να υπολογίσουν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου. Στη Γ' Λυκείου αναγνωρίζουν το σύνολο τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής ως έναν δειγματικό χώρο.

— Στην υποενότητα «Πιθανότητες ενδεχομένων» οι μαθητές περιγράφουν πειράματα τύχης με μη ισοπίθανα ενδεχόμενα και διατυπώνουν υποθέσεις για τους κανόνες λογισμού που θα πρέπει να συνδέουν τις πιθανότητες ενδεχομένων. Διατυπώνουν τον αξιωματικό ορισμό και αναγνωρίζουν τις συνδέσεις του με τον κλασικό ορισμό που χρησιμοποιούσαν στο Γυμνάσιο. Αποδεικνύουν τους κανόνες λογισμού των Πιθανοτήτων από τα αξιώματα και τους χρησιμοποιούν για να λύσουν πραγματικά προβλήματα. Στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές αξιοποιούν τη συνδυαστική ανάλυση για να μοντελοποιήσουν και να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. Επιπλέον, αναγνωρίζουν ότι η κανονική κατανομή είναι ένα χρήσιμο μοντέλο σε πολλές πραγματικές καταστάσεις και αξιοποιούν τις ιδιότητές της για να λύσουν προβλήματα. Στη Γ΄ Λυκείου οι μαθητές ορίζουν τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής, την αναπαριστούν με τη βοήθεια διαγραμμάτων και την αντιλαμβάνονται ως ένα μέτρο πιθανότητας στο σύνολο τιμών της μεταβλητής. Υπολογίζουν τη σ.μ.π. κάποιων συνηθισμένων τυχαίων μεταβλητών και τη χρησιμοποιούν στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

➢ Στην ενότητα «Συσχέτιση» οι μαθητές ορίζουν τη δεσμευμένη πιθανότητα και την ερμηνεύουν ως ένα επικαιροποιημένο μοντέλο. Ορίζουν τη στοχαστική ανεξαρτησία και χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα και τη στοχαστική ανεξαρτησία στην κατασκευή πιθανοθεωρητικών μοντέλων και στην επίλυση προβλημάτων. Τέλος, χρησιμοποιούν το θεώρημα ολικής πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes για να λύσουν πραγματικά προβλήματα.

2. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και δυσκολίες των μαθητών

Η βασική έννοια που είναι συνυφασμένη με τα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι αυτή της ***μεταβλητότητας.*** Η προσέγγιση της μεταβλητότητας από μαθητές έχει μελετηθεί εκτενώς στα πλαίσια της έρευνας στη Μαθηματική Εκπαίδευση (Watson, 2006, Reading & Reid, 2007). Η ανάδειξη της μεταβλητότητας είναι σημαντική για την ανάπτυξη του ***στατιστικού συλλογισμού***, δηλαδή του συλλογισμού που χρησιμοποιεί ιδέες από τη Στατιστική, σχετικές πληροφορίες και στατιστικά διαγράμματα (Wild & Pfannkuch, 1999, Garfield, 2002)***.*** Ωστόσο, διαφορετικοί συλλογισμοί μπορούν να προκληθούν ανάλογα με το περικείμενο των έργων (Reading & Reid, 2007), με τα διαθέσιμα εργαλεία, π.χ. διαγράμματα, που έχουν τα παιδιά στην διάθεσή τους (Pfannkuch, 2005), και με τον βαθμό στον οποίο αναδεικνύεται από τον/την εκπαιδευτικό η μεταβλητότητα (Watson, 2006). Ατυχώς, συχνά αυτή υπονοείται και δεν υπογραμμίζεται, είτε επειδή κυριαρχεί, ενδεχομένως παραπλανητικά, η αντίληψη ότι είναι προφανής, όπως στην μεταβλητότητα που εμφανίζεται στα μεγέθη παπουτσιών, είτε επειδή εκλαμβάνεται ως εύκολη να την συλλάβει κανείς (π.χ. στα αποτελέσματα από το στρίψιμο ενός νομίσματος).

Ενώ οι υπόλοιποι κλάδοι των Μαθηματικών αναζητούν και μελετούν μοτίβα, στα Στοχαστικά Μαθηματικά τα μοτίβα είτε απουσιάζουν είτε είναι πολύ δύσκολο να ανακαλυφθούν. Επιπλέον, ο ανθρώπινος νους αναζητά τα μοτίβα και δυσκολεύεται να αναπτύξει σωστά τη διαίσθησή του για την τυχαιότητα. Αυτό, σε επίπεδο επιστημολογίας των Στοχαστικών Μαθηματικών, καταδεικνύεται και από τα πολλά απλά πιθανοθεωρητικά παράδοξα, όπως π.χ. το πρόβλημα των γενεθλίων και το πρόβλημα του Monty Hall. Όπως έχει φανεί από εμπειρικές έρευνες (Watson, 2006) ο τρόπος συλλογισμού που χρησιμοποιούν τα παιδιά για να απαντήσουν σε ερωτήματα που χρειάζονται στοχαστική επιχειρηματολογία, αλλάζει και αναπτύσσεται. Τα επιχειρήματά τους μπορεί αρχικά να βασίζονται στην υποκειμενικότητα, στη συνέχεια να αναζητούν κανονικότητες και μοτίβα και στη συνέχεια να χρησιμοποιούν στοχαστικά επιχειρήματα τα οποία δεν "εγκλωβίζονται" στην αναζήτηση κανονικότητας και αιτιοκρατικών σχέσεων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας στη διδακτική των Στοχαστικών Μαθηματικών δεν είναι τόσο πυκνά όσο σε κλάδους που αποτελούσαν μέρος των σχολικών Μαθηματικών σε μεγαλύτερη έκταση και σε μεγαλύτερο βάθος χρόνου. Έχει φανεί, από έρευνες στην τάξη - όχι στην Ελλάδα- ότι η δυνατότητα χρήσης προσομοιώσεων, ψηφιακών εργαλείων (Pratt, 2005) και εκτέλεσης μεγάλου πλήθους δοκιμών υποστηρίζει τη δημιουργία νοημάτων από τα παιδιά για τις έννοιες των Στοχαστικών Μαθηματικών. Θα ήταν επομένως χρήσιμο για τη σωστή ανάπτυξη του στατιστικού συλλογισμού να εισαχθούν στην σχολική τάξη εργαλεία όπως οι προσομοιώσεις και τα μεγάλα σύνολα δεδομένων.

Στον αντίποδα αυτών των δυσκολιών, τα Στοχαστικά Μαθηματικά αποτελούν μια περιοχή η οποία δεν χρησιμοποιεί δύσκολο φορμαλισμό στο επίπεδο του σχολείου. Έτσι, μπορεί να είναι ένα αρκετά συμπεριληπτικό κομμάτι των σχολικών Μαθηματικών που κινεί το ενδιαφέρον περισσότερων μαθητών.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει ομοφωνία (Franklin et al, 2007, Bargagliotti et al, 2020) στο ότι η ενασχόληση με τα Στοχαστικά Μαθηματικά από τις πολύ μικρές σχολικές τάξεις βοηθάει στη συμφιλίωση με τη μεταβλητότητα και στην ανάπτυξη ενός σωστού ποιοτικά και ποσοτικά τρόπου σκέψης για την τυχαιότητα. Επειδή τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του Προγράμματος Σπουδών είναι εξελισσόμενα, είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ποια Στοχαστικά Μαθηματικά μελέτησαν οι μαθητές στις προηγούμενες βαθμίδες.

(1) Στατιστική

Στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο, οι μαθητές έχουν εμπλακεί με έννοιες της στατιστικής. Έχουν ασχοληθεί με:

- τα είδη των δεδομένων (κατηγορικά, διακριτά ποσοτικά, συνεχή ποσοτικά και χρονικά)
- τρόπους οργάνωσης δεδομένων (πίνακες συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, ομαδοποιήσεις)
- τρόπους αναπαράστασης δεδομένων (εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα, φυλλογράμματα, διαγράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, κυκλικά διαγράμματα, ιστογράμματα συχνοτήτων, απλά θηκογράμματα - χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι οριακές τιμές - και χρονοδιαγράμματα), ορθής επιλογής αυτών, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που διαθέτουν, καθώς και ερμηνείας τους
- τα μέτρα θέσης (επικρατούσα τιμή, μέση τιμή, διάμεσος) καθώς και τα τεταρτημόρια
- μέτρα μεταβλητότητας (εύρος και ενδοτεταρτημοριακό εύρος).

Επίσης έχουν διερευνήσει ιδιότητες της μέσης τιμής (πως θα μεταβληθεί η μέση τιμή λόγου χάρη αν σε όλα τα δεδομένα προσθέσουμε ή πολλαπλασιάσουμε μια σταθερά) και πως επηρεάζεται η μέση τιμή και η διάμεσος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών. Παράλληλα έχουν αρχίσει να εντοπίζουν παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν. Τέλος έχουν προβεί σε διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν από συλλογή δεδομένων (κατηγορικών, διακριτών ή συνεχών ποσοτικών) μέσω μικρών ερευνών ή από το οικείο περιβάλλον τους, ερωτημάτων που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους και ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα. Τέλος στην Γ' Γυμνασίου οι μαθητές διατυπώνουν για πρώτη φορά ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους και έρχονται για πρώτοι φορά αντιμέτωποι με την έννοια του δείγματος. Με χρήση απλής τυχαίας δειγματοληψίας, επιλέγουν ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα και αναγνωρίζουν τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων καθώς και τη δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων για ένα πληθυσμό από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα.

Στο Λύκειο οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι για πρώτη φορά με σχέσεις εξάρτησης. Σε κάθε τάξη του Λυκείου είναι σημαντικό, μέσω παραδειγμάτων να ανακαλύπτουν ότι δύο χαρακτηριστικά που φαίνεται πως εξαρτώνται δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού. Επίσης οι παρατηρούμενες σχέσεις εξάρτησης που προκύπτουν από τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, δεν είναι αναγκαστικό να χαρακτηρίζουν και τον πληθυσμό. Στατιστικά μοντέλα, καθώς και στατιστικοί έλεγχοι υπόθεσης θα πρέπει (μελλοντικά) να χρησιμοποιηθούν για την επαγωγική διεξαγωγή των συμπερασμάτων στο πληθυσμό. Επιπλέον, είναι σημαντικό το δείγμα το οποίο μελετάται να είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού όπως επίσης να είναι και μεγάλης κλίμακας. Για τον λόγο αυτόν προτείνεται η χρήση πραγματικών δεδομένων, από διάφορους επιστημονικούς κλάδους, κατάλληλα επιλεγμένων, μεγάλου όγκου, τα οποία να αναλυθούν με χρήση ψηφιακών εργαλείων.

Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές θα διατυπώσουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού. Κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας πλέον και οριακές τιμές, για να περιγράψουν τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού. Για τη κατασκευή των θηκογραμμάτων δημιουργείται ένα ορθογώνιο πλαίσιο με βάσεις το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. Ενδιάμεσα τοποθετείται με τη βοήθεια ενός ευθύγραμμου τμήματος η διάμεσος. Από τα μέσα των βάσεων αναπτύσσονται γραμμές οι οποίες συνδέουν τις **οριακές τιμές** των παρατηρήσεων. Οι δύο οριακές τιμές ορίζονται ως το τρίτο (αντίστοιχα το πρώτο) τεταρτημόριο συν (αντίστοιχα μείον) 1.5 φορές το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Αν δεν υπάρχουν παρατηρήσεις τόσο απομακρυσμένες, οι οριακές τιμές είναι η μέγιστη (αντίστοιχα η ελάχιστη παρατήρηση). Σε αντίθετη περίπτωση, οι έκτροπες τιμές που υπερβαίνουν τις δύο οριακές τιμές (αν υπάρχουν) παριστάνονται με κουκκίδες στο θηκόγραμμα. Με τη βοήθεια των θηκογραμμάτων οι μαθητές κάνουν συγκρίσεις και εξάγουν κάποια πρώτα συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού. Αναφορικά με τα μέτρα μεταβλητότητας πλέον προσδιορίζουν και τη διασπορά και την τυπική απόκλιση ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις. Επιπλέον, προσδιορίζουν τον συντελεστή μεταβλητότητας των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού και αναγνωρίζουν τη χρησιμότητά του σε περιπτώσεις σύγκρισης μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης. Έχοντας πλέον διδαχθεί οι μαθητές αρκετά «εργαλεία» για υπολογισμό μέτρων θέσης και μεταβλητότητας είναι σημαντικό να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν ποια από αυτά επηρεάζονται από απόμακρες τιμές και να επιλέγουν κατάλληλα.

Στην Β΄ Λυκείου οι μαθητές θα διατυπώσουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Οργανώνουν τα δεδομένα σε πίνακες συνάφειας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων διπλής εισόδου και ερμηνεύουν τις τελευταίες ως πιθανότητες τομής δύο ενδεχομένων. Από τον πίνακα συνάφειας διπλής εισόδου, αθροίζοντας ως προς τις γραμμές ή τις στήλες, υπολογίζουν τις περιθώριες συχνότητες και εν συνεχεία τις αντίστοιχες περιθώριες σχετικές συχνότητες. Εν συνεχεία, υπολογίζουν τις σχετικές συχνότητες για κάθε πιθανή στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού δεσμεύοντας κάθε φορά ως προς μία στάθμη του άλλου κατηγορικού χαρακτηριστικού και τις ερμηνεύουν ως δεσμευμένες πιθανότητες. Τέλος, κατασκευάζουν στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων, από τα οποία εξάγουν κάποια πρώτα συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δύο κατηγορικών μεταβλητών.

Στην Γ΄ Λυκείου οι μαθητές θα διατυπώσουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Με βάση το ερευνητικό ερώτημα που διαθέτουν, ονομάζουν το ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό σε μεταβλητή απόκρισης και το άλλο σε επεξηγηματική μεταβλητή και αντιλαμβάνονται τη διαφοροποίησή τους στο υπό μελέτη πρόβλημα. Επιπλέον, κατασκευάζουν το διάγραμμα διασποράς των τιμών των δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών, τοποθετώντας στον yy’ άξονα τις τιμές της μεταβλητής απόκρισης και στον xx’ άξονα τις τιμές της επεξηγηματικής μεταβλητής. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς διερευνούν την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση. Επιπρόσθετα, ως ένα ποσοτικό μέτρο υπολογισμού γραμμικής συσχέτισης, υπολογίζουν την τιμή του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson και σχολιάζουν την ύπαρξη και το είδος (θετική ή αρνητική) της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών των δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών ανάλογα με την τιμή του. Τιμές κοντά στη μονάδα υποδηλώνουν θετική γραμμική συσχέτιση, τιμές κοντά στο μείον ένα υποδηλώνουν αρνητική γραμμική συσχέτιση, ενώ τέλος τιμές κοντά στο μηδέν υποδηλώνουν έλλειψη γραμμικής συσχέτισης. Οι μαθητές, επίσης, προσδιορίζουν την ευθεία παλινδρόμησης για το απλό γραμμικό μοντέλο, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και σχολιάζουν εποπτικά την προσαρμογή της. Ερμηνεύουν με απλά λόγια τις τιμές των συντελεστών της ευθείας παλινδρόμησης και εξοικειώνονται με την έννοια της πρόβλεψης της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς. Τέλος, οι μαθητές για πρώτη φορά χρησιμοποιούν πιο σύντομες μορφές, με χρήση του συμβόλου του αθροίσματος, για να αναπαραστήσουν τη μέση τιμή και διασπορά των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού. Οι εν λόγω αναπαραστάσεις είναι χρήσιμες σε περιπτώσεις όπου το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο.

Όπως και στο Γυμνάσιο, είναι σημαντικό να μην δίνεται έμφαση στον υπολογισμό στατιστικών δεικτών από μαθηματικούς τύπους. Αντίθετα, θα πρέπει να δίνεται βάρος στην ερμηνεία των στατιστικών δεικτών ή στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τους στατιστικούς δείκτες από γραφικές αναπαραστάσεις των δεδομένων. Όταν απαιτείται ο υπολογισμός στατιστικών δεικτών, συνιστάται η χρήση ψηφιακών εργαλείων.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με την στατιστική μπορεί να σχετίζονται με:

- *Ενότητα «Διαχείριση δεδομένων»*
    - **Α' Λυκείου:** Με την βοήθεια των θηκογραμμάτων οι μαθητές να είναι σε θέση να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές του ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού. Στα θηκογράμματα πλέον γίνεται χρήση και των οριακών τιμών ώστε να είναι εμφανείς οι έκτροπες τιμές που ίσως υπάρχουν.
    - **Β' Λυκείου:** Οι μαθητές να ερμηνεύουν τις σχετικές συχνότητες ενός πίνακα συνάφειας διπλής εισόδου ως πιθανότητες τομής δύο ενδεχομένων. Επιπλέον, να κατανοούν τον μηχανισμό υπολογισμού των **περιθωρίων συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.** Είναι σημαντικό να κατανοήσουν πως από τον πίνακα συνάφειας διπλής εισόδου εύκολα μπορούν να υπολογίσουν περιθώριες συχνότητες και σχετικές συχνότητες, ενώ το αντίστροφο δεν είναι εφικτό, παρά μόνο αν τα δύο χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα. Τέλος να είναι σε θέση να υπολογίσουν **τις σχετικές συχνότητες για κάθε πιθανή στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού** δεσμεύοντας κάθε φορά ως προς μία στάθμη του άλλου κατηγορικού χαρακτηριστικού και να τις ερμηνεύουν ως δεσμευμένες πιθανότητες.
    - **Γ' Λυκείου:** Με βάση το ερευνητικό ερώτημα που διαθέτουν, στο οποίο εμπλέκονται δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά, οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη διαφοροποίησή της μεταβλητής απόκρισης από την επεξηγηματική μεταβλητή στο υπό μελέτη πρόβλημα.
- *Ενότητα «Μέτρα θέσης-μεταβλητότητα»*
    - **Α' Λυκείου:** Οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα του συντελεστή μεταβλητότητας στη σύγκριση μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων διαφορετικών μονάδων μέτρησης. Επιπλέον να αναγνωρίζουν πως επηρεάζονται τα μέτρα μεταβλητότητας (διασπορά και ενδοτεταρτημοριακό εύρος) από την ύπαρξη απόμακρων τιμών.
    - **Α' Λυκείου:** Οι μαθητές να *επιλέγουν* ***κατάλληλα μέτρα θέσης και μέτρα μεταβλητότητας*** *ποσοτικών δεδομένων ανάλογα με την ύπαρξη απόμακρων τιμών.*
    - **Α' Λυκείου:** Οι μαθητές προσδιορίζουν τη **διασπορά** και την **τυπική απόκλιση** ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιώντας τετραγωνικές και απόλυτες αποκλίσεις. Επιπλέον να μπορούν να αντιληφθούν τη διαφορά της διασποράς υπολογισμένης ως απόλυτης απόκλισης από τη διασπορά υπολογισμένης ως τετραγωνική απόκλιση και την επίδραση που έχουν στις δύο αυτές μορφές οι απόμακρες τιμές. Οι εν λόγω διασπορές μπορούν πλέον

να ερμηνευτούν ως μέσες τετραγωνικές ή μέσες απόλυτες αποκλίσεις των παρατηρήσεων από την μέση τιμή.

- **Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν πιο σύντομες μορφές, με χρήση του συμβόλου του αθροίσματος, για να αναπαραστήσουν τη μέση τιμή και διασπορά των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού.

➢ *Ενότητα* «Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών»

- **Α' - Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να μπορούν να ανακαλύπτουν και να εξηγούν με παραδείγματα ότι δύο χαρακτηριστικά δεν διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού αν σχετίζονται.

- **Β' Λυκείου:** Οι μαθητές να ερμηνεύουν τις τιμές των πινάκων συνάφειας σχετικών συχνοτήτων και υπό δέσμευση σχετικών συχνοτήτων διπλής εισόδου ως πιθανότητες τομής δύο ενδεχομένων και δεσμευμένες πιθανότητες αντίστοιχα. Με την βοήθεια των στοιβαγμένων ραβδογραμμάτων συχνοτήτων και ομαδοποιημένων ραβδογραμμάτων σχετικών συχνοτήτων να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δύο κατηγορικών μεταβλητών. Το παράδοξο του *Simpson* μπορεί να παρουσιάσει στους μαθητές τι είδους προβλήματα προκύπτουν από το συνδυασμό δεδομένων από διάφορες ομάδες.

- **Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να αντιλαμβάνονται διαισθητικά την έννοια της γραμμικής συσχέτισης δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού καθώς και τη χρησιμότητά της. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς να αποφαίνονται εποπτικά αν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και να διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση.

- **Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να μπορούν να ερμηνεύσουν με απλά λόγια τις τιμές των συντελεστών της ευθείας παλινδρόμησης στο υπό μελέτη πρόβλημα. Στις ερμηνείες τους είναι σημαντικό να δίνουν την πλήρη περιγραφή των δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών και να χρησιμοποιούν τις μονάδες μέτρησης αυτών, απαντώντας εν τέλει στο αρχικό ερευνητικό τους ερώτημα.

- **Γ' Λυκείου:** Οι μαθητές να εξοικειωθούν με την έννοια της πρόβλεψης, με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο, της τιμής της μεταβλητής απόκρισης για δοσμένη τιμή της επεξηγηματικής μεταβλητής και να αναγνωρίσουν τυχόν περιορισμούς. Δεν θα πρέπει λόγου χάρη να προβαίνουν σε προβλέψεις για τιμές της επεξηγηματικής μεταβλητής που βρίσκονται εκτός των τιμών που έχουν συλλεχθεί.

    - **Α' - Γ' Λυκείου:** Οι ερμηνείες και εδώ πρέπει να παίζουν μείζονα ρόλο. Για παράδειγμα στην ενότητα της απλής γραμμικής παλινδρόμησης, σκοπός δεν είναι οι μαθητές να απομνημονεύσουν τους τύπους που δίνουν τους δύο εκτιμώμενους συντελεστές του μοντέλου και εν συνεχεία αυτούς τους τύπους να τους εφαρμόσουν σε πραγματικά δεδομένα, αλλά να μπορούν να ερμηνεύσουν ορθά τις τιμές που προκύπτουν, να σχολιάσουν με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς την προσαρμογή της ευθείας, και να είναι σε θέση να προβούν σε προβλέψεις στο εύρος των τιμών που έχουν παρατηρηθεί. Για την προσαρμογή του μοντέλου προτείνετε η χρήση ψηφιακών εργαλείων.

(2) Πιθανότητες

Οι μαθητές φτάνουν στο Λύκειο έχοντας εξοικειωθεί στις προηγούμενες βαθμίδες με τον κλασικό ορισμό της Πιθανότητας, με απλούς κανόνες λογισμού, όπως ο απλός προσθετικός νόμος, και με εισαγωγικές έννοιες της συνδυαστικής ανάλυσης, όπως η βασική αρχή απαρίθμησης. Έχουν εξερευνήσει πειραματικά τον νόμο των μεγάλων αριθμών και μπορούν να καταλάβουν ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου μετά από πολλές επαναλήψεις του πειράματος τύχης είναι πολύ κοντά στην πιθανότητα του ενδεχομένου. Το τελευταίο αποτέλεσμα πολύ συχνά χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει κανείς την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως τη σχετική συχνότητα που θα προέκυπτε μετά από άπειρες επαναλήψεις του πειράματος τύχης. Αυτή η ερμηνεία της πιθανότητας είναι περιοριστική αφού ούτε άπειρες φορές μπορούμε να επαναλάβουμε απλά πειράματα τύχης, ούτε μπορούμε όλα τα ενδιαφέροντα πειράματα τύχης να τα εκτελέσουμε στην πράξη. Έτσι για παράδειγμα, δεν μπορούμε να δώσουμε νόημα στην ερώτηση «ποια είναι η πιθανότητα να πλημμυρίσει ο Δούναβης την επόμενη εβδομάδα» ή «ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσετε το δώρο που κληρώνει ο αγαπημένος σας ραδιοφωνικός σταθμός ανάμεσα στους ακροατές του».

Η ερμηνεία που θέλουμε να καλλιεργήσουμε στους μαθητές είναι αυτή της ***υποκειμενικής πιθανότητας***. Για κάθε πείραμα τύχης, πραγματικό ή νοητικό, που μας ενδιαφέρει, θέλουμε να φτιάξουμε ένα ***μαθηματικό μοντέλο***. Το μοντέλο αυτό θα πρέπει να περιγράφει τι μπορεί να συμβεί ως αποτέλεσμα του πειράματος τύχης και πόσο πιθανό θεωρούμε να συμβεί κάθε τι που μπορεί να συμβεί. Τον πρώτο σκοπό επιτελεί ο δειγματικός χώρος και τον δεύτερο η πιθανότητα, μια συνάρτηση που σε κάθε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου αντιστοιχεί έναν αριθμό στο [0,1] ο οποίος **αντανακλά την πεποίθησή μας** για το πόσο βέβαιο θεωρούμε να συμβεί το ενδεχόμενο.

Διαφορετικοί άνθρωποι μπορεί να αποδίδουν διαφορετική πιθανότητα στο ίδιο ενδεχόμενο. Όπως και αν αποδίδουμε πιθανότητες στα ενδεχόμενα όμως, υπάρχει ένα σύνολο από κανόνες που πρέπει να σεβόμαστε. Αυτοί οι κανόνες λογισμού είναι τόσο απλοί και διαισθητικοί που οι μαθητές μπορούν με μικρή βοήθεια να τους μαντέψουν. Επιπλέον, αν δεχθούμε 3 από αυτούς ως αξιώματα, όλοι οι υπόλοιποι μπορούν να αποδειχθούν.

Αυτός είναι ο αξιωματικός ορισμός των Πιθανοτήτων. Ένας τρόπος απόδοσης πιθανότητας στα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου που σέβεται τα 3 αξιώματα των Πιθανοτήτων.

Στα περισσότερα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν στο σχολείο, το ίδιο το πείραμα τύχης που θέλουμε να μελετήσουμε, σε συνδυασμό με τους κανόνες λογισμού που οφείλουμε να σεβαστούμε, επιβάλλει το πώς θα αποδώσουμε πιθανότητες. Ας πούμε για παράδειγμα ότι θέλουμε να μοντελοποιήσουμε το ρίξιμο ενός συνηθισμένου ζαριού και θεωρούμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Αν θεωρούμε ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο, στα έξι μονοσύνολα του Ω πρέπει να αποδώσουμε την ίδια πιθανότητα p και από τον προσθετικό νόμο και το γεγονός ότι $P[\Omega]=1$ προκύπτει ότι $p=1/6$. Από τον προσθετικό νόμο προκύπτει ακόμα ότι για οποιοδήποτε A υποσύνολο του Ω θα πρέπει $P[A]=|A|/6$.

Ο αξιωματικός ορισμός γενικεύει τον κλασικό ορισμό που οι μαθητές χρησιμοποιούσαν στο Γυμνάσιο και τους επιτρέπει να θεωρούν δειγματικούς χώρους με εκβάσεις που δεν είναι απαραίτητα ισοπίθανες.

Ένα συνηθισμένο διδακτικό λάθος είναι ο υπερβολικός τονισμός της σημασίας του δειγματικού χώρου και η καλλιέργεια της εσφαλμένης αντίληψης ότι ο δειγματικός χώρος είναι μονοσήμαντα καθορισμένος από το πείραμα τύχης. Η επιλογή του δειγματικού χώρου είναι στην πραγματικότητα σε μεγάλο βαθμό στην ευχέρειά μας. Αν στρίψουμε ένα συνηθισμένο κέρμα 4 φορές και μας ενδιαφέρει το πλήθος των κεφαλών που φέραμε, μπορούμε εξίσου καλά να θεωρήσουμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο $Ω_1=\{Κ,Γ\}^4$ ή το σύνολο $Ω_2=\{0,1,2,3,4\}$. Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να αποδώσουμε πιθανότητα 1/16 σε κάθε στοιχείο του $Ω_1$. Στη δεύτερη περίπτωση, θα πρέπει να αποδώσουμε πιθανότητα 1/16 στα στοιχεία 0 και 4 του $Ω_2$, πιθανότητα 1/4 στα στοιχεία 1 και 3 και πιθανότητα 3/8 στο στοιχείο 2. Ένα ακόμα παράδειγμα περιγράφεται παρακάτω, στο 1ο έργο Πιθανοτήτων της Α' Λυκείου.

Στη Β' Λυκείου οι μαθητές εξελίσσουν τις γνώσεις τους στη συνδυαστική ανάλυση μαθαίνοντας τεχνικές απαρίθμησης για διατάξεις με ή χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς. Οι δεξιότητες αυτές δίνουν στους μαθητές την ευχέρεια να λύνουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου και του άμεσου ενδιαφέροντός τους. Τέτοια παραδείγματα δίνονται στα έργα Πιθανοτήτων της Β' Λυκείου. Τα προβλήματα συνδυαστικής που μπορεί να διατυπώσει κανείς μπορούν εύκολα να ξεφύγουν υπερβολικά σε βαθμό δυσκολίας αλλά κάτι τέτοιο θα πρέπει να αποφεύγεται.

Στη Β' Λυκείου οι μαθητές εισάγονται στην κανονική κατανομή, η οποία έχει εξέχουσα σημασία στα Στοχαστικά Μαθηματικά γιατί αποτελεί ένα καλό μοντέλο για την περιγραφή πολλών χαρακτηριστικών στον φυσικό κόσμο. Η κανονική κατανομή χαρακτηρίζεται από 2 παραμέτρους, τη μέση της τιμή, μ, και τη διασπορά της $σ^2$. Με βάση αυτές τις παραμέτρους μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα ώστε η τιμή του χαρακτηριστικού να βρίσκεται σε κάποιο διάστημα. Μια συνηθισμένη παρανόηση είναι να συγχέονται οι παράμετροι μ και $σ^2$ της κατανομής με τη δειγματική μέση τιμή, $\overline{x}$, και τη δειγματική διασπορά, $\overline{s}$, αντίστοιχα, σε ένα δείγμα από έναν πληθυσμό με αυτήν την κατανομή. Οι αντίστοιχες ποσότητες είναι κατά προσέγγιση ίσες, με την προϋπόθεση το δείγμα να είναι μεγάλο και αντιπροσωπευτικό. Δεν θα ήταν όμως ακριβές να πούμε ότι σε ένα δείγμα μεγέθους 40, τα 38 άτομα (95%) έχουν τιμή του χαρακτηριστικού στο διάστημα $(\overline{x}-1{,}96\overline{s},\overline{x}+1{,}96\overline{s})$.

Η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας είναι λεπτή και συχνά οι μαθητές τη συγχέουν με την πιθανότητα της τομής. Ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας εισάγεται στη Β' Λυκείου και χρησιμοποιείται στο αντίστοιχο κομμάτι της Στατιστικής. Ένα πρόβλημα που προτείνεται να συζητηθεί στην τάξη είναι το παρακάτω. «Έχετε στρίψει 10 φορές ένα αμερόληπτο κέρμα. Με δεδομένο ότι έχετε φέρει ΚΚΚΓΚΚΚΚΓΚ, να υπολογίσετε την πιθανότητα να φέρετε κεφαλή, αν στρίψετε το κέρμα ακόμα μία φορά». Ενθαρρύνετε τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν για την άποψή τους, θυμίζοντάς τους όμως, αν χρειαστεί, πως γνωρίζουμε ότι το κέρμα είναι αμερόληπτο και αυτό δεν είναι υπό αμφισβήτηση και εξηγώντας ότι οι 8 κεφαλές έτυχε να εμφανιστούν στο πλαίσιο της φυσιολογικής μεταβλητότητας των αποτελεσμάτων. Η σωστή απάντηση προκύπτει με εφαρμογή του ορισμού. Αλλάξτε το αποτέλεσμα στα πρώτα 10 στριψίματα σε οποιοδήποτε άλλο και επαναλάβετε, ώστε οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι η πιθανότητα να φέρουμε κορώνα στο 11ο στρίψιμο είναι ίδια, ανεξαρτήτως αποτελέσματος στα 10 πρώτα στριψίματα. Το παράδειγμα αυτό είναι το αρχέτυπο για την έννοια της ανεξαρτησίας που θα συναντήσουν στη Γ' Λυκείου.

Στη Γ’ Λυκείου, η υποκειμενική ερμηνεία της πιθανότητας προσφέρει καλύτερη κατανόηση της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας. Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας $P[A|B]$ ότι ο τρόπος που αποδίδουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες, αντιστοιχίζοντας στο ενδεχόμενο A την $P[A|B]$, ικανοποιεί τα αξιώματα του ορισμού. Αυτή η δεσμευμένη πιθανότητα εκφράζει τον τρόπο με τον οποίον πρέπει να επικαιροποιήσουμε το αρχικό μας μοντέλο, ώστε να ενσωματώσουμε την πληροφορία ότι το ενδεχόμενο B συνέβη.

Με αυτή την ερμηνεία μπορούμε τώρα να μοντελοποιήσουμε μαθηματικά και την έννοια της ανεξαρτησίας ενδεχομένων, όπως την εννοούμε στη φυσική γλώσσα. Συγκεκριμένα λέγοντας ότι το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο από το B, εννοούμε ότι το πόσο πιθανό θεωρούμε το A δεν επηρεάζεται από το αν συνέβη το B. Με μαθηματικό φορμαλισμό αυτό σημαίνει ακριβώς ότι $P[A|B]=P[A]$. Έτσι έχουμε φτάσει σε έναν μαθηματικό ορισμό για την ανεξαρτησία. Είναι συνηθισμένο λάθος να συγχέουν οι μαθητές ανεξάρτητα και ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και η διάκριση των όρων θα πρέπει να ξεκαθαρίζεται.

Το θεώρημα της ολικής πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes είναι ευέλικτα μαθηματικά εργαλεία που επιτρέπουν να υπολογίζουμε πιθανότητες και δεσμευμένες πιθανότητες ενδεχομένων σε πολύ γενικές καταστάσεις από τον πραγματικό κόσμο. Είναι επομένως σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να μοντελοποιούν μαθηματικά προβλήματα διατυπωμένα στη φυσική γλώσσα, έτσι ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν τη μαθηματική τεχνολογία που γνωρίζουν για να τα λύσουν. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δίνεται στο 2ο έργο Πιθανοτήτων της Γ’ Λυκείου.

3. Ενδεικτικά έργα

Έργο 1 (Α’ Λυκείου, Στατιστική)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	***Ειδικά***	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης) Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση, συστηματοποίηση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Μεταβολή, Σύγκριση) Επίλυση	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Ενότητα	Στατιστική				
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή, μεταβολή				

			Προβλήματος/ εφαρμογή (εξήγηση, τεκμηρίωση)		
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Συλλογισμός/επιχειρηματολογία	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου	***Προτεινόμενοι πόροι***	-
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον προσωπικό και κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός				
		Συγκείμενο	Προσωπικό και Κοινωνικό		

Το Nystagram είναι ένα δημοφιλές μέσο κοινωνικής δικτύωσης. Στον παρακάτω πίνακα καταγράφουμε τον αριθμό των ακολούθων 11 χρηστών του.

χρήστης	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Αρ. ακολούθων	57	40	103	234	93	53	116	98	108	121	22

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος και να ερμηνεύσετε τις τιμές τους. Στη συνέχεια αφαιρούμε τον 4^{ο} χρήστη από το δείγμα μας. Να υπολογίσετε εκ νέου τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος και να συγκρίνετε τις νέες τιμές με τις αρχικές των μέτρων. Τι παρατηρείτε;
β) Να συγκρίνετε την τυπική απόκλιση του δείγματος καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος στα δύο δείγματα (με και χωρίς τον 4^{ο} χρήστη).
γ) Να συζητήσετε στο τμήμα σας πώς επηρεάζουν οι απόμακρες τιμές, τα μέτρα θέσης του **α)** ερωτήματος και τα μέτρα μεταβλητότητας του **β)** ερωτήματος.
δ) Αποφασίζετε με τους/τις συμμαθητές/τριες να κάνετε την ακόλουθη μικρή έρευνα στο τμήμα σας. Επιλέξτε το αγαπημένο σας μέσο κοινωνικής δικτύωσης, καταγράψτε φίλους ή ακόλουθους και υπολογίστε τα στατιστικά μέτρα των ερωτημάτων **α)** και **β)**. Στη συνέχεια αφαιρέστε από το δείγμα σας την παρατήρηση με τη μεγαλύτερη τιμή και υπολογίστε εκ νέου τα παραπάνω στατιστικά μέτρα. Παρουσιάστε στο τμήμα μας μια σύντομη έκθεση για τα συμπεράσματα της έρευνάς σας.

Διδακτική διαχείριση: Σκοπός των τριών πρώτων ερωτημάτων είναι οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν πως οι απόμακρες τιμές επηρεάζουν μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και να είναι σε θέση σε τέτοιες περιπτώσεις να επιλέγουν κατάλληλα μέτρα. Παρατηρούν λοιπόν πως ενώ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση επηρεάζονται από τις απόμακρες τιμές, κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Στο ερώτημα δ) χρησιμοποιείται μια περίπτωση δείγματος που έχει αφαιρεθεί η απόμακρη τιμή και μια περίπτωση δείγματος που δεν έχουν αφαιρεθεί οι απόμακρες τιμές. Οι μαθητές/τριες χωρίζονται σε ομάδες και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της έρευνας στην ολομέλεια του τμήματός τους.

Έργο 2 (Α' Λυκείου, Πιθανότητες)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στοχαστικά Μαθηματικά</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης)
Μετασχηματιστικές δράσεις (συστηματοποίηση)
Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Σύγκριση, γενίκευση)
Επίλυση Προβλήματος/εφαρμογή (εξήγηση, τεκμηρίωση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων)</td><td rowspan="4">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="4">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη Διδασκαλία, ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Πιθανότητες</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Γενίκευση</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Συλλογισμός/ επιχειρηματολογία, Μοντελοποίηση</td><td rowspan="2">Γενικά</td><td rowspan="2">Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές</td><td rowspan="2">Ερμηνεία καταστάσεων στον προσωπικό βίο</td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Συγκείμενο</td><td>προσωπικό</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Παρακάτω περιγράφεται ένα παιχνίδι με αμερόληπτο κέρμα για δύο παίκτες, την Άννα και το Βασίλη.

α) Η Άννα στρίβει το κέρμα 2 φορές και στη συνέχεια στρίβει το κέρμα 1 φορά ο Βασίλης. Η Άννα κερδίζει αν φέρνει αυστηρά περισσότερες κεφαλές (Κ) από το Βασίλη. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει ο Βασίλης. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα;

β) Αν η Άννα στρίβει το κέρμα 3 φορές και ο Βασίλης 2 με τον ίδιο κανόνα για το νικητή, ποια θα ήταν η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα;

γ) Αν η Άννα στρίψει το κέρμα ν+1 φορές και ο Βασίλης ν, διατυπώστε μια εικασία για την απάντηση και προσπαθήστε να την υποστηρίξετε.

Διδακτική διαχείριση: Το έργο αυτό αναδεικνύει ότι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης δεν είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένος και ότι η ακριβής περιγραφή του δεν είναι εν τέλει σημαντική για να απαντήσουμε πιθανοθεωρητικά ερωτήματα. Θα μπορούσε π.χ. κανείς να θεωρήσει στο (α) ως δειγματικό χώρο τον $Ω=\{Κ,Γ\}^3$ και να αποδώσει πιθανότητα 1/8 σε κάθε έκβαση. Εξίσου καλά, θα μπορούσε να θεωρήσει ως δειγματικό χώρο το $Ω=\{0,1,2\}x\{0,1\}$, αντιστοιχίζοντας το στοιχείο (μ,ν) στο αποτέλεσμα όπου η Άννα φέρνει μ κεφαλές και ο Βασίλης ν. Με αυτή την επιλογή, θα έπρεπε για παράδειγμα να αποδώσει κανείς στην έκβαση (2,0) πιθανότητα 1/4 x 1/2=1/8, ενώ θα έπρεπε να αποδώσει στην έκβαση (1,1) πιθανότητα 1/2 x 1/2 =1/4. Το αποτέλεσμα είναι φυσικά το ίδιο, ανεξαρτήτως επιλογής. Για το γ) υπάρχουν τρόποι διαχείρισης (π.χ. διωνυμική κατανομή) που μπορούν να οδηγήσουν σε πράξεις οι οποίες δεν είναι διαχειρίσιμες από έναν μαθητή. Αξίζει να ενθαρρύνετε τους μαθητές σας να δοκιμάσουν επιχειρήματα συμμετρίας. Η απλούστερη λύση είναι ότι αν συμβολίσουμε με $Κ_Α$ το πλήθος των κεφαλών της Άννας και αντίστοιχα ορίσουμε τα $Κ_Β$, $Γ_Α$,$Γ_Β$, τότε $Ω=\{Κ_Α>Κ_Β\}U\{Γ_Α>Γ_Β\}$ με τα δύο ενδεχόμενα να είναι ξένα μεταξύ τους και να έχουν την ίδια πιθανότητα αφού το κέρμα είναι αμερόληπτο.

Έργο 3 (Β' Λυκείου, Στατιστική)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στοχαστικά Μαθηματικά</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης)
Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση, οπτικοποίηση, αναπαράσταση)
Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (ομαδοποίηση, Μεταβολή, Σύγκριση)
Επίλυση</td><td rowspan="3">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη Διδασκαλία, πολλαπλά σημεία 'εισόδου', ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Στατιστική</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή, Μεταβολή, Μετασχηματισμοί</td></tr>
</table>

			Προβλήματος/εφαρμογή (υπόθεση, αμφισβήτηση, εξήγηση, τεκμηρίωση)		προσβάσιμο σε όλους
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Μαθηματική επικοινωνία, οπτικοποίηση, μεταγνωστική ενημερότητα	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου, τα μαθηματικά ως ανθρώπινη αξία-κουλτούρα	***Προτεινόμενοι πόροι***	-
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, απόδοση αξιών στους άλλους και στα επιχειρήματά τους, λήψη αποφάσεων με διάλογο	***Συγκείμενο***	Κοινωνικό		

Σε μια μελέτη που αφορά τη χρήση ζώνης ασφαλείας από οδηγούς ηλικίας 18 – 24 ετών συλλέχθηκε πληροφορία από 198 οδηγούς αναφορικά με το φύλο (χαρακτηριστικό Α) τους και το αν είχαν ή όχι κάποιο τροχαίο ατύχημα τα τελευταία πέντε χρόνια (χαρακτηριστικό Β). Τα δεδομένα της έρευνας δίνονται στον επόμενο πίνακα συνάφειας συχνοτήτων.

		Τροχαίο Ατύχημα (Β)		
		Ναι	**Όχι**	**Σύνολο**
Φύλο (Α)	**Άνδρες**	**69**	**58**	**127**
	Γυναίκες	**27**	**44**	**71**
	Σύνολο	**96**	**102**	**198**

α) Να εξετάσετε την ύπαρξη εξάρτησης μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών Α και Β του προβλήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλο πίνακα συνάφειας συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων ως προς το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος ή ως προς το πλήθος των παρατηρήσεων του χαρακτηριστικού Α ή ως προς το πλήθος των παρατηρήσεων του χαρακτηριστικού Β.

β) Να επιλέξετε κατάλληλο διάγραμμα για να αναπαραστήσετε τις σχετικές συχνότητες των πινάκων συνάφειας που χρησιμοποιήσατε στο **α)** ερώτημα.
γ) Συζητήστε στην ομάδα σας και γράψτε ένα μικρό κείμενο με τα συμπεράσματά σας σχετικά με την ύπαρξη ή μη συσχέτισης μεταξύ του φύλου και της εμπλοκής σε τροχαίο ατύχημα. Στη συνέχεια, συζητήστε στην ολομέλεια του τμήματος, τα πλεονεκτήματα των διαφορετικών προτάσεων των ομάδων.

Διδακτική διαχείριση: Για όλο το μαθηματικό έργο, ο εκπαιδευτικός χωρίζει τους/τις μαθητές/τριες του τμήματος του σε ολιγομελείς ομάδες και κάθε μια από αυτές χρησιμοποιεί έναν τρόπο από το α) ερώτημα και συνεχίζει στα επόμενα ερωτήματα με βάση τον πίνακα που επέλεξαν. Το ερώτημα (γ) είναι το σημαντικότερο όπου οι μαθητές/τριες συζητούν τα ευρήματά τους και σχολιάζουν αν τα δύο χαρακτηριστικά πράγματι θεωρούν πως διέπονται από μια σχέση αιτίας-αιτιατού.

Έργο 4 (Β' Λυκείου, Πιθανότητες)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στοχαστικά Μαθηματικά</td><td rowspan="3">Ειδικά</td><td rowspan="3">Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης)
Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση)
Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (σύγκριση, επέκταση)
Επίλυση Προβλήματος/ εφαρμογή (εξήγηση, τεκμηρίωση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων)</td><td rowspan="3">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</td><td rowspan="3">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη Διδασκαλία, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Πιθανότητες</td></tr>
<tr><td>Μεγάλες Ιδέες</td><td>Μαθηματική δομή</td></tr>
<tr><td>Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές</td><td>Συλλογισμός/επιχειρηματολογία, Μαθηματική επικοινωνία Δημιουργία συνδέσεων, Μεταγνωστική ενημερότητα</td><td>Γενικά</td><td>Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του</td><td>Προτεινόμενοι πόροι</td><td>-</td></tr>
</table>

Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, ανάπτυξη πνεύματος περιέργειας και αγάπης για τα μαθηματικά		κόσμου		
		Συγκείμενο	προσωπικό		

Τι από τα παρακάτω είναι πιθανότερο;

- να κερδίσετε στο τζόκερ έχοντας συμπληρώσει μία στήλη,
- ή να καλέσετε στο τηλέφωνο έναν φίλο ή μία φίλη σας, γνωρίζοντας μόνο ότι ο κωδικός περιοχής του/της είναι 210 και επιλέγοντας τα υπόλοιπα επτά ψηφία στην τύχη.

Διδακτική διαχείριση: Το έργο αυτό, εκτός από τη σημασία του για την εξοικείωση των μαθητών με τις έννοιες της συνδυαστικής ανάλυσης, έχει σημασία και για να καλλιεργήσει στους μαθητές την ικανότητα να αποκτούν αίσθηση της τάξης μεγέθους της πιθανότητας σπάνιων ενδεχομένων, συνδέοντάς την με αντίστοιχα μικρές πιθανότητες με τις οποίες έχουν περισσότερο βιωματική σχέση. Το ερώτημα είναι άμεσο να απαντηθεί. Ζητήστε από τους μαθητές να χωριστούν σε μικρές ομάδες στην τάξη και να δοκιμάσουν να βρουν αντίστοιχες αναλογίες, π.χ. είναι πιο πιθανό να πιάσει κανείς 4+1 στο τζόκερ ή να πετύχει στην τύχη τον αριθμό του σταθερού τηλεφώνου μιας φίλης του στη Σαντορίνη που έχει κωδικό περιοχής 22860 και στη συνέχεια πέντε νούμερα; Οι δυνατότητες είναι ανεξάντλητες: π.χ. συγκρίνετε τις πιθανότητες να απαντήσει κανείς ολόσωστα απαντώντας τυχαία σε ένα διαγώνισμα με 35 ερωτήσεις πενταπλής επιλογής και να διαλέξουν δύο άνθρωποι τον ίδιο κόκκο άμμου από την έρημο Σαχάρα.

Έργο 5 (Γ’ Λυκείου Γενικής Παιδείας, Στατιστική)

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	***Ειδικά***	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης) Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Μεταβολή,	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Ενότητα	Στατιστική				
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή, Μεταβολή				

			συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες) Επίλυση Προβλήματος/ μοντελοποίηση (εξήγηση, τεκμηρίωση)		
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Μοντελοποίηση, συλλογισμός/επιχειρηματολογία, Μαθηματική επικοινωνία, μεταγνωστική ενημερότητα	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, ευελίξια μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου, μαθηματικά ως ανθρώπινη αξία	***Προτεινόμενοι πόροι***	Ψηφιακά εργαλεία (χρήση κατάλληλου λογισμικού, πχ Geogebra, excel,…)
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, Κατανόηση διαλεκτικής σχέσης ανάμεσα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού	***Συγκείμενο***	Κοινωνία		

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται δεδομένα σχετικά με το ποσοστό των ενηλίκων που χρησιμοποιούν το διαδίκτυο (Διαδίκτυο), το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν (ΑΕΠ) και το μέσο αριθμό παιδιών ανά ενήλικη γυναίκα (Γονιμότητα), για 39 χωρες.

α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson μεταξύ των μεταβλητών Διαδίκτυο και ΑΕΠ και να τον ερμηνεύσετε.

β) Να βρείτε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης θεωρώντας ως μεταβλητή απόκρισης τη μεταβλητή Διαδίκτυο και ως επεξηγηματική μεταβλητή, τη μεταβλητή Γονιμότητα. Να ερμηνεύσετε τις τιμές των συντελεστών παλινδρόμησης.

γ) Υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών ΑΕΠ και Γονιμότητας; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. Θεωρείτε ότι η πληροφορία από αυτό το ερώτημα επηρεάζει τις απαντήσεις σας στο δεύτερο ερώτημα.

Διαδίκτυο	ΑΕΠ	Γονιμό-τητα	Διαδίκτυο	ΑΕΠ	Γονιμό-τητα	Διαδίκτυο	ΑΕΠ	Γονιμό-τητα
0.65	6.09	2.8	37.36	25.35	1.4	0.34	1.89	5.1
10.08	11.32	2.4	13.21	17.44	1.3	2.56	3.84	3.2
37.14	25.37	1.7	0.68	2.84	3.0	2.93	7.10	1.1
38.7	26.73	1.3	1.56	6.00	2.3	1.34	13.33	4.5
31.04	25.52	1.7	23.31	32.41	1.9	6.49	11.29	2.6
4.66	7.36	2.2	27.66	19.79	2.7	18.27	20.15	1.2
46.66	27.13	1.5	38.42	25.13	1.3	51.63	24.18	1.6
20.14	9.19	2.4	27.31	8.75	2.9	30.70	28.10	1.4
2.57	4.02	1.8	3.62	8.43	2.5	6.04	5.89	2.4
42.95	29.00	1.8	49.05	27.19	1.7	32.96	24.16	1.6
0.93	3.52	3.3	46.12	19.16	2.0	50.15	34.32	2.1
43.03	24.43	1.7	0.10	0.85	5.4	1.24	2.07	2.3
26.38	23.99	1.9	46.38	29.62	1.8	0.09	0.79	7.0

Διδακτική διαχείριση: Σκοπός αυτού του έργου είναι η εμπέδωση του γεγονότος ότι η ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης ανάμεσα σε δύο μεταβλητές δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη αιτιώδη σχέση. Ζητήστε από τους μαθητές να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα στο (β) και προκαλέστε τους να συζητήσουν μεταξύ τους αν υπάρχει κάποιος λόγος για τον οποίον η αύξηση του μέσου αριθμού παιδιών επιφέρει μείωση του ποσοστού των ενηλίκων που χρησιμοποιούν το διαδίκτυο. Η συζήτηση θα πρέπει να καταλήξει στο συμπέρασμα πως η μεταβλητή ΑΕΠ είναι ένας συγχυτικός παράγοντας, μιας και σχετίζεται και με τις δύο άλλες μεταβλητές. Οι μαθητές/τριες μπορούν να χρησιμοποιήσουν κατάλληλο ψηφιακό εργαλείο για να απαντήσουν στα ερωτήματα.

Έργο 6 (Γ' Λυκείου προσανατολισμός, Πιθανότητες)

<table>
<tr><th colspan="2">ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th><th colspan="2">ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)</th></tr>
<tr><td>Πεδίο</td><td>Στοχαστικά Μαθηματικά</td><td rowspan="2">Ειδικά</td><td rowspan="2">Βασικές δράσεις (υπολογισμός, δήλωση</td><td rowspan="2">Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της</td><td rowspan="2">Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη</td></tr>
<tr><td>Ενότητα</td><td>Πιθανότητες</td></tr>
</table>

Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή, Μεταβολή		γεγονότων/διαπιστ ώσεων) Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Δομή, Μεταβολή, Σύγκριση, Επέκταση) Επίλυση Προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (Διατύπωση εικασίας, υπόθεση, μοντελοποίηση, τεκμηρίωση)	***διδακτικής προσέγγισης***	διδασκαλία - πολλαπλά σημεία 'εισόδου', ποικιλία προσεγγίσεων / στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Συλλογισμός/Επιχει ρηματολογία, μαθηματική επικοινωνία, μοντελοποίηση, επίλυση προβλήματος, μεταγνωστική ενημερότητα	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, ευελίξία μαθηματικού συλλογισμού, τα μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας αλλά και ως ανθρώπινη αξία	***Προτεινόμεν οι πόροι***	-
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, Κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στην ιατρική	***Συγκείμε νο***	Προσωπικό, επιστημονικό. κοινωνικό		

Μια εργαστηριακή εξέταση έχει σκοπό την ανίχνευση κατά τον προγεννητικό έλεγχο ενός πολύ σοβαρού νοσήματος στα έμβρυα. Το νόσημα είναι σπάνιο και εκτιμάται ότι εμφανίζεται με πιθανότητα p=1/50.000. Όπως συμβαίνει με κάθε εξέταση, το αποτέλεσμα της συγκεκριμένης εξέτασης μπορεί να μην είναι σωστό. Έχει βρεθεί ότι:

- αν ένα έμβρυο νοσεί, το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι αρνητικό (δηλαδή η εξέταση αποτυγχάνει να εντοπίσει το νόσημα) με πιθανότητα 1/10.000. Λέμε τότε ότι το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι *ψευδώς αρνητικό*.
- αν ένα έμβρυο είναι υγιές, το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό (δηλαδή η εξέταση δείχνει λανθασμένα ότι το έμβρυο νοσεί) με πιθανότητα 1/1.000. Λέμε τότε ότι το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι *ψευδώς θετικό*.

α) Ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί κάνει την εξέταση. Αν το αποτέλεσμα είναι θετικό, ποια είναι η πιθανότητα το έμβρυο πραγματικά να νοσεί και ποια είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα να οφείλεται σε σφάλμα της εξέτασης; Τι θα συστήνατε στο ζευγάρι;

β) Το ζευγάρι επαναλαμβάνει την εξέταση. Αν το αποτέλεσμα και της δεύτερης εξέτασης είναι θετικό, ποια είναι τώρα η πιθανότητα το έμβρυο πραγματικά να νοσεί;

γ) Η εξέταση αυτή παρέχεται δωρεάν από τα δημόσια νοσοκομείο και το κόστος της είναι 1 ευρώ ανά εξέταση. Μια εταιρεία έχει κατασκευάσει μια παρόμοια διαγνωστική εξέταση με πιθανότητα ψευδώς αρνητικού αποτελέσματος 1/1.000 και πιθανότητα ψευδώς θετικού αποτελέσματος 1/1.000.000. Η εταιρεία ισχυρίζεται ότι η νέα εξέταση δίνει πολύ σπανιότερα λάθος αποτέλεσμα και την κοστολογεί 100 ευρώ. Ποια εξέταση θα συμβουλεύατε τον/την Υπουργό Υγείας να επιλέξει;"

Διδακτική διαχείριση: Εκτός από τον προφανή στόχο του έργου να αναδείξει πώς μπορεί κανείς χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά να λύσει ενδιαφέροντα πραγματικά προβλήματα, ένας ακόμα βασικός στόχος που υπηρετεί το ερώτημα (β) είναι να αναδείξει τον ρόλο της δεσμευμένης πιθανότητας ως επικαιροποιημένη πεποίθηση. *Είναι χρήσιμο επομένως το ερώτημα (β) να προσεγγιστεί με δύο τρόπους: είτε θεωρώντας ότι για ένα υγιές έμβρυο η πιθανότητα 2 θετικών αποτελεσμάτων είναι* $(1/1.000)^2$ *είτε θεωρώντας ότι αμέσως πριν τη δεύτερη εξέταση, η πιθανότητα να νοσεί το έμβρυο είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να νοσεί με δεδομένο ότι η πρώτη εξέταση έδωσε θετικό αποτέλεσμα. Στο ερώτημα (γ) ενθαρρύνετε τους μαθητές να σκεφτούν και να συζητήσουν μεταξύ τους, υποστηρίζοντας τις απόψεις τους με επιχειρήματα. Ένας καλός σύμβουλος θα πρότεινε τη φθηνότερη εξέταση.*

4. Ενδεικτικό παράδειγμα μαθησιακής εξέλιξης σε όλες τις βαθμίδες

(1) Στατιστική

Στην ενότητα αυτή δίνεται ένα παράδειγμα για την εξέλιξη των ΠΜΑ στην υποενότητα «διατύπωση ερωτημάτων», της ενότητας «διαχείριση δεδομένων», που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία όλων των τάξεων τα ΠΜΑ**.**

Οι μαθητές συζητούν για τους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες και πραγματοποιούν μια έρευνα με αφορμή ερωτήματα όπως:

— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα:*** Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των μαθητών της τάξης τους; (Α΄ Δημοτικού)

— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά δεδομένα:*** Πόσες μπάλες ομαδικών αθλημάτων (π.χ. μπάσκετ, ποδοσφαίρου κλπ.) έχουν στο σπίτι τους; (Β΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά ή κατηγορικά δεδομένα:*** Πόσες χώρες κέρδισαν χάλκινα, ασημένια, χρυσά μετάλλια στους τελευταίους Ολυμπιακούς αγώνες; (Γ΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους:*** Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των κοριτσιών και των αγοριών της τάξης τους; (Δ΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα τα οποία ομαδοποιούνται***: Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της τάξης τους σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (Ε΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνδυασμό διακριτών ποσοτικών και κατηγορικών δεδομένων:*** Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της Γ΄ Δημοτικού και της ΣΤ΄ Δημοτικού σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (ΣΤ΄ Δημοτικού)
— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους:*** Ποιες ήταν οι επιδόσεις των μαθητών της τάξης τους στο αγώνισμα του μήκους; (Α’ Γυμνασίου)
— ***Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα:*** Πόσες χώρες έλαβαν μέρος στους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες (1896-σήμερα) και πόσες κέρδισαν μετάλλια; (Β΄ Γυμνασίου)
— ***Ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους:*** Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων; (Γ΄ Γυμνασίου)
— ***Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού:*** Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων αγοριών και κοριτσιών αθλητών/τριών στο αγώνισμα του μήκους; (Α΄ Λυκείου)
— ***Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:*** Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων αγοριών και κοριτσιών; (Β’ Λυκείου)
— ***Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:*** Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων στο αγώνισμα του μήκους και στο τριπλούν; (Γ’ Λυκείου)

(2) Πιθανότητες

Δίνουμε παρακάτω ένα παράδειγμα που αναδεικνύει την εξέλιξη των ΠΜΑ στις διάφορες βαθμίδες και τάξεις στην υποενότητα «Πιθανότητες ενδεχομένων» της ενότητας «Πειράματα τύχης και πιθανότητες».

Οι μαθητές πειραματίζονται με έναν κύβο ο οποίος έχει τρεις κόκκινες, δύο κίτρινες και μία πράσινη έδρα. Μπορούμε π.χ. να βάψουμε κόκκινες τις έδρες ενός ζαριού με ένδειξη 1-3, κίτρινες τις έδρες με ένδειξη 4-5 και πράσινη την έδρα με ένδειξη 6.

— **Περιγράφουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, αδύνατο:** Στην Α΄ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ότι το να φέρουν κόκκινο είναι πιθανό αλλά όχι βέβαιο, ενώ το να φέρουν μπλε είναι αδύνατο.

— **Συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους:** Στη Β΄ Δημοτικού μπορούν να απαντήσουν ότι το να φέρουν κόκκινο είναι πιο πιθανό από το να φέρουν πράσινο.

— **Συγκρίνουν τις πιθανότητες εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές**: Στη Γ΄ Δημοτικού οι μαθητές επιβεβαιώνουν με πειράματα ότι η κόκκινη έδρα εμφανίζεται πιο συχνά, αν επαναλάβουμε το ρίξιμο του κύβου αρκετές φορές.

— **Εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με εύρος από αδύνατο ενδεχόμενο έως βέβαιο ενδεχόμενο:** Στη Δ΄ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να τοποθετήσουν σε μια κλίμακα με εύρος από το αδύνατο ως το βέβαιο τις πιθανότητες να έρθει κόκκινο, κίτρινο ή πράσινο.

— **Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων) / (πλήθος δυνατών περιπτώσεων) και την αναπαριστούν σε κλίμακα από 0 έως 1:** Στην Ε΄ Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ότι η πιθανότητα να φέρουν κίτρινο είναι 2/6=1/3.

— **Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα και τη συγκρίνουν με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης**: Στη ΣΤ΄ Δημοτικού οι μαθητές διαπιστώνουν ότι αν ρίξουν πολλές φορές έναν τέτοιο κύβο οι σχετικές συχνότητες εμφάνισης της κόκκινης, κίτρινης και πράσινης έδρας είναι συγκρίσιμες με το 3/6, 2/6 και 1/6 αντίστοιχα.

— **Χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου**: Στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα να φέρουν δύο φορές κίτρινο αν ρίξουν δύο τέτοιους κύβους (4 από τα 36 αποτελέσματα είναι ευνοϊκά) αλλά και την πιθανότητα να φέρουν ίδιο χρώμα (14 από τα 36 αποτελέσματα είναι ευνοϊκά).

— **Χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων:** Στη Β΄ Γυμνασίου μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα τα δυο ζάρια να φέρουν το ίδιο χρώμα προσθέτοντας τις πιθανότητες να φέρουν δύο κόκκινες, δύο κίτρινες και δύο πράσινες ενδείξεις (9/36+4/36+1/36).

— **Αναγνωρίζουν μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας π.τ., ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών):** Στη Γ΄ Γυμνασίου οι μαθητές μπορούν είτε να εκτελέσουν είτε να προσομοιώσουν με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων έναν μεγάλο αριθμό τέτοιων πειραμάτων και να δουν ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης 2 εδρών ίδιου χρώματος πλησιάζει μετά από πολλές επαναλήψεις το 14/36.

— **Περιγράφουν πειράματα τύχης και με μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα:** Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν το παραπάνω πείραμα σε έναν απλούστερο δειγματικό χώρο με 9 εκβάσεις (το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου {κόκκινο, κίτρινο, πράσινο} με τον εαυτό του), να αποδώσουν πιθανότητα σε αυτές τις εκβάσεις και να υπολογίσουν π.χ. την πιθανότητα τουλάχιστον μια έδρα να είναι κόκκινη χρησιμοποιώντας λογισμό πιθανοτήτων και όχι απαρίθμηση.

— **Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων:** Στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν στο ερώτημα ποια είναι η πιθανότητα να φέρουν 4 διαφορετικά αποτελέσματα αν ρίξουν 4 φορές ένα ζάρι.

— **Αναγνωρίζουν τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τις κατανομές Bernoulli, διακριτή ομοιόμορφη και διωνυμική και υπολογίζουν τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας αυτών:** Στη Γ΄ Λυκείου οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα να φέρουν τουλάχιστον 5 φορές άρτια ένδειξη, αν ρίξουν 10 φορές ένα σύνηθες ζάρι, και να αναγνωρίσουν την αντιστοιχία αυτού του προβλήματος με το να απαντήσουν σωστά σε τουλάχιστον 5 από 10 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με 2 πιθανές απαντήσεις (Σωστό/Λάθος).

5. Βιβλιογραφία

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. (2020). Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report II. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report: A pre-K–12 curriculum framework. American Statistical Association.

https://www.amstat.org/asa/education/Guidelines-for-Assessment-and-Instruction-in-Statistics-Education-Reports.aspx

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, *10*(3).

Pfannkuch, M. (2005). Thinking tools and variation. *Statistics Education Research Journal, 1*(1), 46-52.

Pratt, D. (2005). How do Teachers Foster Students' Understanding of Probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 171-190). NY, USA: Springer.

Reading, C., & Reid, J. (2007). Reasoning about Variation: Student Voice. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*.

Watson, J. (2006). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

6. Πίνακες ενδεικτικών ωρών

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΑΡΙΘΜΟΣ, ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Πραγματικοί αριθμοί	12
Σύνολα	2
Αλγεβρικές παραστάσεις	4
Αλγεβρικές σχέσεις	16
Συναρτήσεις	16

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Διαχείριση δεδομένων	2
Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας	7
Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών	3
Πειράματα τύχης και Πιθανότητες	13

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Γεωμετρία του επιπέδου	45
Γεωμετρία του χώρου	5
Μέτρο γωνιών	

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΑΡΙΘΜΟΣ, ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Κανονικότητες	12
Συναρτήσεις	18
Αλγεβρικές σχέσεις	20

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Διαχείριση δεδομένων	7
Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών	4
Πειράματα τύχης και Πιθανότητες	11
Συσχέτιση	3

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Γεωμετρία του επιπέδου	27
Τριγωνομετρία	3
Μήκος, μέτρο γωνιών	4
Εμβαδόν	10
Όγκος	6

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΑΡΙΘΜΟΣ, ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Φυσικοί αριθμοί	3
Πίνακες	7
Συναρτήσεις	19
Αλγεβρικές σχέσεις	10
Σύγκλιση	11

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Διανύσματα	16
Ευθεία	4
Κωνικές Τομές (κύκλος)	5

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΑΡΙΘΜΟΣ, ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Πραγματικοί αριθμοί	2
Συναρτήσεις	6
Αλγεβρικές σχέσεις	2
Διαφόριση	10

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Διαχείριση δεδομένων	4
Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών	13
Συσχέτιση	13

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΑΡΙΘΜΟΣ, ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Σύγκλιση	20
Διαφόριση	38
Ολοκλήρωση	22

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Διαχείριση δεδομένων	3
Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας	1
Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών	11
Πειράματα τύχης και πιθανότητες	11
Συσχέτιση	8

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	
Θεματικές Ενότητες	**ενδεικτικές ώρες**
Γεωμετρία του επιπέδου	12
Κωνικές τομές	10
Μετασχηματισμοί	14