2025

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΤΩΝ ΚΥΚΛΑΔΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ-ΣΥΜΒΟΥΛΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΥΚΛΑΔΩΝ & Α΄ΑΘΗΝΑΣ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2024-2025

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

1

Θέμα 1ο:

Α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$
2. Έστω $\theta > 0$ με $|x| < \theta$, τότε $x > \theta$ ή $x < -\theta$
3. Έστω $\alpha,\beta \geq 0$, τότε ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
4. Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, είναι αδύνατη, τότε $\Delta<0$
5. Αν $\Delta>0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$, γίνεται ομόσημο του α, για τις τιμές του x που βρίσκονται εκτός ριζών.

(Μονάδες 10)

Β) Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$ με πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2.
Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -\beta/\alpha$

(Μονάδες 15)

Θέμα 2ο:

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

Θέμα 3ο:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-3x-1$ και $g(x)=2x-7$.
Να βρείτε :
(α) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g (Μονάδες 12)
(β) Τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από το C_g (Μονάδες 13)

Θέμα 4ο: Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in R$
α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in R$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
(Μονάδες 10)
β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:
i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.
ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:
i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,
ii) να βρείτε τον αριθμό λ.

(Μονάδες 10)

2

ΘΕΜΑ 1

Α . Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $α_ν= α_1 + (1-ν)ω$
2. Αν στην εξίσωση $αχ^2+βχ+γ=0$ με $α \neq 0$ ισχύει $αγ<0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.
3. Αν η $Δ>0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.
4. Δυο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές .
5. Η εξίσωση $αχ+β=0$ με $α=0$ και $β=0$ είναι αδύνατη .

(Μονάδες 10)

Β. Δίνεται η εξίσωση $αχ^2 + βχ+γ=0$ με $α \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες $χ_1$,$χ_2$. Αν με S συμβολίζουμε το άθροισμα των ριζών να αποδείξετε ότι $S = \frac{-β}{α}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $χ^2+5χ-6=0$

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $χ^2+5χ-6\geq 0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \le 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $\left||x|-1\right| \le 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

3

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) $\alpha\beta \neq 0 \iff \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$
(β) Έστω $\theta > 0$ με $|x| < \theta$, τότε $x > \theta$ ή $x < -\theta$
(γ) Έστω $\alpha,\beta \geq 0$, τότε ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
(δ) Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, είναι αδύνατη, τότε $\Delta<0$
(ε) Αν $\Delta>0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$, γίνεται ομόσημο του α, για τις τιμές του x που βρίσκονται εκτός ριζών.

(Μονάδες 10)

Β. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$ με πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2.
Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -\beta/\alpha$

(Μονάδες 15)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

<u>Θέμα 3ο:</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-3x-1$ και $g(x)=2x-7$.
Να βρείτε :
(α) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g (Μονάδες 12)
(β) Τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από το C_g (Μονάδες 13)

<u>Θέμα 4ο:</u>

Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in R$
α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in R$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
(Μονάδες 10)
β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:
i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.
ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .
(Μονάδες 5)
γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:
i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,
ii) να βρείτε τον αριθμό λ.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, τότε $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

β) Ισχύει $|x| < \theta$ τότε $-\theta < x < \theta$ για κάθε $\theta \geq 0$.

γ) Ισχύει η ιδιότητα $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ $όπου\ \alpha, \beta \geq 0$.

δ) Η ανίσωση $0x \geq -3$ είναι αδύνατη.

ε) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 4x$ και $\varepsilon_2 : y = 4x - 1$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 10

Β. Έστω η εξίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ και ρίζες x_1, x_2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της δίνεται από τον τύπο $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και το γινόμενο των ριζών της δίνεται από τον τύπο $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$. (Τύποι του Vieta)

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2Ο

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τον α_{20}.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει:

α) δυο άνισες ρίζες

Μονάδες 6

β) μια διπλή ρίζα

Μονάδες 6

γ) είναι αδύνατη

Μονάδες 6

δ) έχει πραγματικές ρίζες

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

Μονάδες 8

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox.

Μονάδες 7

5

ΘΕΜΑ 1ο:

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx+β είναι ευθεία.

β) Έστω Α(α,β) ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου. Το συμμετρικό του ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α΄(β,α).

γ) Αν α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

δ) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

ε) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{a^2} = a$.

(10 μονάδες)

Β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0\,, a \neq 0$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης δίνεται από τον τύπο $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$.

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο: Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3ο: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$ με $\alpha \in$ IR.

α) Αν ισχύει f(2)=g(2), να βρείτε την τιμή του α. (7 μονάδες)

β) Για α=1:

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g. (9 μονάδες)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq g(x)$. (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο: Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) , με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

(Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$S'_{10} = \dfrac{1}{2^9} S_{10}$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 1 :

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Ισχύει ότι : $\sqrt{(-7)^2} = -7$,

2) Έστω η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta\chi + \gamma = 0}$, με $\alpha, \beta, \gamma \in$ R , $\alpha \neq 0$
και με ρίζες $\chi_1, \chi_2 \in$ **R** , $\Delta > 0$.

Τότε ισχύει ότι : $\chi_1 \bullet \chi_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

3) Έστω η αριθμητική πρόοδος **− 4, − 7, − 10 ,….** Τότε ισχύει ότι η

διαφορά της παραπάνω αριθμητικής προόδου είναι $\boldsymbol{\omega = 3}$

4) Η κλίση της ευθείας $y = -\frac{5}{2}x + 7$ είναι το $-2,5$

5) Οι ευθείες **y = 4x + 5** και **y= 4x − 8** είναι παράλληλες

(μον. 10)

Β. Αν α , β είναι πραγματικοί αριθμοί , να αποδείξετε την πρόταση :

$$|\alpha \bullet \beta| = |\alpha| \bullet |\beta|$$

(μον. 15)

Θέμα 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4|<2$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 3 :

Έστω η γεωμετρική πρόοδος **− 4 , 12 , −36 ,…….**

α) Να βρείτε τον λόγο **λ** της γεωμετρικής προόδου

β) Με χρήση του τύπου του γενικού όρου να βρείτε τον **πέμπτο** όρο (α_5) της γεωμετρικής προόδου

γ) Με χρήση του τύπου του αθροίσματος να βρείτε το άθροισμα **(** S_5 **)** των πέντε πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου

(μον. 5 , 8 , 12)

<u>Θέμα 4</u>

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α)Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες10)

7

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Ισχύει ότι $(-\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

2.Η εξίσωση $\chi^7+\pi=3$ είναι αδύνατη

3.Έστω $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Η απόσταση (ΑΒ) των σημείων αυτών δίνεται από τον τύπο$(AB)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(\psi_1-\psi_2)^2}$

4.Αν η Διακρίνουσα ενός τριωνύμου είναι μηδέν , τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

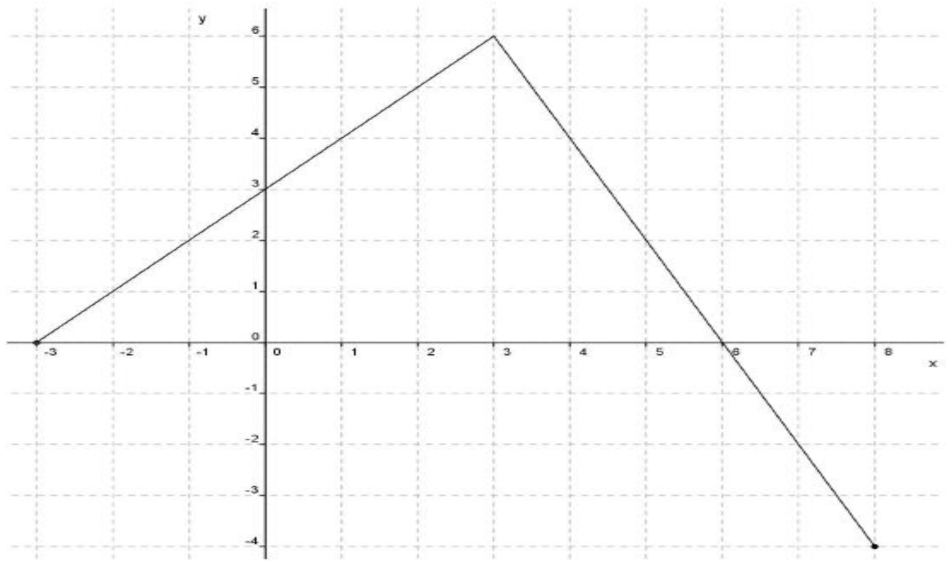
5.Τρεις αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2\beta=\alpha+\gamma$

(10Μ)

Β. Να αποδείξετε ότι για κάθε α, β ϵIRισχύει$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ (15Μ)

ΘΕΜΑ 2^{O}

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(6Μ)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(6Μ)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(6Μ)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(7Μ)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι αριθμοί α=$(\sqrt{5}-1)^2-(\sqrt{5}+1)^2-4(1-\sqrt{5})+5$

β=$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$και η παράσταση Α=$|x-1|-|x-4|+5$ όπου ο πραγματικός αριθμός χ ανήκει στο διάστημα [α,β]

1.Να αποδείξετε ότι α=1 και β=4 (6Μ)

2.Να αποδείξετε ότι Α=2χκαι να λύσετε την εξίσωση $\frac{4}{A-1}+\frac{2}{A+1}=\frac{A^2+2}{A^2-1}$ (8Μ)

3.Αν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι χ+2 ,ψ-1 όπου α$\leq \chi \leq \beta$ και α+1$\leq \psi \leq 2\beta$,να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος και το εμβαδόν του.

(6Μ)

4. Αν χ∈ [α,β] να λύσετε την εξίσωση$\left(\sqrt{x^2-2x+1}-|x-4|+5\right)^3=-27$

(5Μ)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (6Μ)

Β) Να δείξετε ότι : $X_1+X_2=2$ (4Μ)

Γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1-2|=|x_2+2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1-x_2=4$. (7Μ)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ. (8Μ)

8

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x^2| = x^2$

ii. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$

iii. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς αν $\Delta \geq 0$

iv Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ με $\alpha < 0$ και ν άρτιος φυσικός αριθμός είναι αδύνατη

v. Ισχύει: $|-x| = -|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15 μονάδες

Β.

Δίνεται ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2.

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα των ριζών $x_1 + x_2$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 2ο

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

β. Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα σημεία τομής της με τους άξονες.

(15 Μον,10 Μον)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,\ \alpha_3 = x^2 - 2$$, με x ακέραιο.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με 2014.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$.

(Μονάδες 7)

9

ΘΕΜΑ Α

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[5]{3^2}$.

β)Αν α + β = 0 τότε α = β = 0.

γ)Αν $x^4 = 16$ τότε $x = \pm 2$.

δ)Η εξίσωση $|3x + 2| = -1$ είναι αδύνατη.

ε) Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών -10 και 6 είναι το -2 .

Μονάδες 10

Β. Έστω $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, τριώνυμο με θετική διακρίνουσα. Να αποδείξετε ότι αν x_1, x_2 οι ρίζες του τότε : $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

1. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1).

Μονάδες 13

2. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τριώνυμο $A = 2x^2 - 7x - 4$ και η ανίσωση:$|x - 1| \leq 2$ (Β)

1) Να βρεθούν οι ρίζες του τριωνύμου Α.

Μονάδες 4

2) Για ποια x το τριώνυμο Α είναι αρνητικό;

Μονάδες 4

3) Να βρείτε τις κοινές λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 7x - 4 \leq 0$ και της (Β)

Μονάδες 9

4) Να λυθεί η εξίσωση $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

1. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

Μονάδες 5

2. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$.

Μονάδες 7

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος 2(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

Μονάδες 4

3. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (2), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Μονάδες 9

10

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- **α)** Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$.
- **β)** Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.
- **γ)** Αν $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\gamma < 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \iff \alpha\gamma > \beta\gamma$
- **δ)** Αν α > 0 και Δ < 0 τότε η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε x ∈ ℝ
- **ε)** Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

(Μονάδες 2·5=10)

Β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\Delta \geq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης

(Μονάδες 8+7=15)

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $\mathrm{f(x)} = \frac{3x^2-12}{x+2}$
- $h(x) = |x-2|$-5
- $g(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2} + 6$

3.1 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και h

(Μονάδες 6)

3.2 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g

(Μονάδες 6)

3.3 Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3x - 6$ και να υπολογίσετε τις τιμές $f(2)$ και $f(0)$

(Μονάδες 7)

3.4 Να βρείτε τα σημεία τομής της h με τους άξονες

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

Έστω ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$

(Μονάδες 6)

Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1.Οι διάμεσοι τριγώνου τέμνονται στο ορθόκεντρο.
2. Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μια γωνία του είναι οξεία.
3. Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι ίσες.
4. Το ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.
5.Το παραλληλόγραμμο είναι και ρόμβος.

(Μονάδες 10)

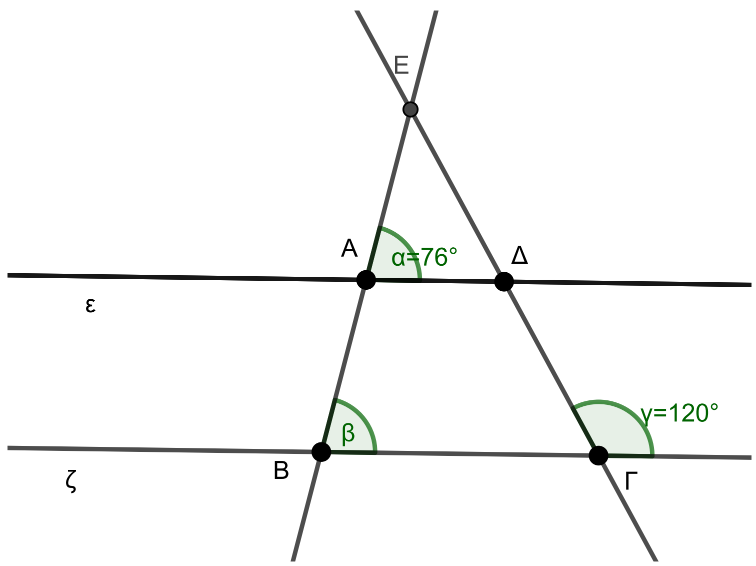
Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\widehat{\alpha} = 76^o$ και $\widehat{\gamma} = 120^o$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\widehat{\beta}$.
(Μονάδες 5)
β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ .
(Μονάδες 12)
γ) Τη γωνία $\widehat{\mathrm{E}}$ του τριγώνου ΕΑΔ.
(Μονάδες 8)



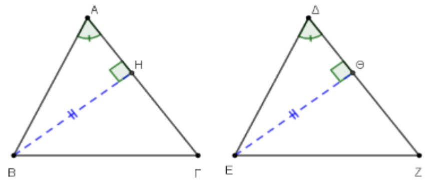
ΘΕΜΑ 3

Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\widehat{A} = \hat{\Delta}$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ.

(Μονάδες 12)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα , αν τα δεδομένα ύψη είναι και διάμεσοι.



(Μονάδες 13)

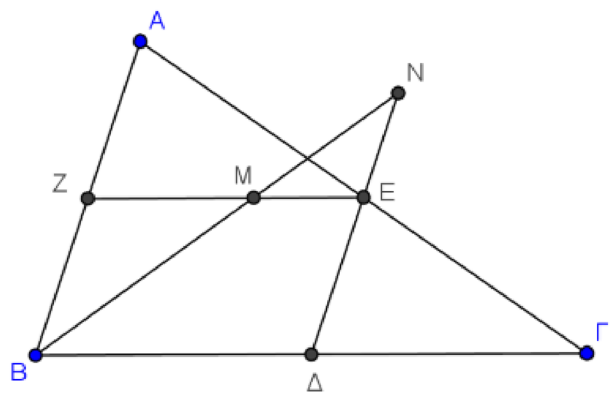
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

γ) ΒΖ + ΝΕ =ΔΓ (Μονάδες 8)



2

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν έχει μια οξεία γωνία.

β) Κάθε ρόμβος είναι και τετράγωνο.

γ) Αν δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

δ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

ε) Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του.

Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές(180°).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90˚), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ μια κάθετη ευθεία, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ, Μονάδες 13

β) ΑΔ<ΔΒ. Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{O}$) και το ύψος του ΑΔ.

α) Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $\widehat{\text{ΕΔΖ}} = \widehat{\text{Α}} = 90^{\text{Ο}}$.

Μονάδες 12

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΓΔ=2ΑΒ. Επίσης, τα σημεία Ζ, Η και Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 10

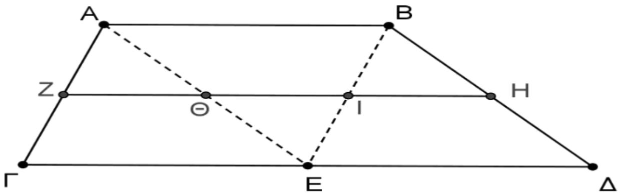
β) Να δείξετε ότι:

i. τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ii. $\text{ΖΗ} = \frac{3}{2}\text{ΑΒ}$.

Μονάδες 10

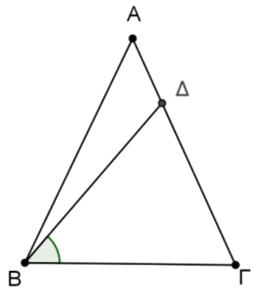

Α
Β
Ζ
Θ
Ι
Η
Γ
Ε
Δ

3

ΘΕΜΑ 1ο:

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.
β) Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.
γ) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
δ) Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
ε) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσός του είναι ύψος και διχοτόμος.
(10 μονάδες)
Β. Να αποδείξετε ότι: «Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.»
(15 μονάδες)

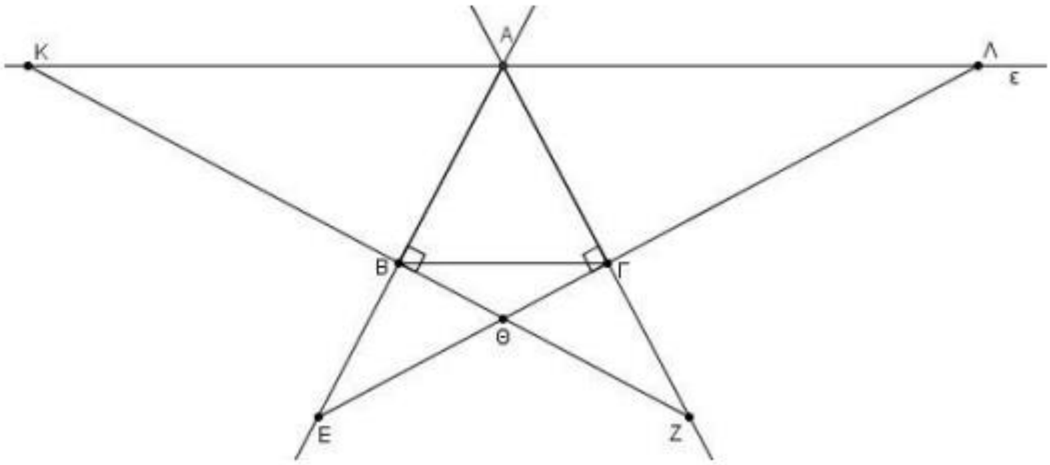
ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία $\widehat{A} = 50^0$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο ώστε ΒΔ=ΒΓ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$του τριγώνου ΑΒΓ, (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\widehat{B}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{A}$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 3ο: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ), το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε, Ζ, και Η των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) ΔΕ = $\frac{AB}{2}$. (8 μονάδες)
β) ΖΗ = $\frac{AB}{2}$ (8 μονάδες)
γ) Το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο: Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι:
 i. ΑΖ=ΑΕ (Μονάδες 8)
 ii. ΑΚ=ΑΛ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.
(Μονάδες 8)



4

Θέμα 1ο:

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Υπάρχει ισοσκελές αμβλυγώνιο τρίγωνο.
2. Ένα παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.
3. Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλη προς αυτή.
4. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.
5. Κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει απο τις πλευρές της.

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο :

(i) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
(ii) Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

(Μονάδες 15)

Θέμα 2ο:

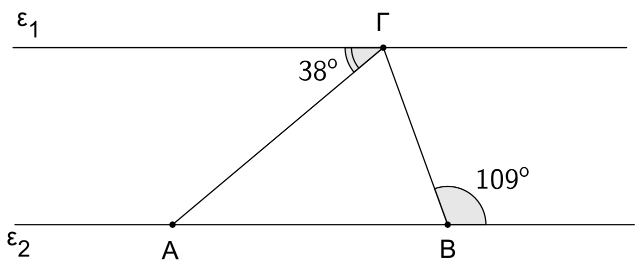
Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία $ε_1$ διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία $ε_2$ που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 10)



Θέμα 3ο:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α)ΜΓ = ΓΕ. (Μονάδες 9)
β) Το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
γ)$\hat{B}$+Β$\hat{A}$Μ=Γ$\hat{E}$Δ.

(Μονάδες 9)

Θέμα 4ο:

α)Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες8)

β)Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)
ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9

5

Θέμα 1:

(α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες τότε είναι ίσα .

2) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη , σχηματίζουν τις εντός – εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες .

3) Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά , εάν και μόνον εάν , η διάκεντρος τους ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους

4) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται .

5) Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι ίσες.

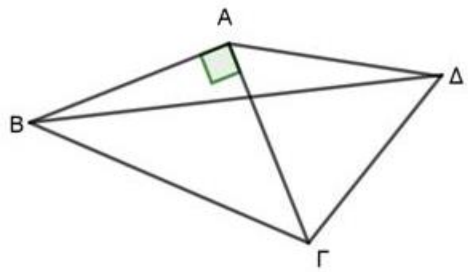
(μον. 10)

(β) Να αποδείξετε ότι: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

(μον. 15)

Θέμα 2:

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{A}=90°$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.
α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
(Μονάδες 5)
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 8)
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ.
(Μονάδες 12)



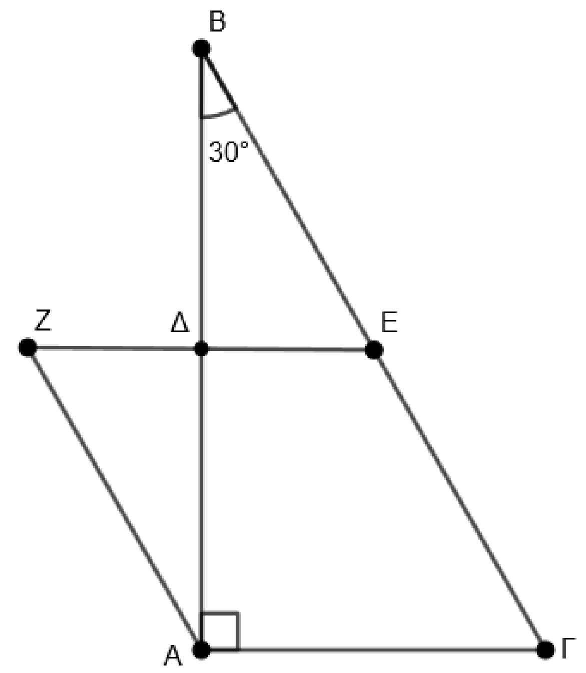
Θέμα 3:

Εστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^o$) με $B = 30^o$ και Δ , Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα . Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ .

α) Να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι παράλληλη και ίση με την ΑΓ .

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι ρόμβος .

(μον. 12 , 13)



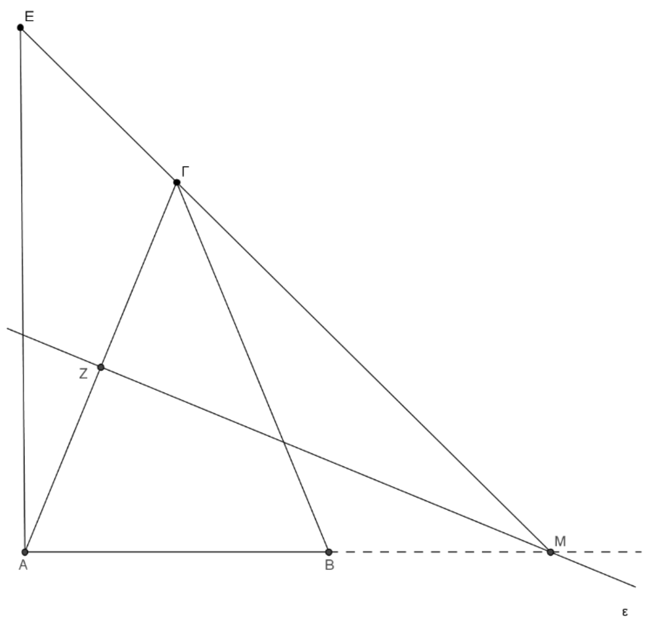
Θέμα 4:

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΓ=ΒΓ). Η μεσοκάθετη ε της ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΒ(προς το μέρος του Β) στο σημείο Μ και την ΑΓ στο Ζ. Στην προέκταση της ΜΓ(προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ=ΒΜ.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΓΒΜ είναι ίσα.
(Μονάδες10)

γ) Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



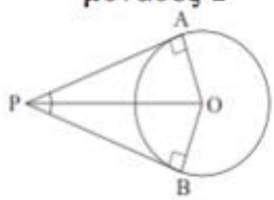
6

ΘΕΜΑ 1

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας, τη λέξη Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1) Οι διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές. **μονάδες 2**
2) Στο ισοσκελές τρίγωνο οποιαδήποτε διάμεσος είναι επίσης ύψος και διχοτόμος. **μονάδες 2**
3) Στο ισοσκελές τραπέζιο οι προσκείμενες στις βάσεις γωνίες είναι ίσες. **μονάδες 2**
4) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. **μονάδες 2**
5) Το άθροισμα των οξειών γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με 90° **μονάδες 2**

Α2. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου (PA και PB), που άγονται από σημείο P εκτός αυτού είναι ίσα. **μονάδες 15**



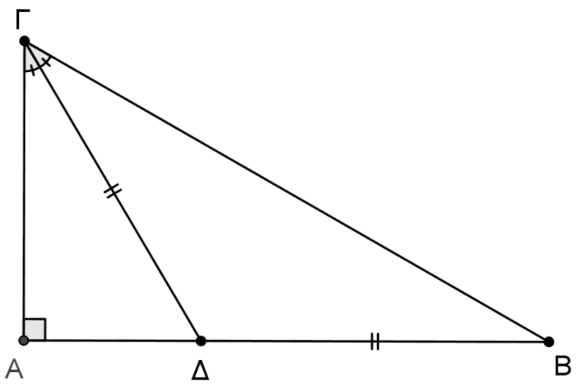
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\hat{A}=90^{0}$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΓΔ=ΔΒ=2cm.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}=30^{0}$. (Μονάδες 12)

β) ΑΒ=3cm. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 3

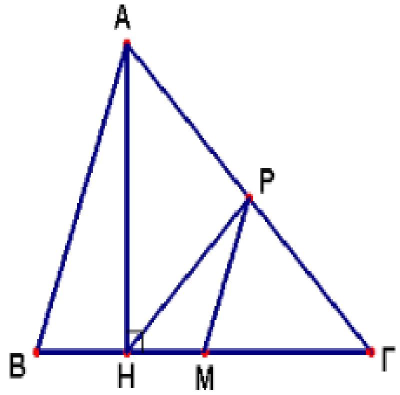
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6 , ΑΓ=8 και $\hat{B} = 60^o$. Έστω ΑΗ ύψος του και Μ, Ρ τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α) Τα μήκη των τμημάτων ΗΡ και ΜΡ.

(Μονάδες 10)

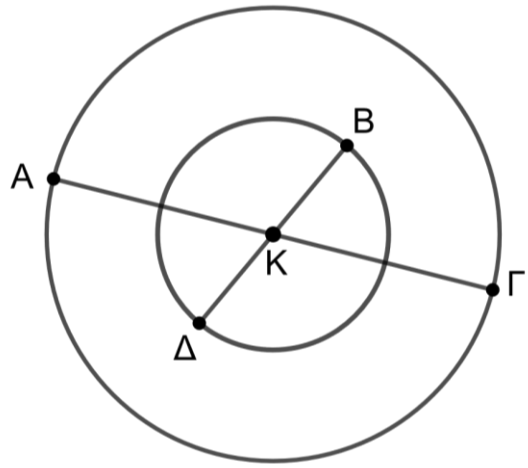
β) Το μήκος του τμήματος ΒΗ. **(Μονάδες 8)**

γ) Την γωνία $\hat{Ρ Μ Γ}$. **(Μονάδες 7)**



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει ΑΓ>ΒΔ:
i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

7

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Οι κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ,R) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta < R + \rho$, όπου δ η διάκεντρος τους.
2. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι η υποτείνουσα.
3. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας του.
4. Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.
5. Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη με το ύψος του.

(Μονάδες10)

Β. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

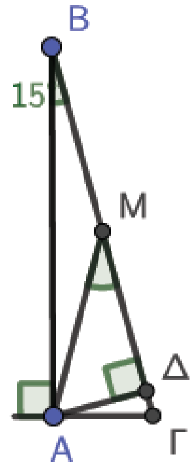
Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα

(Μονάδες 12)

β) ΕΔ//ΒΓ.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) με $\hat{B}=15°$.
Αν ΑΜ η διάμεσος και ΑΔ το ύψος από την κορυφή Α προς την υποτείνουσα ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α. $A\hat{M}\Gamma=30°$

β. το ύψος $A\Delta=\frac{AM}{2}$

γ. $B\Gamma = 4\cdot A\Delta$

Μονάδες (9+9+7=25)

ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΔΒ.

Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.

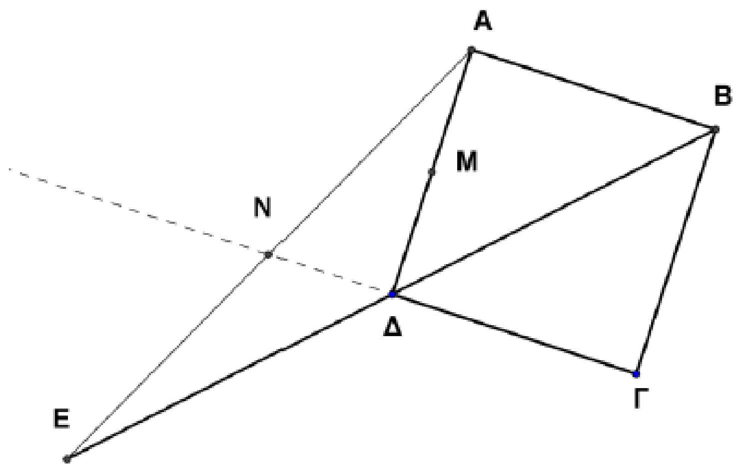
α) Να αποδείξετε ότι ΔΝ=ΔΜ. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΜΝ \perp ΑΓ$ (Μονάδες 7)

ii. $ΓΜ \perp ΑΝ$ (Μονάδες 7)



8

ΘΕΜΑ Α

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι είναι διχοτόμοι των γωνιών.

2) Οι διαγώνιες ενός ρόμβου είναι ίσες.

3) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

4) Κάθε τρίγωνο εγγράφεται και περιγράφεται σε κύκλο.

5) Σε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος της υποτείνουσας ισούται με το μισό της.

Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 180^0.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

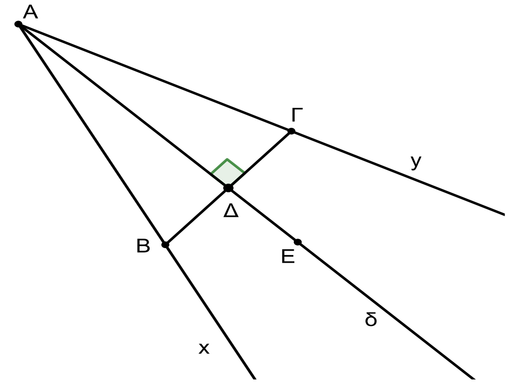
Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο Αδ, η οποία τέμνει την Αδ στο σημείο Δ και την Αy στο σημείο Γ.

1. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα.

Μονάδες 12

2. Αν Ε τυχαίο σημείο της Αδ, να αποδείξετε ότι το Ε ισαπέχει από τα Β και Γ.

Μονάδες 13



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με ΒΓ = 24 και $\hat{\Gamma}$ = 60^0. Αν ΑΔ η διάμεσος, Θ το βαρύκεντρό του και Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ, να υπολογίσετε:

- **i.** Τη διάμεσο ΑΔ
- **ii.** Την πλευρά ΑΓ
- **iii.** Το τμήμα ΔΜ
- **iv.** Το τμήμα ΑΘ
- **v.** Τη γωνία $\widehat{A\Delta\Gamma}$

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Δ

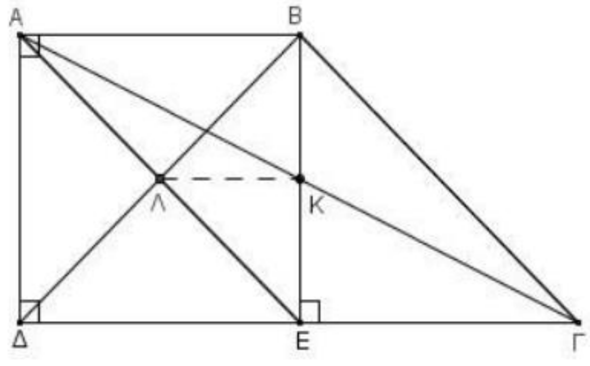
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45°$ (Μονάδες 8)

β) ΒΔ=ΑΕ (Μονάδες 9)

γ) ΚΛ= $\frac{1}{4}$ΔΓ. (Μονάδες 8)



<u>Να απαντηθούν όλα τα θέματα.</u>

9

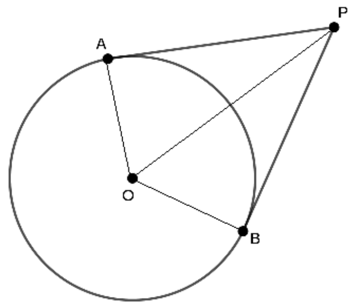
ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Κάθε παραλληλόγραμμο με ίσες και κάθετες διαγωνίους είναι τετράγωνο.
2. Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.
3. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες ίσες.
4. Δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία έχουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ίσες.
5. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο.

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι: "Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους."



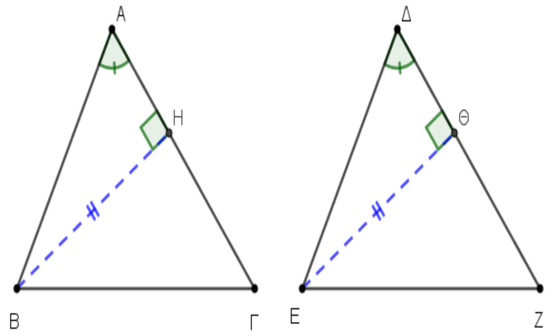
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\widehat{A}=\widehat{\Delta}$, $A\widehat{B}\Gamma = \Delta\widehat{E}Z$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα . (Μονάδες 12)



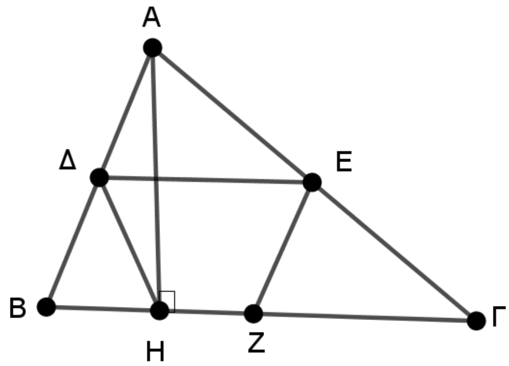
ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , Δ το μέσο της ΑΒ , Ε το μέσο της ΑΓ , Ζ το μέσο της ΒΓ και το ύψος του ΑΗ.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ

Α) είναι τραπέζιο (Μονάδες 12)

Β) το τραπέζιο αυτό είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ = ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε ΚΛ // ΔΒ και

$$ΚΛ = \frac{3}{2}ΔΒ.$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες ίσες.
3. Δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία έχουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ίσες.
4. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο.
5. Κάθε παραλληλόγραμμο με ίσες και κάθετες διαγωνίους είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι: Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180^0.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ=9 , ΕΓ=10 και ΒΓ=30 .

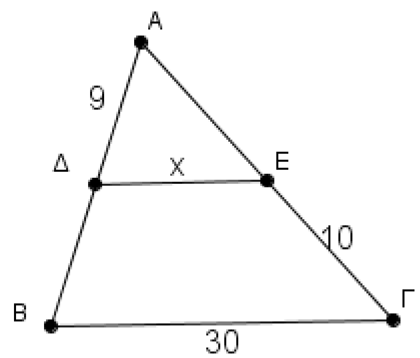
α) Να υπολογίσετε:

ι) το μήκος x του τμήματος ΔΕ, (Μονάδες 8)

ιι) την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=90°) και Μ το μέσο της υποτείνουσας του ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ΜΔ⊥ΑΒ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i)Το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
ii)Το τετράπλευρο ΑΜΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

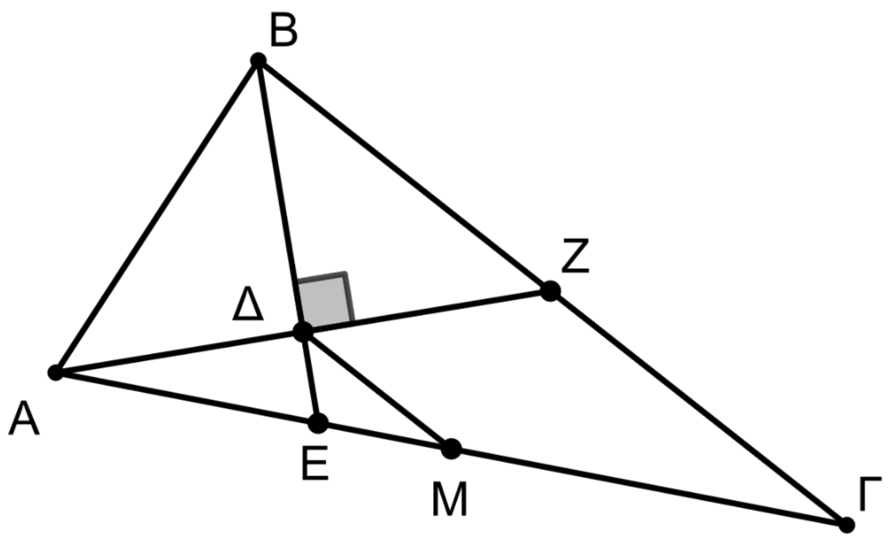
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$.

Αν ΑΖ ⊥ ΒΕ, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΔΜ // ΒΓ και $\Delta\mathrm{M} = \frac{\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{AB}}{2}$ (Μονάδες 10)

γ) $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{M} = \frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}$, όπου $\widehat{\mathrm{B}}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



11

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ,** αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΒΔ είναι ύψος και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές
β) Δύο τρίγωνα με δύο πλευρές και μία γωνία τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
γ) Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος.
δ) Σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά, βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία.
ε) Αν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, ανήκει στη μεσοκάθετό του.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

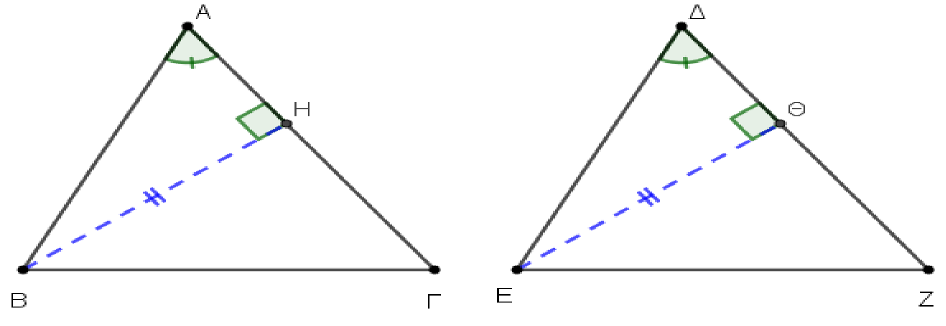
Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\widehat{Α}=\widehat{Δ}$, $Α\widehat{Β}Γ = Δ\widehat{Ε}Ζ$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ.

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα .

(Μονάδες 12)



<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40°$ και $\hat{B} = 70°$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με ΔΕ = 9 και ΕΓ = 16.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

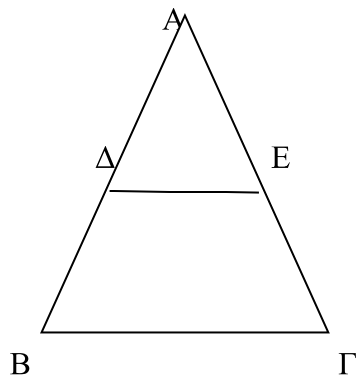
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 18

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)



<u>ΘΕΜΑ 4</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.

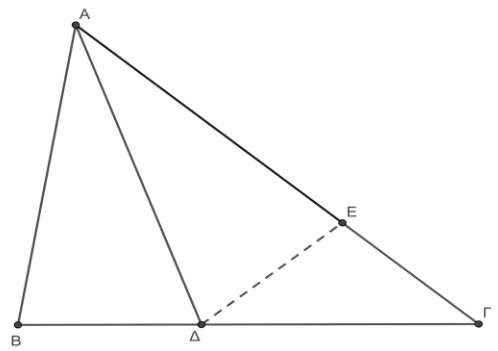
(Μονάδες 7)

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ.

(Μονάδες 9)



Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1

Α . Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1.Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
2.Ισχύει ότι : ημω+συνω=1
3.Ένα πολυώνυμο P(χ) έχει παράγοντα το χ-ρ α και μόνο αν P(ρ)=0
4.Ισχύει ότι lne=1
5.Αν ημχ=ημθ τότε χ=2κπ+θ ή χ=2κπ-θ

(Μονάδες 10)

Β. Αν α>0 με α≠1, τότε για οποιοιδήποτε θ_1 ,θ_2 >0 , να δείξετε ότι:

$$\log_a(\theta_1\theta_2)= \log_a\theta_1 +\log_a\theta_2$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)}$.

Α. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $\mathrm{P(x)}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Β. Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(\mathrm{x})$ και το υπόλοιπο $\upsilon(\mathrm{x})$ που προκύπτει από την διαίρεση $\mathrm{P(x)\colon (x-2)}$;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln(x-3)

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

(Μονάδες 5)

Β. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ

(Μονάδες 8)

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφικής παράστασης της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ'χ

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Α. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$,με $x \in \mathbb{R}$.

iii. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$είναι -1, να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

(Μονάδες 6)

iv. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$και $\beta = 12$.

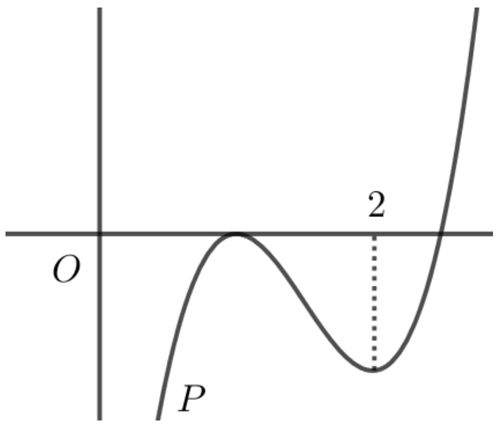
(Μονάδες 5)

Β. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

Γ. Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



2

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = log_a\theta_1 \cdot log_a\theta_2$

β) Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ, τότε ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Ισχύει ότι $\ln\theta = x <=> \theta = e^x$.

δ) Αν α<1 η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε) Ισχύει ότι $\eta\mu(180° - \omega) = -\eta\mu\omega$.

Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Πόσες και ποιές λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$.

Μονάδες 13

β) $\alpha = -2$.

Μονάδες 12

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x) = x^4 + ax^3 - (6-a)x^2 + \beta x + 2\beta - 3\alpha + 1$.

Αν το P(x) έχει παράγοντα το $x^2 - 1$, τότε:

Α) να βρείτε τις τιμές των α και β — Μονάδες 9

Β) για $\alpha = -1$ και $\beta = 1$ να λύσετε την εξίσωση P(x)=0 — Μονάδες 8

Γ) να λύσετε την ανίσωση P(x)<0. — Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{A} = -\ln 3$.

Μονάδες 9

3

ΘΕΜΑ 1ο:

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(10 μονάδες)

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(3, 7), τότε είναι γνησίως αύξουσα.

β) Κάθε σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.

γ) Αν $\theta_1, \theta_2 > 0$, τότε ισχύει $log(\theta_1 + \theta_2) = log\theta_1 + log\theta_2$.

δ) Ισχύει $\text{ημ}(\pi + \omega) = -\text{ημ}\omega$.

ε) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.

Β. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$.

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3ο: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2) + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

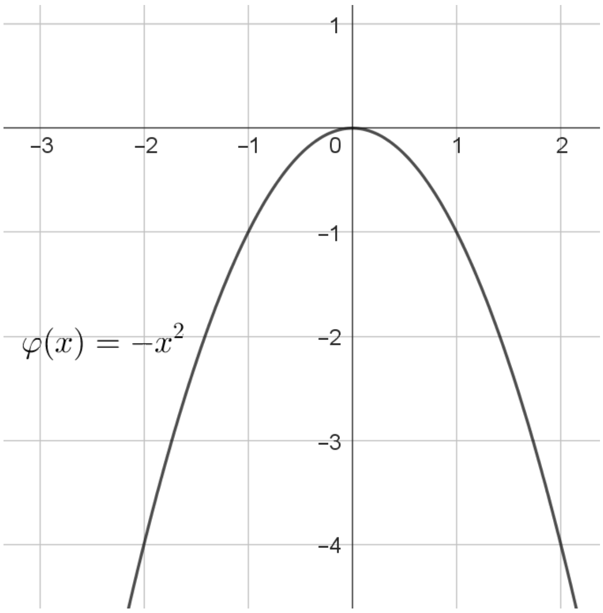
β) Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(ln3,0). (Μονάδες 9)

γ) Για k=0, να λύσετε την εξίσωση f(x)=0. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4ο: Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ και

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.



(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

4

Θέμα 1 :

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε χ_1 , χ_2 ∈ Δ με $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει :

$$f(\chi_1) < f(\chi_2)$$

2) Αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές τότε έχουν το ίδιο συνημίτονο .

3) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(χ) με το (χ – 4) είναι ίσο με το P(4) .

Σ Λ

4) Αν χ_1 , χ_2 πραγματικοί αριθμοί με $\chi_1 < \chi_2$ τότε ισχύει ότι: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}$

5) Αν χ_1 , χ_2 πραγματικοί αριθμοί με $0 < \chi_1 < \chi_2$ τότε ισχύει ότι : $\log \chi_1 > \log \chi_2$

(μον. 10)

Β. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία **ω** ισχύει : εφω • σφω = 1

(μον. 15)

Θέμα 2

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\text{ημx} = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$. (Μονάδες 13)

β) $\alpha = -2$. (Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

Θέμα 3 Έστω ότι : (3συνχ – 1) • (3συνχ + 2) = 0 , με $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$

α) Να υπολογισθεί το συνχ

β) Να υπολογισθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας χ rad (ημχ , εφχ , σφχ)

(μον. 7, 10, 4, 4)

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$f(x) + f(x+1) = 14$ (Μονάδες 9)

5

Θέμα 1^o

A.

Μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων σας τον αριθμό κάθε πρότασης και δίπλα σε αυτό το γράμμα (Σ) ή (Λ) αντίστοιχα αν αυτή είναι σωστή ή λάθος.

1. Η λύση του γραμμικού συστήματος $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=4 \end{cases}$ είναι το (1,1).
2. Η συνάρτηση f: $\Re \rightarrow \Re$ με $f(x)=5x^2+1$ είναι περιττή.
3. Ισχύει συγχρόνως ημx= $\frac{3}{5}$ και συνx=$\frac{4}{5}$.
4. Η συνάρτηση $f(x)=5^x$ είναι η γνησίως αύξουσα σε όλο το $\Re$.
5. log6+log5=log11

(Μονάδες 10)

B. Αποδείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ=P(ρ).

(Μονάδες 15)

Θέμα 2^o

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x)=-2x^3+4x^2+2(x^3-1)+9$ και $Q(x) = \alpha x^2+7, a \in \Re$.

α) Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ 3^{ου} βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

Θέμα 3^o

Δίνεται $P(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3$.

α) Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0.

(Μονάδες 13)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log^4x+2\log^3x+2\log^2x-2\log x-3=0$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 4ο

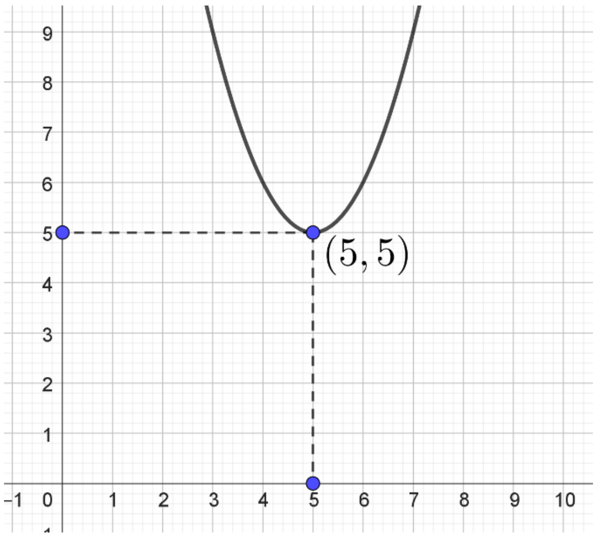
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}εφω \bullet ημx, x \in \Re$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2συν^2ω + ημω = -1,\ ω \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε:

α) i. Να αποδείξετε ότι $εφω = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

ιι. Για $εφω = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

(Μονάδες 04)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30, x \in \Re$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g.

(Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

6

Θέμα 1:

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1 τότε η εξίσωση f(χ)= 2 είναι αδύνατη
2. Η συνάρτηση f(χ) = lnx , x > 0 είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
3. Ισχύει ημ (π+ ω) = συνω
4. Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια , τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη
5. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών (Μονάδες 10)

B. Να αποδείξετε ότι εφω·σφω= 1

(Μονάδες 15)

Θέμα2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^3 -2\chi^2+3\chi-2$

α) Να αποδείξετε ότι το χ-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(\chi) = (\chi-1)(\chi^2 - \chi + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του χ είναι $P(\chi) > 0$

(Μονάδες 13)

Θέμα3

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{\etaμ\chi}{1+\sigmaυν\chi} + \frac{1+\sigmaυν\chi}{\etaμ\chi} = \frac{2}{\etaμ\chi}$ (Μονάδες 8)

β) Αν $\frac{\etaμ\chi}{1+\sigmaυν\chi} + \frac{1+\sigmaυν\chi}{\etaμ\chi} = \frac{10}{3}$

ι) Να αποδείξετε ότι ημχ = $\frac{3}{5}$ (μονάδες 4))

ιι) Αν η γωνία χ είναι οξεία, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς χ (Μονάδες 7)

ιιι) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A= \frac{5\sigmaυν(\pi-\chi)-10\sigmaυν(\frac{\pi}{2}-\chi)}{-4\varepsilonφ(\pi-\chi)+ 5\sigmaυν(-\chi)}$ (Μονάδες 6)

Θέμα4

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1}{2}\ln x^2$, $x\neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ψ΄ψ

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε χ > 0 ισχύει f (χ) = lnx (Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(\chi) = \frac{1}{2}\ln x^2$, $x\neq 0$ (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του χ η γραφική παράσταση είναι κάτω από την ευθεία ψ= 2 (Μονάδες 7)

7

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Μία συνάρτηση $f: A \to \Re$ λέγεται άρτια αν $f(-x)=f(x)$.
2. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
3. Ισχύει ημ (π+x) =ημx για κάθε $x \in \Re$.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$, είναι γνησίως αύξουσα.
5. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που έχει άπειρες λύσεις παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες.

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \Re$, ισχύει: $\log_a(\theta_1\theta_2)= \log_a\theta_1 + \log_a\theta_2$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1-\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1-\log 2=\log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

α) Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 2\alpha+\beta=10 \\ -4\alpha+2\beta=16 \end{cases}$

(Μονάδες 15)

β) Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 2\cdot 2^x+3^y=10 \\ -4\cdot 2^x+2\cdot 3^y=16 \end{cases}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4+6x^2-7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου P(x).

(Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο P(x) σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

(Μονάδες 8)

γ) i. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

(Μονάδες 5)

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης P(x)=0, να λύσετε την εξίσωση $(2\etaμx-1)^4+6(2\etaμx-1)^2-7=0$, για $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ , αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , λέγεται περιττή όταν για κάθε x∈A ισχύει : -x∈A και f(-x) = f(x).

2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε x_1 , x_2 ∈Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

3. Αν για ένα πολυώνυμο P(x) ισχύει P(2)=0 , τότε λέμε ότι ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

4. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

5. Αν α>0 με α≠1 και θ_1 , $\theta_2 > 0$ τότε ισχύει : $\log_\alpha(\theta_1+\theta_2) = \log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$.

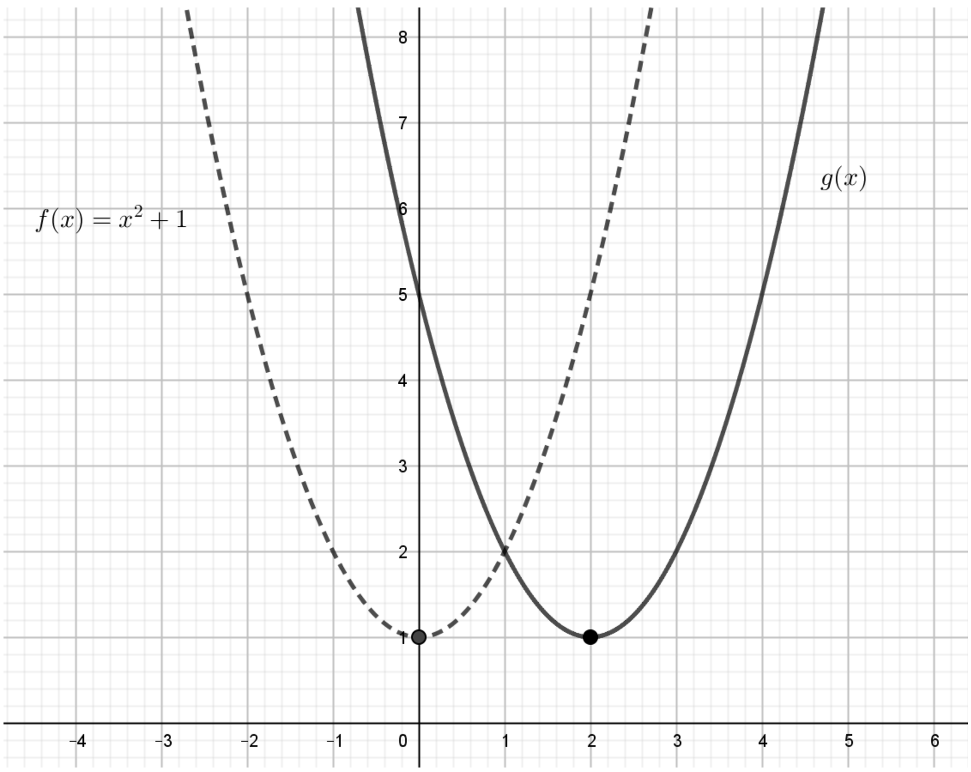
(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει $ημ^2ω+συν^2ω=1$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με x∈ R.



α)

i. Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β)

i. Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα xx' .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+4x^2-5x-2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\dfrac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\dfrac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\dfrac{5}{x^2+1}\right)-2>0$.

(Μονάδες 11)

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν τα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε : $\frac{E}{E'}$=λ^2.

β) Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία είναι συμπληρωματικές.

γ) Αν Ε το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ τότε: $E = \sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

δ) Ο τύπος $4{\alpha_\nu}^2 = 4R^2 - {\lambda_\nu}^2$ συνδέει την πλευρά, το απόστημα και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου κανονικού ν-γώνου.

ε) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 90^o$.

Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΗ και ΒΘ.

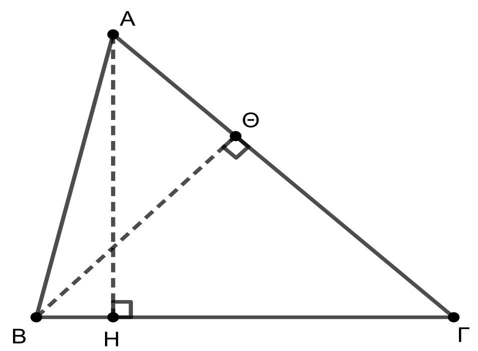
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα …….
ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ......
iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….
iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..
v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ... - 2\cdot ΒΓ\cdot ...$
vi. $ΒΓ^2 = ... + ΑΓ^2 - 2\cdot ...\cdot ΑΘ$

Μονάδες 15

β) Αν ΑΒ = 4, ΒΓ=5 και ΑΓ = 6, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ.

Μονάδες 10



ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α=17, β=8, γ=15.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

1. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας λ.

Μονάδες 8

2. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m.

Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστάνουν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστάνουν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.

α)

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

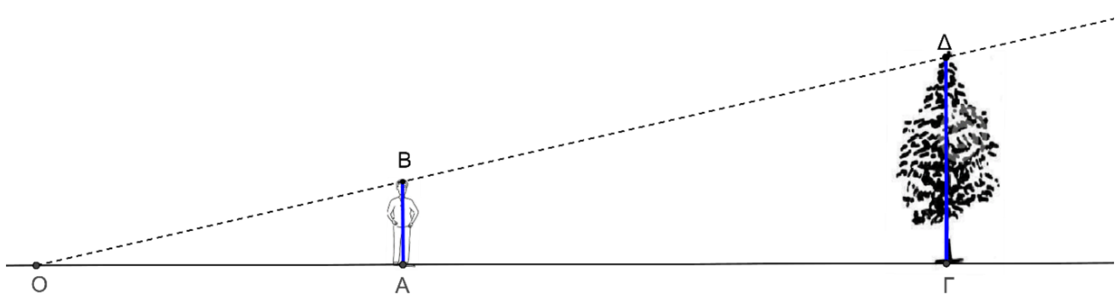
Μονάδες 12

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

Μονάδες 8

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 5



(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

2

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.
2. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
3. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.
4. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.
5. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

Β. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

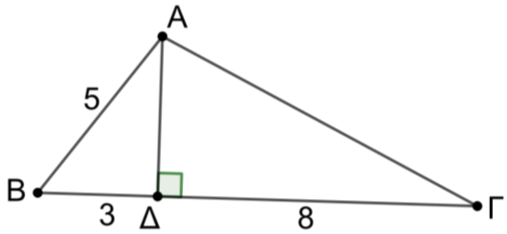
<u>Θέμα 2ο:</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ $=$ 4. (Μονάδες 07)

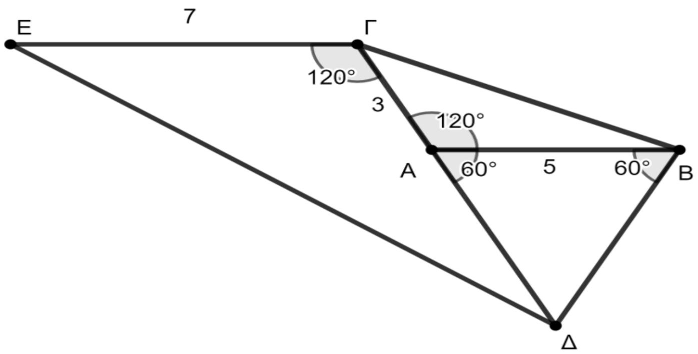
β)ΑΓ $= \sqrt{80}$. (Μονάδες 08)

γ)το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)



<u>Θέμα 3ο:</u>

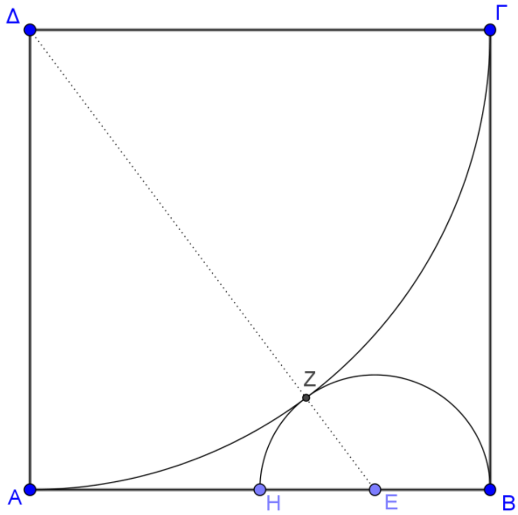
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται ΑΒ=5 , ΑΓ=3 και $B\hat{A}\Gamma = 120° = E\hat{\Gamma}\Delta$ καθώς και $B\hat{A}\Delta = 60° = A\hat{B}\Delta$.



α) Να υπολογίετε το μήκος της ΒΓ. (Μονάδες 7)
β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΔ. (Μονάδες 4)
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΔΕ. (Μονάδες 7)
δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ. (Μονάδες 7)

Θέμα 4ο:

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 8. Με κέντρο το Δ κατασκευάζουμε το τόξο ΑΓ. Το ημικύκλιο με διάμετρο ΒΗ εφάπτεται στο τόξο ΑΓ στο Ζ και
το Ε είναι το κέντρο του ημικυκλίου.



α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του ημικυκλίου.

(Μονάδες9)

β) Αν ρ=2 , να υπολογίσετε:

i. Τα εμβαδά του τετραγώνου, του τεταρτοκυκλίου και του ημικυκλίου.

(Μονάδες 7)

ii. Την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος ΑΖΓΒΖΗΑπου βρίσκεται εντός του τετραγώνου ΑΒΓΔ και εκτός του ημικυκλίου και του τεταρτοκυκλίου.

(Μονάδες 9)

3

ΘΕΜΑ 1º

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.
2. Για τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι αν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} < 90^o$.
3. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσο εμβαδόν, τότε είναι ίσα.
4. Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα μ^o και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα:$(OAB) = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$.
5. Υπάρχει κανονικό πολύγωνο του οποίου οι εξωτερικές γωνίες είναι αμβλείες.

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του, δηλαδή ότι

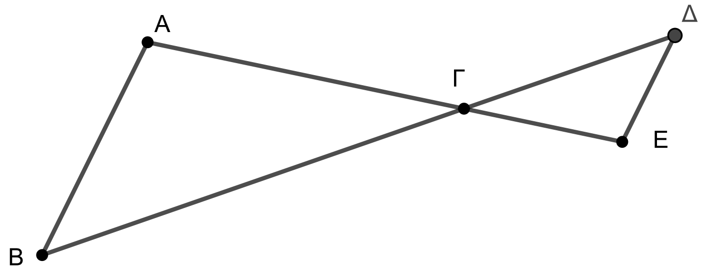
$$E = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2},$$

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2º

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ=2ΓΕ.



Α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια.
(Μονάδες 13)

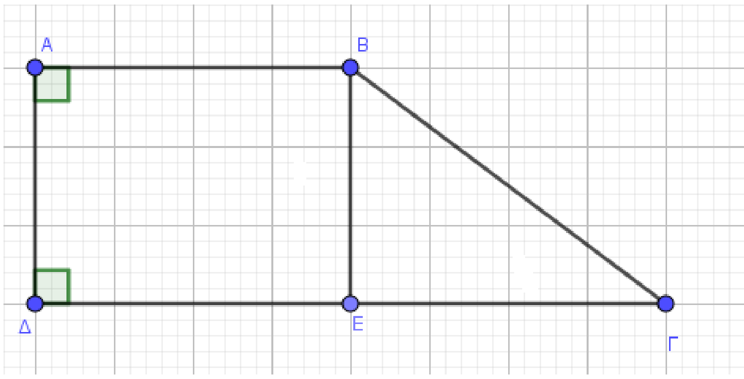
Β)

i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.
ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3º

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ<ΓΔ, $\widehat{A}=\widehat{\Delta}=90^{O}$, ΑΒ=8, ΑΔ=6, ΒΓ=10.



Α**)** Να αποδείξετε ότι για **τ**ην προβολή της ΒΓ πάνω στην ΔΓ, δηλαδή την ΕΓ ισχύει ΕΓ = 8.

(Μονάδες 9)

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 8)

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.Μέτρησαν και βρήκαν ΟΑ=20m και ΟΒ=30m. Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΓ=2m και ΟΔ=3m.

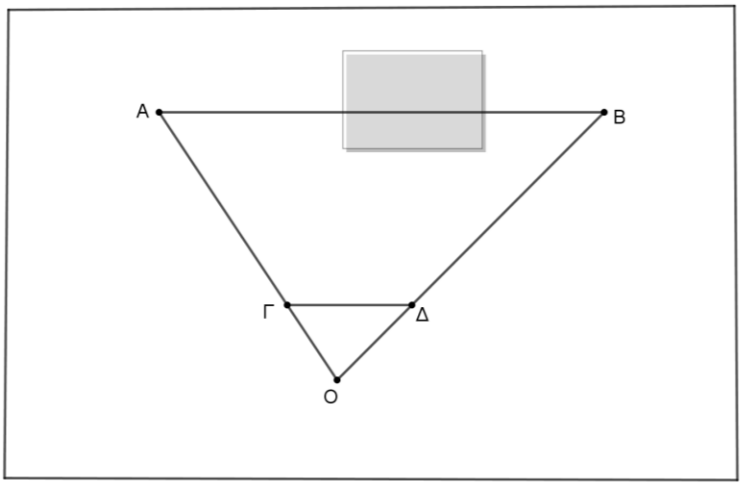
Α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ, (Μονάδες 8)

ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

Β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ.

Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



4

ΘΕΜΑ_1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τη σχέση (ΑΒΓ)= $\frac{1}{2}$ βγσυνΑ

β) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $α^2= β^2 +γ^2+2βγσυνΑ$

δ) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία $α^2<β^2+γ^2$ αν και μόνο αν $\hat{A}>1L$

ε) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ΑΒ^2+ΑΓ^2=ΒΓ^2$ τότε $\hat{A}=90^0$

μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. Δηλαδή να αποδείξετε ότι: $ΑΒ^2 = ΒΓ\cdot ΒΔ$

μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 7$, $\hat{Γ} = 45^ο$ και ύψος $ΑΔ = 4$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΓΔ = 4$.

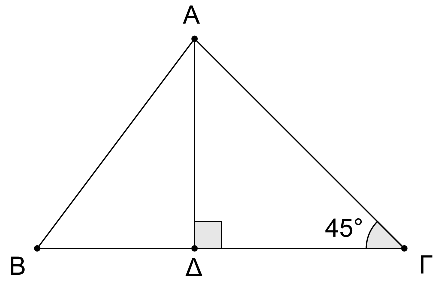
μονάδες 5

ii. $ΑΓ = 4\sqrt{2}$.

μονάδες 8

Β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

μονάδες 12



ΘΕΜΑ 3

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με την γωνία Α ορθή. Αν ΑΓ = 20 και ΒΓ = 25, να υπολογίσετε:

Α. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ

μονάδες 8

Β. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΓ και ΔΒ

μονάδες 10

Γ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ.

μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Α. Αν είναι $ΑΔ = 2ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{2}ΑΓ$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

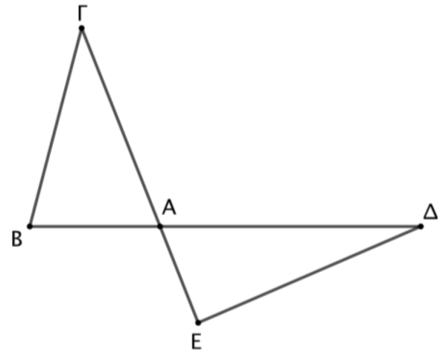
μονάδες 9

Β. Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $ΑΔ = μ \cdot ΑΒ$ και $ΑΕ = ν \cdot ΑΓ$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ να είναι ισοδύναμα;

μονάδες 10

Γ. Αν είναι $ΑΓ = \frac{3}{2}ΑΒ$ και $ΑΔ = 2ΑΒ$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του Ε ώστε τα ΑΒΓ και ΑΔΕ να είναι όμοια.

μονάδες 6



5

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.
2. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
3. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.
4. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.
5. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

Β. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

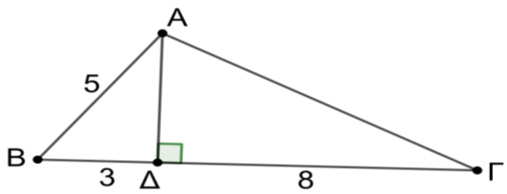
<u>Θέμα 2ο:</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ = 4$. (Μονάδες 07)

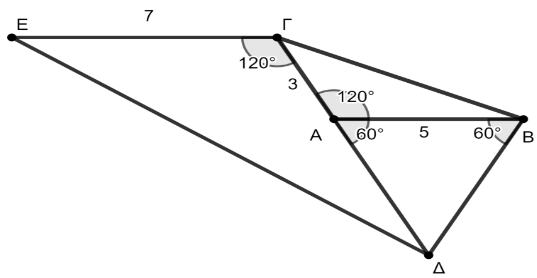
β) $ΑΓ = \sqrt{80}$. (Μονάδες 08)

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)



<u>Θέμα 3ο:</u>

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται ΑΒ=5 , ΑΓ=3 και $Β\hat{Α}Γ = 120° = Ε\hat{Γ}Δ$ καθώς και $Β\hat{Α}Δ = 60° = Α\hat{Β}Δ$.



α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ. (Μονάδες 7)

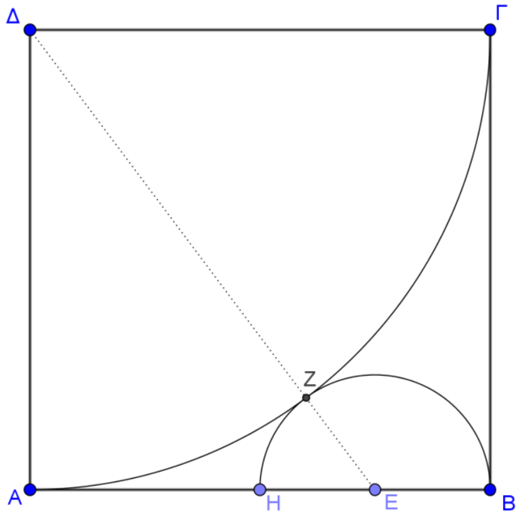
β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΔ. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΔΕ. (Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ. (Μονάδες 7)

Θέμα 4ο:

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 8. Με κέντρο το Δ κατασκευάζουμε το τόξο ΑΓ. Το ημικύκλιο με διάμετρο ΒΗ εφάπτεται στο τόξο ΑΓ στο Ζ και
το Ε είναι το κέντρο του ημικυκλίου.



α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του ημικυκλίου. (Μονάδες 9)

β) Αν ρ=2 , να υπολογίσετε:

iii. Τα εμβαδά του τετραγώνου, του τεταρτοκυκλίου και του ημικυκλίου. (Μονάδες 7)

iv. Την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος ΑΖΓΒΖΗΑπου βρίσκεται εντός του τετραγώνου ΑΒΓΔ και εκτός του ημικυκλίου και του τεταρτοκυκλίου.

(Μονάδες 9)

6

ΘΕΜΑ 1ο:

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' ισχύει $\widehat{A'} = 180 - \widehat{A}$, τότε είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$.

β) Αν δύο τρίγωνα είναι ισοδύναμα τότε είναι και ίσα.

γ) Ισχύει ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$, όπου Α αμβλεία γωνία.

δ) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο $\left(O\,\widehat{AB}\right) = \frac{\pi R\mu}{180}$.

ε) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.

(10 μονάδες)

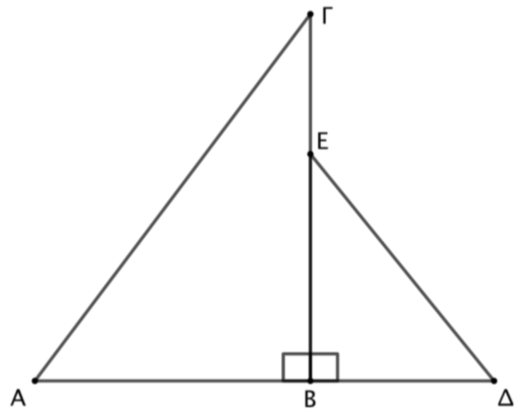
Β. Να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα: «Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας».

(15 μονάδες)

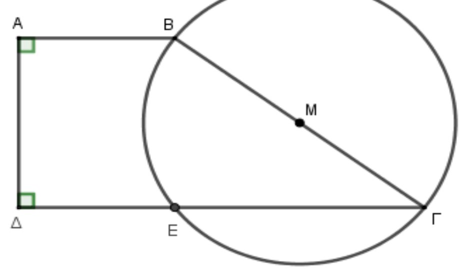
ΘΕΜΑ 2ο: Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $A\Gamma = 36$, $B\Delta = 16$ και $E\Delta = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 3ο: Στο επόμενο σχήμα δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=5 , ΓΔ=13 και (ΑΒΓΔ)=54. Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ έχει κέντρο το Μ και τέμνει τη ΓΔ στο Ε.

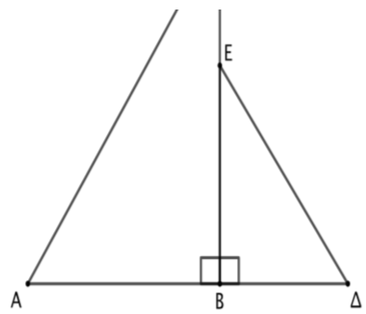


α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου. (Μονάδες 08)
γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΜΓΕ ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4ο: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.
α) Αν η γωνία Α έχει μέτρο 60°, τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)
ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 08)



7

<u>ΘΕΜΑ1</u>

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1) Δύο ορθογώνια τρίγωνα τα οποία έχουν μία οξεία γωνία τους ίση , είναι όμοια

2) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α , β , γ ισχύει ότι :

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \ , \ \alpha\nu \ \kappa\alpha\iota \ \mu\acute{o}\nu o \ \alpha\nu \ \hat{A} > 90^o$$

3) Το εμβαδόν Ε ενός τραπεζίου ισούται με: $\mathrm{E} = \frac{(\mathrm{B}+\beta)}{\upsilon} \cdot 2$,

όπου **Β** , **β** οι βάσεις του τραπεζίου και **υ** το ύψος του .

4) Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό , όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες .

5) Για την γωνία $\boldsymbol{\varphi_\nu}$ και την κεντρική γωνία $\boldsymbol{\omega_\nu}$ ενός κανονικού ν-γώνου ισχύει ότι:

$$\varphi_\nu + \omega_\nu = 180^\circ$$

(μον. 10)

Β. Να αποδείξετε ότι : Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

(μον. 15)

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, ΑΒ = 6 και ΑΓ = 3. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε ΑΔ = 4.Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

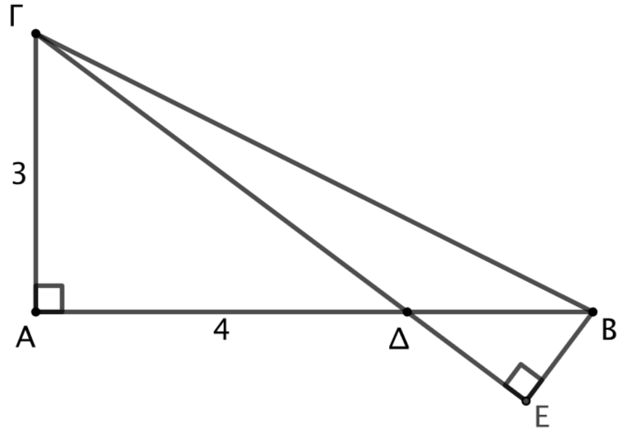
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 3ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) , φέρουμε το ύψος ΑΔ , (σχ. 1)

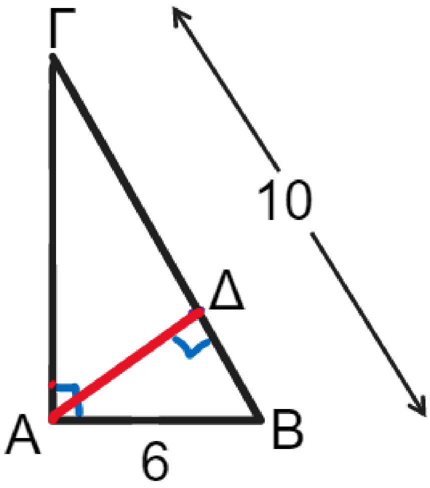
Αν είναι ΑΒ = 6 και ΒΓ = 10 να υπολογίσετε :

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ

β) Το ύψος ΑΔ (Δίνεται ότι : $\sqrt{23,04} = 4{,}8$)

(μον. 13 , 12)

(σχ. 1)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $\mathrm{AZ} = \frac{3}{4}\mathrm{AB}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{BZ} = \frac{5}{4}\mathrm{AB}$.

(Μονάδες 6)

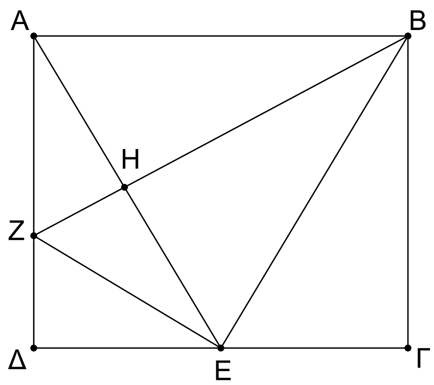
β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{BE}^2 = \frac{5}{4}\mathrm{AB}^2$ και $\mathrm{ZE}^2 = \frac{5}{16}\mathrm{AB}^2$,
   (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.
   (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.

(Μονάδες 8)


Α
Β
Η
Ζ
Δ
Ε
Γ

8

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ,** αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

β) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει ότι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, τότε αυτό είναι αμβλυγώνιο.

γ) Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ισότητα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\cdot\gamma\cdot$συνΑ εκφράζει το νόμο συνημιτόνων.

δ) Ο τύπος $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ εκφράζει το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου R.

ε) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) με ύψος ΑΔ ισχύει: $A\Delta^2$ = ΒΔ · ΔΓ

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας (Πυθαγόρειο Θεώρημα).

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με ΑΓ = ΒΓ = 3 και ΑΒ = ΑΔ = 2.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $B\hat{A}\Gamma$ είναι ίσες.

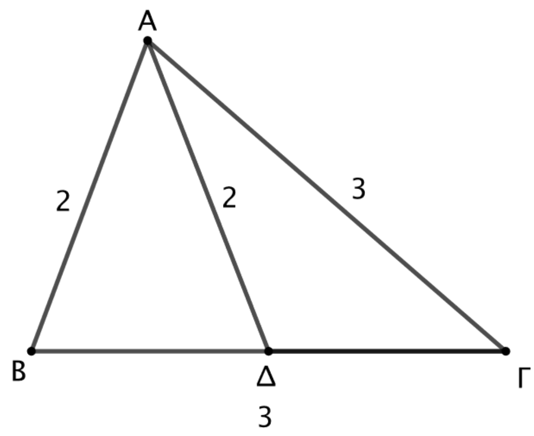
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 3

Στο σχήμα δίνονται ότι $\widehat{B} = \widehat{E} = 90°$, ΑΕ = 8, ΕΒ = 4 και ΔΕ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

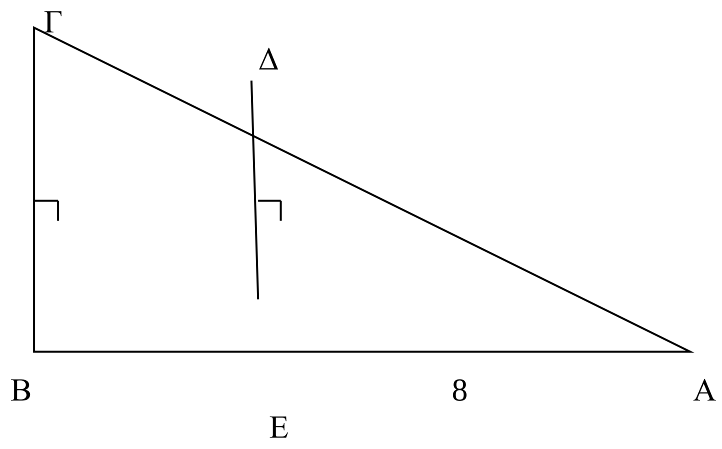
(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με υποτείνουσα $ΒΓ = 10$ και έστω ότι $Δ$ είναι η προβολή της κορυφής $Α$ στην $ΒΓ$.

α) Αν $ΔΒ = 2$ να υπολογίσετε:

i. το ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$,

(Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο $Α$ κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $(ΑΒΓ) = 5ΑΔ$.

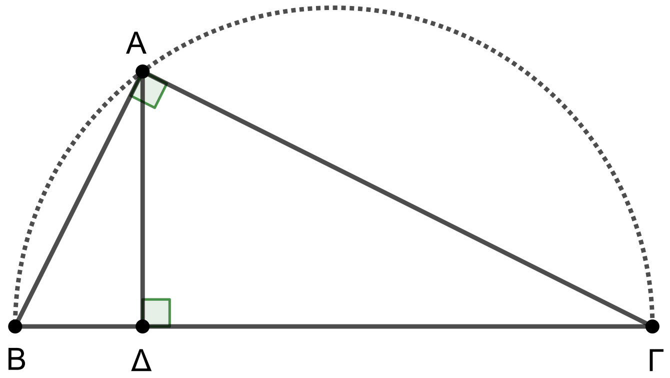
(Μονάδες 7)

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του $Α$ πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$, το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)


Α
Β
Δ
Γ

9

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη σε μία από τις πλευρές ενός τριγώνου, χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές ή τις προεκτάσεις τους, σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.
2. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.
3. Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
4. Δύο ισοσκελή τρίγωνα τα οποία έχουν, μία γωνία του ενός ίση με μία αντίστοιχη γωνία του άλλου, είναι όμοια.
5. Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε, με το κατάλληλο σχήμα, το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5}AB,\ \ E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma,\ \ Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$$

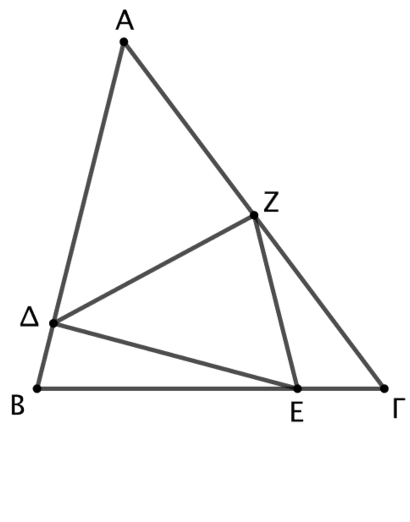
α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}, \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}, \frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)}$$

(Μονάδες 15)

β) Αν είναι (ΑΒΓ) = 120, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 3

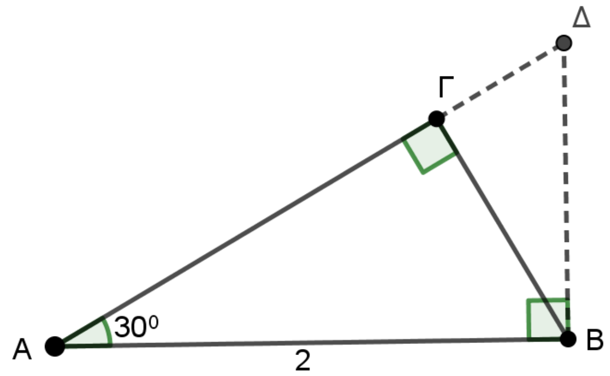
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{Γ} = 90^0$, $\widehat{Α} = 30^0$ και ΑΒ = 2.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = \sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι $(ΚΑΒ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 08)

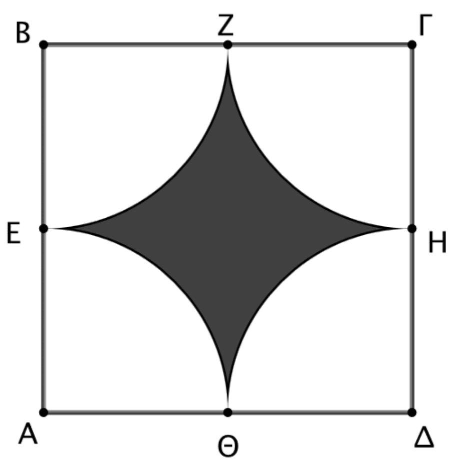
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$Ε = α^2(4 - π)$$

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

(Μονάδες 05)



Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1

ΘΕΜΑ 1

Α . Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναισωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1 Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα

2.Η ευθεία $\chi=\chi_0$ είναι παράλληλη στον άξονα y'y

3.Δυο ευθείες είναι παράλληλες όταν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης ισούται με τη μονάδα

4.Η εξίσωση της παραβολή C με εστία Ε ($\frac{p}{2}$,0) και διευθετούσα δ: x= - $\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $y^2= 2px$

5.Η ευθεία με εξίσωση Αχ+Βy+Γ=0 με Α≠ 0 ή Β≠ 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα δ(Β, - Α)

(Μονάδες 10)

Β. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα , να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA)=(MB)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Γ(2,3). Έστω ότι το ύψος και η διάμεσος που άγονται από την κορυφή Α έχουν εξισώσεις 3x+5y+6=0 και x-11y+2=0 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες (-2,0)

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ

(Μονάδες 6)

γ)Να αποδείξετε ότι οι συνταγμένες του Β είναι (5,-2)

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

α)Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 2$, $\varepsilon_2 : y = x - 2$ και τα σημεία $\mathrm{A}(-2,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

i. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M, του AB.

(Μονάδες 2)

iii. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

(Μονάδες 6)

β) Ο κύκλος (K, ρ) έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών ε_1 και ε_2.Αν το κέντρο K του κύκλου (K, ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta) : x = \lambda$,όπου $\lambda \in \mathbf{R}$, τότε:

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου K, συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του λ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους (K, ρ), για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$.

(Μονάδες 8)

2

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: \mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \Gamma = 0$ είναι ίση με $\mathrm{d}(\mathrm{M}, \varepsilon) = \frac{\mathrm{Ax}_0 + \mathrm{By}_0 + \Gamma}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$.

2. Για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ισχύει ότι $\vec{0} \upuparrows \vec{\alpha}$.

3. Ένας κύκλος λέγεται μοναδιαίος όταν έχει ακτίνα 1.

4. Το διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1} = (1{,}3)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $\chi + 3\psi - 8 = 0$

5. Αν ε η εκκεντρότητα της έλλειψης, ισχύει ε>1.

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, ισχύει η συνεπαγωγή

$$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α)Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β)Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της ($\frac{1}{8}$,1) είναι παράλληλη στην ευθεία ε: 8x – 2y + 3 = 0. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία Α(1,-2), Β(-3,4) και Γ, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι Γ(6, -10). (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΓΜ. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

Η ευθεία ε με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $\mathrm{A}(8,1)$, $\mathrm{B}(-7,4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε), ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π. Να βρείτε:

α) ποια πόλη από τις A, B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.

(Μονάδες 6)

β) τις συντεταγμένες του Π, αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη Β.

(Μονάδες 7)

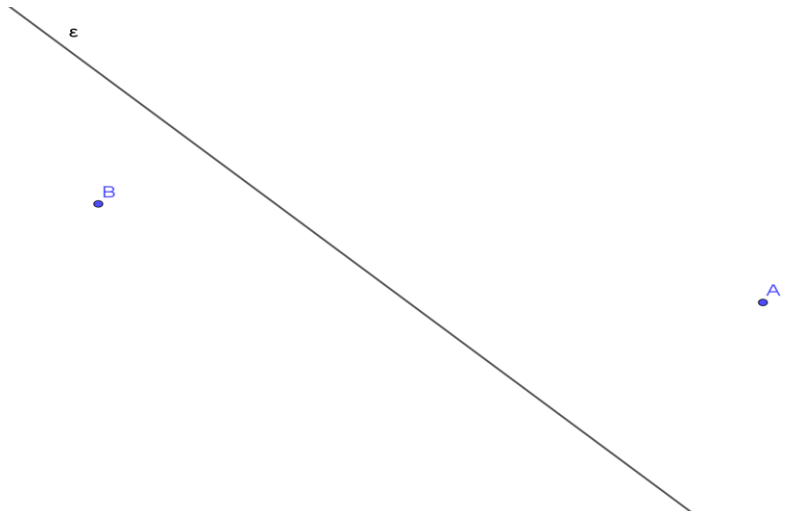
γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A, B.

(Μονάδες 6)

ii. το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

(Μονάδες 6)



3

Θέμα 1: **Α.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1) Εστω Α (− 1 , 2) και Β (5 , 10) δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου . Τότε για το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι : $\overrightarrow{AB}$ = (6 ,8)

2) Εστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (4 , 5)$ και $\vec{\beta} = (3 , 1)$. Τότε για το εσωτερικό τους γινόμενο ισχύει ότι : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 17$

3) Εστω Γ (2 , − 1) και Δ (− 3 , 9) δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου . Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ και Δ είναι $\boldsymbol{\lambda = 2}$

4) Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 , με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα , είναι κάθετες μεταξύ τους εάν και μόνον εάν ισχύει: $\lambda_1 \bullet \lambda_2 = \mathbf{1}$,

5) Η εφαπτομένη του κύκλου $\chi^2 + \psi^2 = 100$ στο σημείο του Μ (6 , 8) , έχει εξίσωση $8\chi + 6\psi = 100$

(μον. 10)

Β. Αν Α(χ_1 , y_1) και Β(χ_2 , y_2) είναι δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και Μ(χ , y) το μέσον του ΑΒ , τότε να δείξετε ότι :

$$\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ (μον. 15)

Θέμα 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$,$\Delta(1,-2)$ και$\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 3 : Εστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3 , \kappa)$ και $\vec{\beta} = (8 , 2)$, $\kappa \in R$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό τους γινόμενο συναρτήσει του κ .

β) Ποια η τιμή του κ ώστε τα $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ να είναι κάθετα ;

(μον. 12 , 13)

Θέμα 4

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

ii. Των εστιών Ε και Ε' της έλλειψης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

4

Θέμα 1ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1. Ο συντελεστής διεύθυνσης κάθε διανύσματος ορίζεται εφόσον η τετμημένη του είναι μη μηδενική.

2. Οι ευθείες y=2x+5, y-2x=0 είναι παράλληλες μεταξύ τους.

3. Η Αx+Βy+Γ=0 αποτελεί εξίσωση ευθείας για οποιαδήποτε τιμή των Α,Β.

4. Η εξίσωση $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{100}=1$ είναι έλλειψη με εστίες στον xx'.

5. Η εξίσωση $x^2-y^2=1$ είναι ισοσκελής υπερβολή.

(Μονάδες 10)

B.

Δίνονται $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$ με x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 $\in\Re$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\vec{a}\bullet(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{a}\bullet\vec{\beta}+\vec{\alpha}\bullet\vec{\gamma}$ (επιμεριστική ιδιότητα)

(Μονάδες 15)

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση

$$(y-1)^2=(3+x)(1-x) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(-1,1) και ακτίνα R=2.

(Μονάδες 9)

β) Η αρχή Ο(0,0) των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).

(Μονάδες 7)

γ) Η ευθεία (ε): x+y=2 είναι τέμνουσα του (K,R)

(Μονάδες 9)

Θέμα 3ο

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) 3x-6y=0 και (ε_2): y=4x+7.
α) Βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης κάθε ευθείας.

(Μονάδες 4)

β) Βρείτε αν υπάρχει το κοινό σημείο των παραπάνω ευθειών. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

γ) Αν Κ(2,5) ισχύει $d(K,\varepsilon_1)-d(K,\varepsilon_2)>0$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Θέμα 4ο

Δίνονται τα σημεία Α(0, -1), Β(λ, 1) και Γ(λ-2, λ-3), όπου $\lambda\in R$.
α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^{o}$.

(Μονάδες 7)

β) Για λ = - 2 ,να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο τότε $\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΒΔ}$
2. Η ευθεία ψ= -χ + 2 σχηματίζει γωνία 135^o με τον άξονα χ΄χ
3. Το σημείο Α(1, -1) ανήκει στον κύκλο $χ^2 + ψ^2 = 2$
4. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με det $(\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΑΓ})$
5. Στην παραβολή $ψ^2 = 2\cdot ρ\cdot χ$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι η $χ= \frac{p}{2}$

(10Μ)

Β. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $χ^2 + ψ^2 = ρ^2$ σε ένα σημείο του $Α(χ_1, ψ_1)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε αυτό το σημείο έχει εξίσωση $χ\cdot χ_1 + ψ\cdot ψ_1 = ρ^2$ (15Μ)

ΘΕΜΑ 2

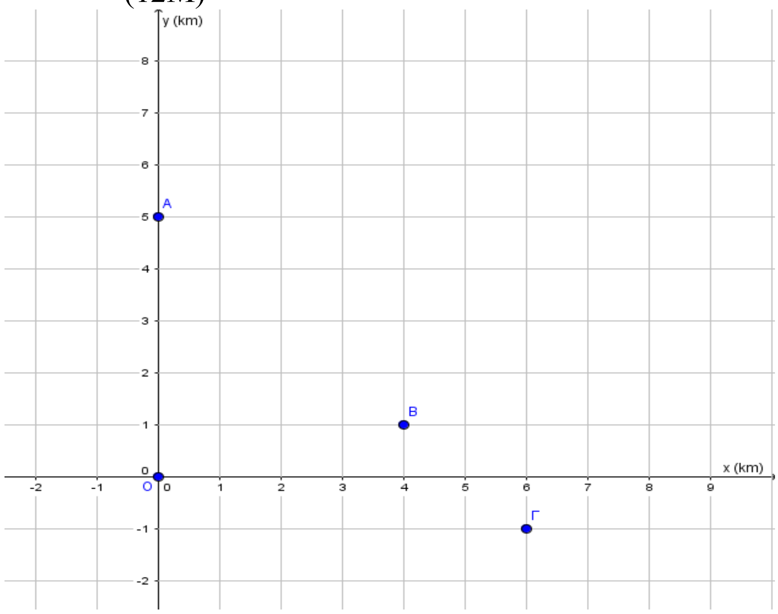
Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5), B(4,1)$ και $Γ(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.

α) ι) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BΓ}$. (6Μ)

ιι) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρζει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς (7Μ)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό $Γ$.

(12Μ)



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + \lambda\chi + (4-\lambda)\psi - 2\lambda - 14 = 0$

α). Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του (5+2+2= 9Μ)

β). Έστω ότι το κέντρο του κύκλου C που παριστάνει η εξίσωση (1) ανήκει στην ευθεία ε: $5\chi + 3\psi + 4 = 0$. Να βρείτε

ι) τον αριθμό λ (5Μ)

Για $\lambda = -2$

ιι) τις εφαπτομένες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon_1 : 4\chi + 2\psi - 2023 = 0$ (5Μ)

ιιι) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με εστία στον άξονα χ΄χ η οποία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C (6Μ)

ΘΕΜΑ 4

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2, 6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ) , $\lambda \in R$

α) ι) Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιά του (7Μ)

ιι) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι (5Μ)

β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε :

ι) Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (6Μ)

ιι) Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι (7Μ)

6

ΘΕΜΑ Α

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- **i.** Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$.
- **ii.** Αν $\vec{\alpha}=5\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$.
- **iii.** Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0$ τότε η γωνία $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$ είναι οξεία.
- **iv.** Το σημείο Α(2 , -1) ανήκει στην ευθεία $2\chi + y = -1$.
- **v.** Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.

Μονάδες 10

Β. Αν Μ το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και Ο ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου τότε να δείξετε ότι ισχύει : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,5)$ και $\vec{\beta}=(1,-3)$.

1. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

Μονάδες 12

2. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v}=(8,-21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο κύκλος C: $\chi^2 + y^2 - 2\chi - 4y + 4 = 0$.

1. Να αποδείξετε ότι το κέντρο του είναι Κ (1 , 2) και η ακτίνα του 1.

Μονάδες 8

2. Να βρείτε το συμμετρικό Κ΄ του σημείου Κ ως προς την ευθεία ε : $y = \chi - 3$

Μονάδες 7

3. Να γράψετε την εξίσωση του συμμετρικού κύκλου του C ως προς την ευθεία ε.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: Α $(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda\in R$.
- τη γραμμή γ_2, που περνάει από το σταθμό Σ (-4, 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-1, 3)$.

1) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2.

Μονάδες 10

2) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο Κ(1, 1) του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές $γ_1$ και $γ_2$. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές.

Μονάδες 9

3) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής $γ_1$.

Μονάδες 6

7

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.
2. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $Α(x_o,y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $x = x_o$.
3. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = ρ^2$ σε ένα σημείο του Α (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = ρ^2$.
4. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.
5. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο Ε(2,0).

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $Κ(X_o,Y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση :$(X - Xo)^2 + (Y - Yo)^2 = \rho^2$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο Μ . (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $ε_1$,$ε_2$ και $ε_3$: 3x-y=4 διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|$, $|\vec{\delta}|$ (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση 3x + 4y = 25 περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα 2.

α) Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

(Μονάδες 04)

i. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 05)

ii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (Μονάδες 08)

β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού;

(Μονάδες 08)

8

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή **(Σ)** ή Λανθασμένη **(Λ)** , γράφοντας στην κόλλα σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i) Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x=x_0$.

iii) Η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$ έχει εστία το σημείο $E(1,0)$.

iv) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

v) Η εξίσωση $x^2+y^2=\alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

(μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου $M(x,y)$ δύο σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{και} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $3x - y = 5$ και ε_2: $x - y + 1 = 0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους Μ.

(Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(3,4) και είναι κάθετη στην (ε_2).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1).

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία $A(1,3), B(-2,2)$ και η ευθεία ε: $3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β.

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

(Μονάδες 8)

γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ**.**

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:
(ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ).

(Μονάδες 7)

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

1

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο την απαντήσεων στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στον αριθμό τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1.Το αποτέλεσμα της πιθανότητας είναι αρνητικός αριθμός.

2. Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες στις ποσοτικές και στις ποιοτικές .

3. Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV είναι αρνητικός.

4. Η επικρατούσα τιμή M_0είναι η παρατήρηση με τη μικρότερη συχνότητα.

5. Τυπική απόκλιση s είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσηςS^2 .

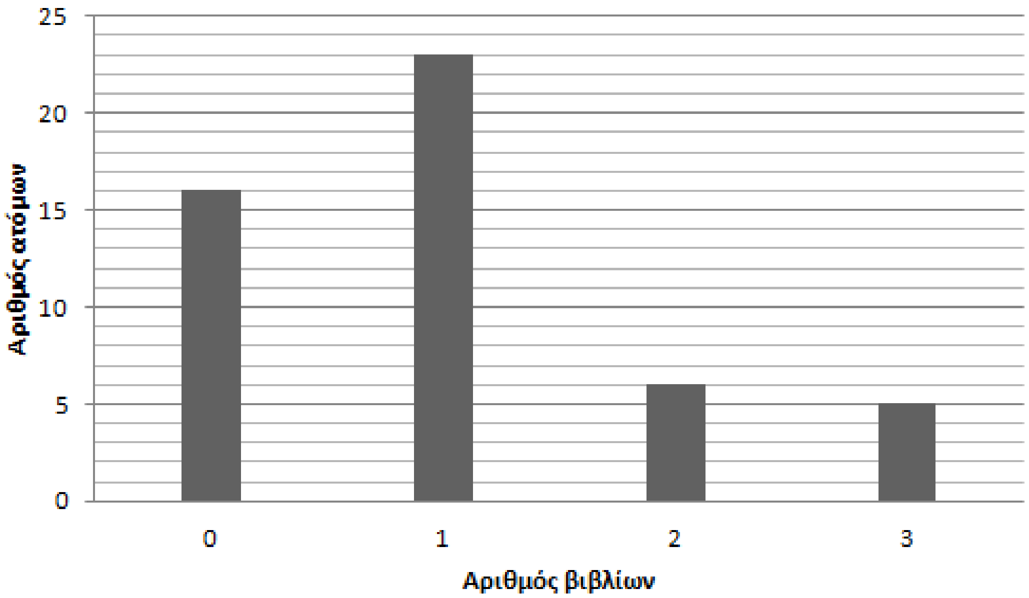
(Μονάδες 10)

Β. Σε ένα πείραμα τύχης με Ν ισοπίθανα αποτελέσματα ανά δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Έγινε μια έρευνα σε ένα δείγμα ενηλίκων που αφορούσε τον αριθμό βιβλίων που διάβασαν κατά την διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών τους. Τα ευρήματα παρουσιάζονται στο ακόλουθο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον πίνακα συχνοτήτων που ακολουθεί.

Αριθμός βιβλίων	Αριθμός ατόμων
Σύνολο	

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων, που διάβασαν κατά τη διάρκεια των διακοπών τους, τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

Γ1. Να κατασκευαστεί το δενδροδιάγραμμα των πιθανών αποτελεσμάτων.

(Μονάδες 12)

Γ2. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του (Ω) του πειράματος

(Μονάδες 7)

Γ3. Να βρείτε τη πιθανότητα του ενδεχομένου Α , δηλαδή το Ρ(Α) , να φέρουμε μια φορά κορώνα και δύο φορές γράμματα και του ενδεχομένου Β , δηλαδή το Ρ(Β) , να φέρουμε τρεις φορές γράμματα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Σε μία έρευνα συμμετείχαν 200 άτομα, τα οποία συνδέθηκαν τουλάχιστον μία φορά την προηγούμενη εβδομάδα στο διαδίκτυο. Η ερώτηση της έρευνας αφορούσε τη συσκευή ή τις συσκευές με τις οποίες συνδέθηκαν. Το παρακάτω διάγραμμα Venn για τα άτομα που συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο,με φορητό υπολογιστή ή με επιτραπέζιο υπολογιστή δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας.

α) Πόσα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:

iii. συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο,
(Μονάδες 3)

iv. συνδέθηκαν μόνο με κινητό τηλέφωνο,
(Μονάδες 3)

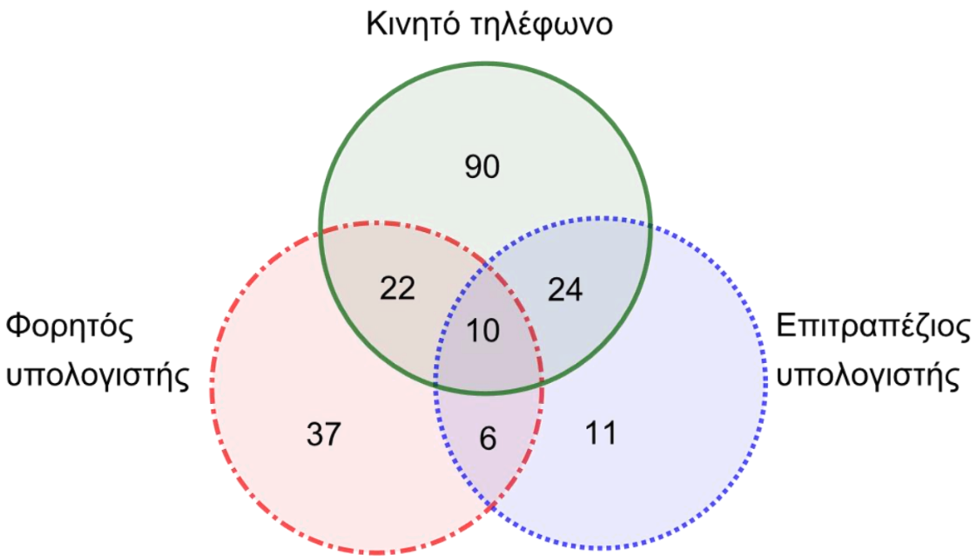
v. συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο αλλά όχι με επιτραπέζιο υπολογιστή;
(Μονάδες 4)

β)Ένα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, επιλέγεται τυχαία.Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο αυτό κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:

i. να συνδέθηκε με κινητό τηλέφωνο,
(Μονάδες 5)

ii. να συνδέθηκε τουλάχιστον με δύο τρόπους,
(Μονάδες 5)

iii. να συνδέθηκε ακριβώς με έναν από τους τρεις τρόπους.
(Μονάδες 5)


Κινητό τηλέφωνο
90
22
24
10
Φορητός υπολογιστής
Επιτραπέζιος υπολογιστής
37
6
11

2

ΘΕΜΑ 1ο:

Α. Να δώσετε ορισμούς για

i) το απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο.

ii) τα σύνθετα ενδεχόμενα.

iii) το αδύνατο ενδεχόμενο.

(15 μονάδες)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(10 μονάδες)

α) Οι θερμοκρασίες που σημειώθηκαν την τελευταία εβδομάδα του Απριλίου σε μία πόλη ήταν 23, 25, 27, 19, 23, 22 και 24 βαθμοί Κελσίου. Το εύρος των τιμών αυτών είναι 2 βαθμοί Κελσίου.

β) Η μεταβλητή μίας έρευνας που αναφέρεται στην οικογενειακή κατάσταση των εργαζομένων μιας επιχείρησης είναι ποσοτική .

γ) Το χρονόγραμμα χρησιμοποείται για τη γραφική απεικόνιση της εξέλιξης σε σχέση με τον χρόνο ενός μεγέθους, συνήθως οικονομικού ή δημογραφικού.

δ) Ρωτήσαμε 10 μαθητές πόσα αδέρφια έχουν και πήραμε τις απαντήσεις: 2, 1, 0, 0 ,0, 1, 2, 2, 2, 4 . Η επικρατούσα τιμή για το παραπάνω δείγμα είναι το 0.

ε) Η μεταβλητή μίας έρευνας που αναφέρεται στον αριθμό των λογαριασμών που διαθέτουν στα κοινωνικά δικτυα, οι μαθητές ενός σχολείου είναι ποσοτική και διακριτή.

ΘΕΜΑ 2ο: Τα αποτελέσματα μιας έρευνας, σχετικά με την κατανομή των φοιτητών/τριών ανά φύλο σε τρεις τομείς της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, παρουσιάζονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ως προς τον τομέα εκπαίδευσης.

α) Ποιες είναι οι μεταβλητές και ποιο είναι το είδος τους;

(Μονάδες 6)

β) Στο σύνολο των ατόμων που σπουδάζουν Νομική, ποιο είναι το ποσοστό των **γυναικών** και ποιο είναι το ποσοστό των **ανδρών;**

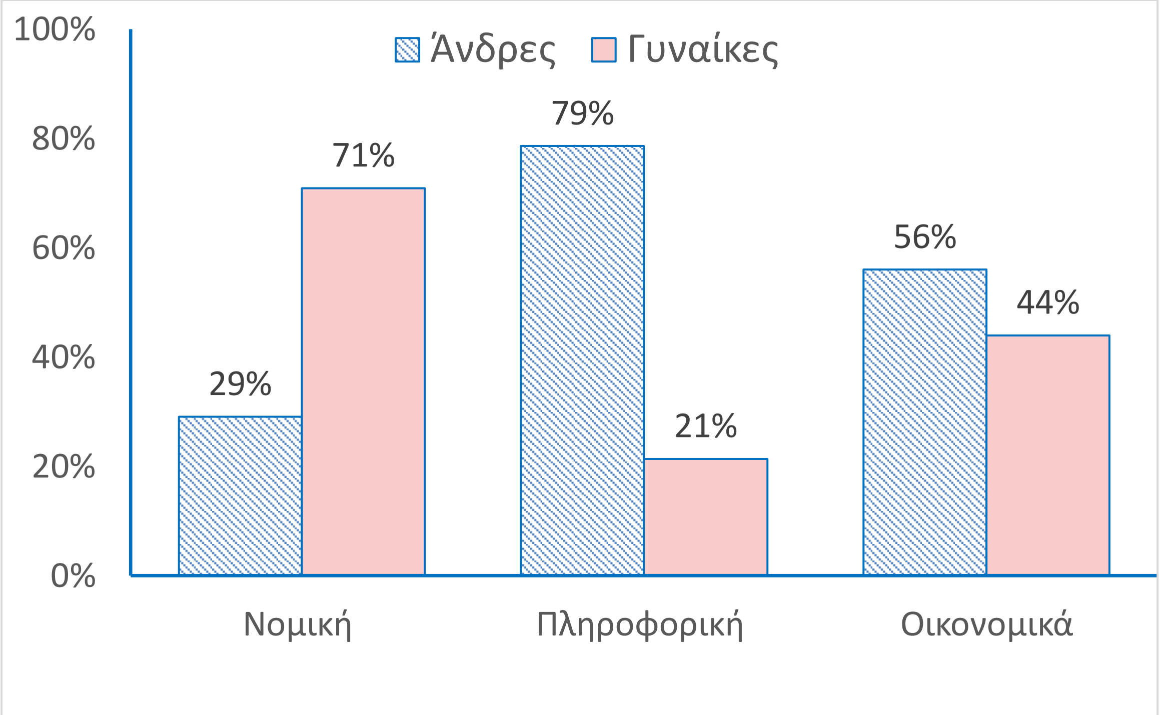
(Μονάδες 6)

γ) Σε ποιον τομέα υπάρχει η μεγαλύτερη εκπροσώπηση γυναικών και σε ποιον η μικρότερη;

(Μονάδες 6)

δ) Δίνεται ότι από τους παραπάνω φοιτητές/φοιτήτριες, σπουδάζουν Οικονομικά 16000 και Πληροφορική 10000. Να συγκρίνετε τον αριθμό των ανδρών που σπουδάζουν Οικονομικά με τον αριθμό των ανδρών που σπουδάζουν Πληροφορική.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 3ο: Στον πίνακα συνάφειας που ακολουθεί καταγράψαμε τη δεύτερη ξένη γλώσσα που επέλεξαν να διδαχθούν οι μαθητές ενός σχολείου.

		Δεύτερη Ξένη Γλώσσα		
		Γερμανικά	Γαλλικά	Σύνολο
Φύλο	Αγόρι	15		75
	Κορίτσι	20		
	Σύνολο			180

α) Σύμφωνα με τον πίνακα:

i. Πόσα κορίτσια επέλεξαν γαλλικά ή γερμανικά ως δεύτερη ξένη γλώσσα;

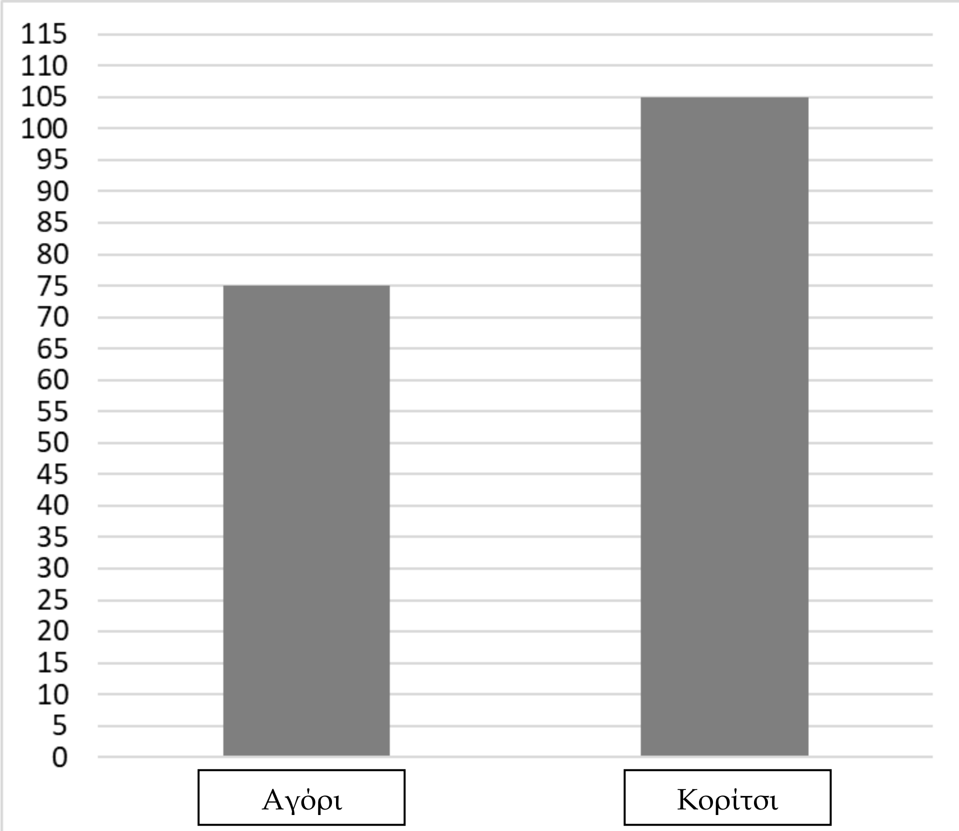
(Μονάδες 5)

ii. Πόσοι μαθητές του σχολείου επέλεξαν τα γαλλικά ως δεύτερη ξένη γλώσσα;

(Μονάδες 10)

β) Γιατί το παρακάτω ραβδόγραμμα δεν είναι στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα συνάφειας;

(Μονάδες 5)



γ) Να σχεδιάσετε το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων φύλου μαθητή και επιλογής δεύτερης ξένης γλώσσας, για τον παραπάνω πίνακα συνάφειας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4ο: Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα, 26 κόκκινα και 26 μαύρα. Τα κόκκινα φύλλα χωρίζονται σε δυο φυλές, τις κούπες και τα καρό, και τα μαύρα επίσης σε δύο, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από:

- εννέα αριθμούς: $2,3,\ldots,10$
- τρεις φιγούρες: βαλές, ντάμα, ρήγας
- έναν άσο.

α) Η Μαρία τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια τράπουλα. Να βρείτε τις πιθανότητες:

vi. το φύλλο να είναι η ντάμα κούπα, (Μονάδες 9)

vii. το φύλλο να είναι κόκκινο και φιγούρα. (Μονάδες 9)

β) Η Μαρία αφαίρεσε από την αρχική τράπουλα τα φύλλα με τους αριθμούς και τράβηξε τυχαία ένα φύλλο. Πόσες φορές αυξήθηκαν οι πιθανότητες του προηγούμενου ερωτήματος;

(Μονάδες 7)

3

<u>Θέμα 1ο:</u>

α) Έστω ένα πείραμα τύχης με ν ισοπίθανα αποτελέσματα. Με$P(A)$ συμβολίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A που περιέχει κ τέτοια αποτελέσματα.
Να αντιγράψετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση:
«Η πιθανότητα του ενδεχομένου A, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας,είναι ίση με .... ».
(Μονάδες 6)

β) Έστω A ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω. Αν A' είναι το συμπληρωματικό ή αντίθετο ενδεχόμενο του A:

i. Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα Venn στο οποίο να φαίνονται τα A και A'.
(Μονάδες 8)

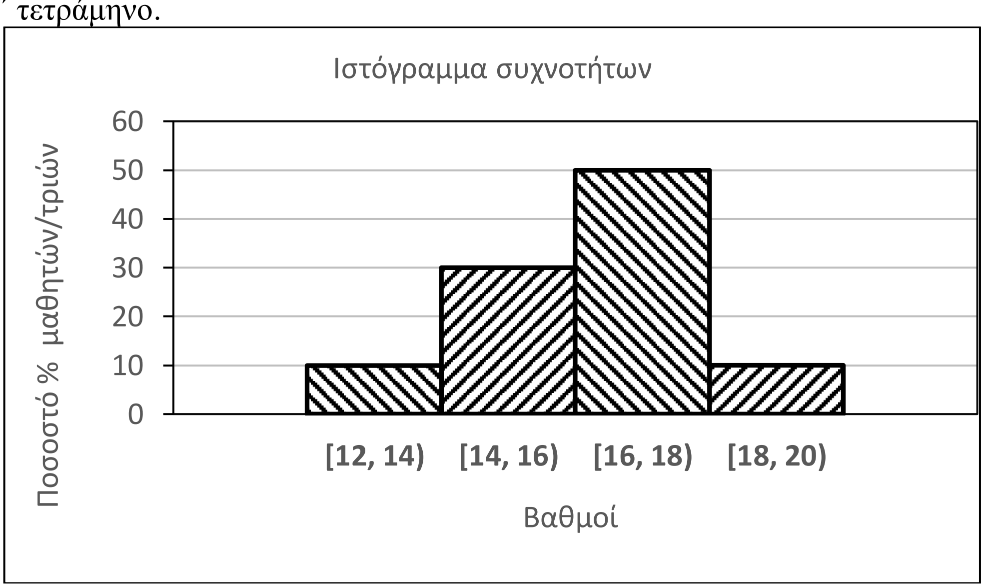
ii.Να εξηγήσετε, με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn, γιατί ισχύει $A \cup A' = \Omega$
(Μονάδες 3)

iv. Να εξηγήσετε, γιατί τα Aκαι A' είναι ασυμβίβαστα.
(Μονάδες 3)

v. Να αποδείξετε ότι $P(A') = 1 - P(A)$, όπου $P(A)$ και $P(A')$ είναι οι πιθανότητεςτων A και A', αντίστοιχα.
(Μονάδες 5)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Το παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων % αντιστοιχεί στους βαθμούς 50 μαθητών και μαθητριών της Β΄ τάξης ενός Λυκείου, στο μάθημα της Λογοτεχνίας για το Α΄ τετράμηνο.



α)Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων. (Μονάδες 10)

Κλάσεις με τους βαθμούς	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
$[12, 14)$		
$[14, 16)$		
$[16, 18)$		
$[18, 20)$		
Σύνολο		

β) Τι ποσοστό των μαθητών ή μαθητριών έχουν βαθμό:

i. 18 ή περισσότερο. (Μονάδες 4)

ii. μικρότερο από 14. (Μονάδες 4)

iii. τουλάχιστον 14. (Μονάδες 7)

Θέμα 3ο:

Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από 13 φύλλα: τους αριθμούς $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, τις φιγούρες βαλέ (J), ντάμα (Q), ρήγα (K) και τον άσο (A). Η Άννα τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα. Έστω τα ενδεχόμενα

Α: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός»

και Μ: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι μπαστούνι».

α) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα $A \cap M$ και $A \cup M$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

viii. A , M και $A \cap M$, (Μονάδες 12)

ix. $A \cup M$. (Μονάδες 5)

Θέμα 4ο:

Ο υπεύθυνος καθηγητής του Γ4 συνέλεξε τις απουσίες των 24μαθητών και μαθητριών του τμήματος, για την Δευτέρα και την Τρίτη της προηγούμενης εβδομάδας και τις καταχώρισε σε ένα ειδικό πρόγραμμα καταμέτρησης απουσιών, με το οποίο υπολόγισε ότι:

- η διάμεσος των απουσιών ήταν $\delta = 2,5$,
- το πρώτο τεταρτημόριο ήταν $Q_1 = 1$,
- το τρίτο τεταρτημόριο ήταν $Q_3 = 4$,
- η ελάχιστη τιμή των απουσιώνήταν $x_{min} = 0$και η μέγιστη τιμή$x_{max} = 14$.

α) Υπάρχει μαθητής ή μαθήτρια του Γ4 που να έκανε τόσες απουσίες, όση είναι η διάμεσος δ;

(Μονάδες 7)

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. Δεν υπάρχει μαθητής ή μαθήτρια του Γ4 που να έχει περισσότερες από 10 απουσίες.

ii. Το πολύ το 25% των μαθητών και μαθητριών του Γ4, δηλαδήτο πολύ 6 μαθητές και μαθήτριες πήραν περισσότερες από 4απουσίες τις δύο αυτές ημέρες.

iii. Υπάρχουν 6 μαθητές και μαθήτριες του Γ4 που δεν έχουν κάνει απουσία τις δύο αυτές ημέρες. (Μονάδες 18)

4

Θέμα 1ο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Οι ποσοτικές μεταβλητές κάθε δείγματος διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

2. Η διάμεσος των παρατηρήσεων 3,4,5,6 ισούται με 4.

3. Η μεταβλητή που αναφέρεται στο χρώμα ματιών των ερωτηθέντων είναι ποιοτική.

4. Το χρονόγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική απεικόνιση της εξέλιξης σε
σχέση με το χρόνο ενός μεγέθους συνήθως οικονομικού ή δημογραφικού.

5. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων 0, -5, 5, 8 είναι 2.

(25 μονάδες)

Θέμα 2ο

Σε ένα σχολείο φοιτούν 120 μαθητές στη Γ Λυκείου και όλοι προετοιμάζονται να διαγωνιστούν στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Κάποιοι από τους μαθητές αυτούς, επιλέγουν να διαγωνιστούν και σε αθλήματα ή Αγγλικά. Συγκεκριμένα, 40 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα, 15 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και στα Αγγλικά, ενώ 10 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα και στα Αγγλικά.

Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους 120 μαθητές και θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα
Α : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα αθλήματα» και
Γ : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα Αγγλικά»

α) Να πείτε πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup \Gamma$ και να βρείτε την πιθανότητα του.
(Μονάδες 13)
β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής διαγωνίζεται μόνο στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού».(Μονάδες 12)

Χρήσιμο τυπολόγιο

Αν Α, Β, Γ στοιχεία δειγματικού χώρου Ω

$P(A \cup \Gamma)=P(A)+P(\Gamma)-P(A \cap \Gamma)$
$P(B')=1-P(B)$

Θέμα 3º

Σε ένα εστιατόριο για γεύμα σερβίρετε: κυρίως πιάτο ψάρι ή κοτόπουλο με συνοδευτική γαρνιτούρα ρύζι ή πατάτες ή λαχανικά και επιδόρπιο φρούτο ή τάρτα.

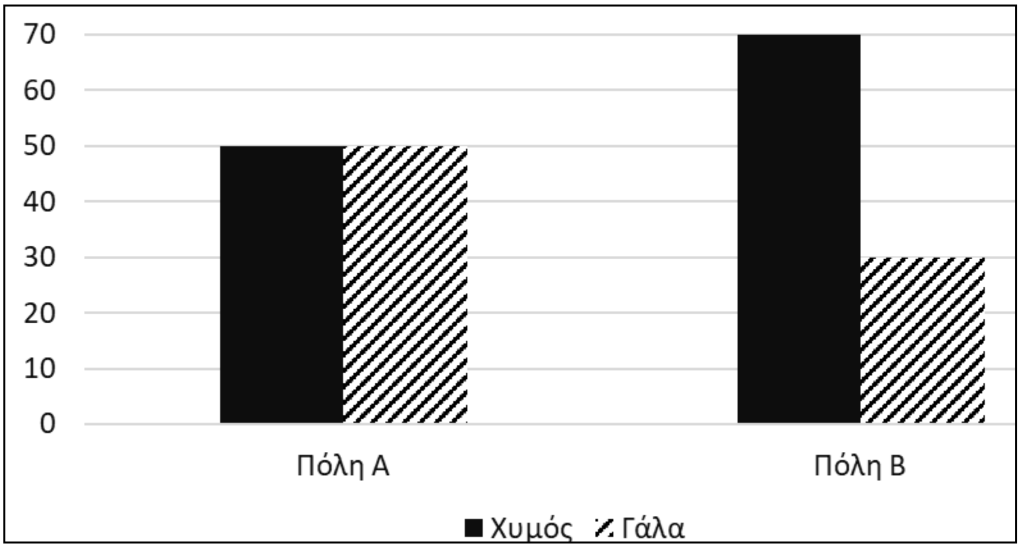
α) Κατασκευάστε το δεντροδιάγραμμα του παραπάνω πειράματος.
(10 μονάδες)

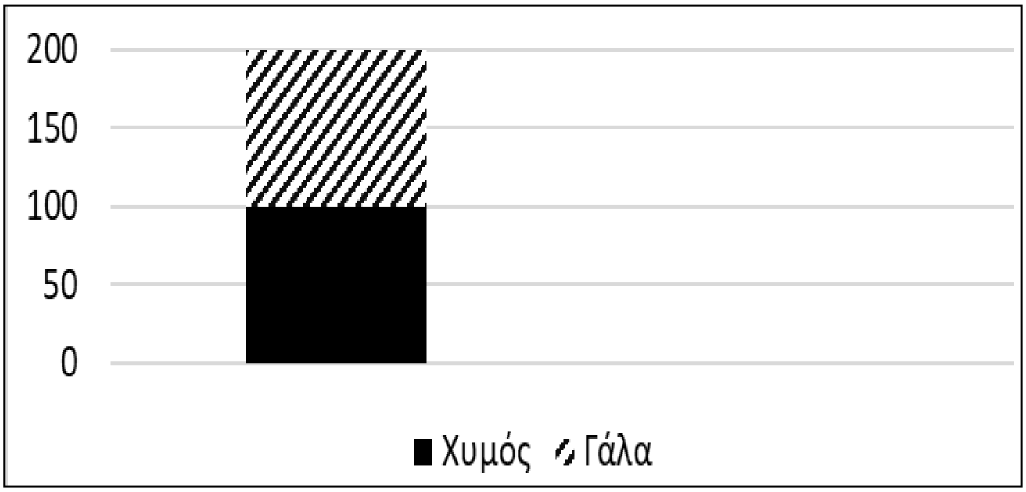
β) Γράψτε έναν δειγματικό χώρο του παραπάνω πειράματος.
(10 μονάδες)

γ) Γράψτε το ενδεχόμενο Α: ένας πελάτης να παραγγείλει κυρίως πιάτο κοτόπουλο με συνοδευτική γαρνιτούρα ρύζι ή λαχανικά και οποιοδήποτε επιδόρπιο.
(5 μονάδες)

Θέμα 4º

Σε δύο πόλεις, Α και Β έγινε έρευνα για το πρωινό ρόφημα που προτιμούν τα παιδιά ηλικίας από 5 έως 12 ετών. Τα αποτελέσματα καταγράφονται στην παρακάτω εικόνα (στο επάνω μέρος) στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, επί τοις εκατό.





Στην εικόνα, στο κάτω μέρος φαίνεται μια από τις δύο ράβδους στοιβαγμένου ραβδογράμματος που αντιστοιχεί στα αποτελέσματα της ίδιας έρευνας.

α) Στην πόλη Α, ποιο ποσοστό των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα προτιμούν γάλα;

(Μονάδες 5)

β) Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στην προτίμηση των παιδιών 5-12 ετών σε χυμό ή γάλα και στην πόλη;

(Μονάδες 8)

γ) Σε ποια πόλη αντιστοιχεί η ράβδος που φαίνεται στο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα και γιατί;

(Μονάδες 7)

δ) Αν γνωρίζετε ότι συνολικά (στις δύο πόλεις)στην έρευνα απάντησαν 700 παιδιά 5-12 ετών, να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παραπάνω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα και να σχεδιάσετε τη ράβδο που λείπει.

(Μονάδες 5)

5

ΘΕΜΑ 1

A_1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α ΄ ισχύει ότι
P(A)= 1 – P(A΄) (Μονάδες 7)

A_2. Πως ορίζεται η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων (Μονάδες 8)

A_3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ)

α) Αν χ_1, χ_2, χ_3 τυχαίες παρατηρήσεις τότε $\overline{\chi} = \frac{\chi_1+\chi_2+\chi_3}{3}$

β) ισχύει $f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu}$

γ) Ποσοτικές λέγονται οι μεταβλητές , των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί

δ) Ποιοτικές μεταβλητές λέγονται οι μεταβλητές , των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί

ε) Ισχύει $s = \sqrt{s^2}$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Για τις ανάγκες μιας έρευνας, ρωτήθηκαν παιδιά για το κατοικίδιο που προτιμούν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας, ως προς το φύλο τους.

		Προτίμηση σε κατοικίδιο		
		Γάτα	Σκύλος	Σύνολο
Φύλο	Κορίτσι	30	60	
	Αγόρι	25	50	
	Σύνολο			

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας. (μονάδες10)

β) Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα συνάφειας:

i.Πόσα παιδιά απάντησαν στην ερώτηση της έρευνας; (Μονάδες 4)

ii.Πόσα από τα παιδιά που απάντησαν ήταν κορίτσια; (μονάδες 4)

iii. Πόσα από τα παιδιά απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο; (μονάδες 4)

iv. Τι μέρος των παιδιών που απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο ήταν κορίτσια; Να το γράψετε ως κλάσμα. (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 3

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

X_ι	ν_ι	f_ι
1	10	
2	20	
3	25	
4	15	
5	30	
Σύνολο		

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 4

Ο Λευτέρης αγωνίζεται σε μία ομάδα ποδοσφαίρου. Κατά τη διάρκεια του τελευταίου πρωταθλήματος η ομάδα του έδωσε 20 αγώνες, στους οποίους ο Λευτέρης σε έναν αγώνα δεν πέτυχε γκολ, σε έναν αγώνα πέτυχε 2 γκολ και στους υπόλοιπους δεκαοχτώ αγώνες πέτυχε 1 γκολ στον καθένα από αυτούς.

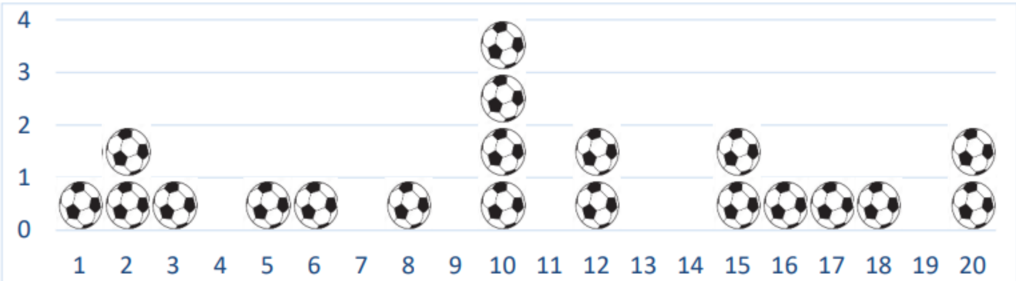
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ο Λευτέρης πέτυχε κατά μέσο όρο 1 γκολ ανά αγώνα, (Μονάδες 5)

ii. η τυπική απόκλιση των γκολ που πέτυχε ο Λευτέρης είναι $\sqrt{0,1}$. (Μονάδες 5)

β) Το παρακάτω εικονόγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό των γκολ που πέτυχε ο Παύλος, σε κάθε αγώνα, κατά τη διάρκεια του ίδιου πρωταθλήματος. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο των γκολ ανά αγώνα, που πέτυχε ο Παύλος, καθώς και την τυπική απόκλιση των γκολ.

(Μονάδες 10)



γ) Ο προπονητής μιας ποδοσφαιρικής ομάδας ενδιαφέρεται για την απόκτηση ενός ποδοσφαιριστή που θα βοηθήσει την ομάδα στο σκοράρισμα στο νέο πρωτάθλημα. Έχει να διαλέξει ανάμεσα στον Λευτέρη και στον Παύλο. Αν τα κριτήρια είναι η συχνότητα και η σταθερότητα στο σκοράρισμα, ποιον θα του προτείνατε με βάση τα παραπάνω δεδομένα;

(Μονάδες 5)

6

ΘΕΜΑ Α

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν Α ενδεχόμενο και Ω ο δειγματικός χώρος, τότε ισχύει: $A \cup A' = \Omega$
2. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ισχύει ότι: $P(A \cup B) \geq P(A) + P(B)$
3. Η μέση τιμή επηρεάζεται απ' τις ακραίες παρατηρήσεις ενός δείγματος περισσότερο από τη διάμεσο.
4. Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A) \geq 1$.
5. Σε μια κανονική κατανομή η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή μ» ισούται με 0,5 .

Μονάδες 10

Β. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β, να αποδείξετε την σχέση:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$$

Μονάδες 10

Γ. Τι ονομάζουμε μέση τιμή ν παρατηρήσεων;

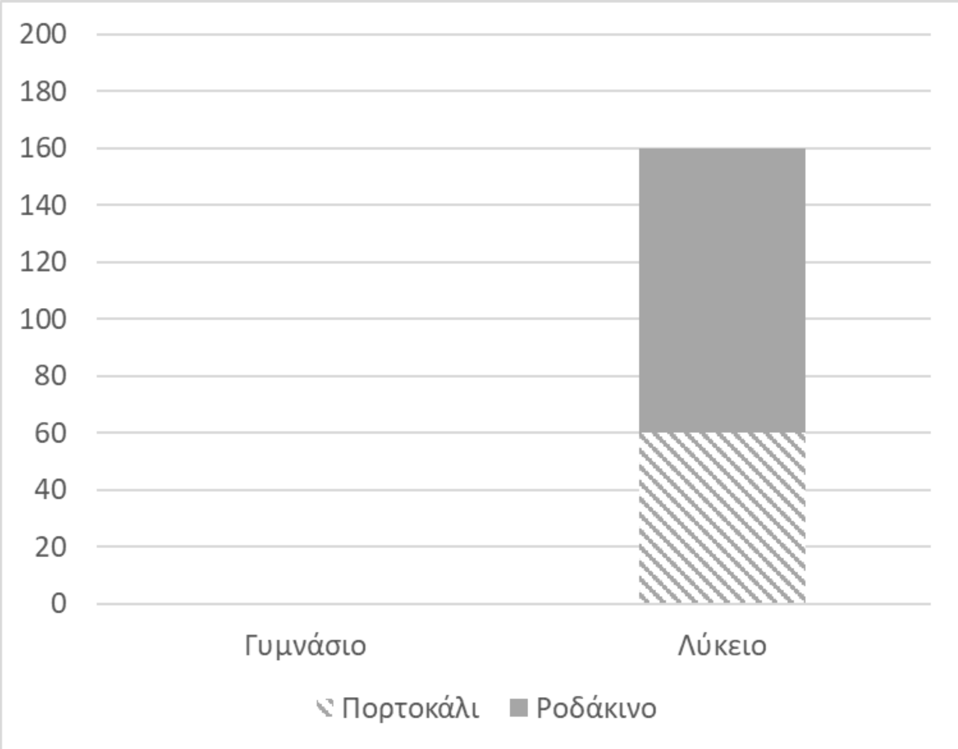
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Στα κυλικεία δύο σχολείων, ενός γυμνασίου και ενός λυκείου, καταγράφηκαν οι πωλήσεις ατομικών συσκευασιών του ίδιου τύπου χυμού, ως προς τη γεύση, πορτοκάλι ή ροδάκινο. Συνολικά καταγράφηκαν οι πωλήσεις 360 συσκευασιών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας:

		Προτίμηση σε γεύση χυμού		
		Πορτοκάλι	Ροδάκινο	Σύνολο
Σχολεία	Γυμνάσιο	120	80	
	Λύκειο	60	100	
	Σύνολο			

1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.
Μονάδες 15
2. Να συμπληρώσετε το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα.
Μονάδες 10



ΘΕΜΑ Γ

Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 μπαταριές, από τις οποίες οι 2 είναι αποφορτισμένες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπαταρίες από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:

1. Οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένες.

Μονάδες 5

2. Το πολύ μία από τις μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένη.

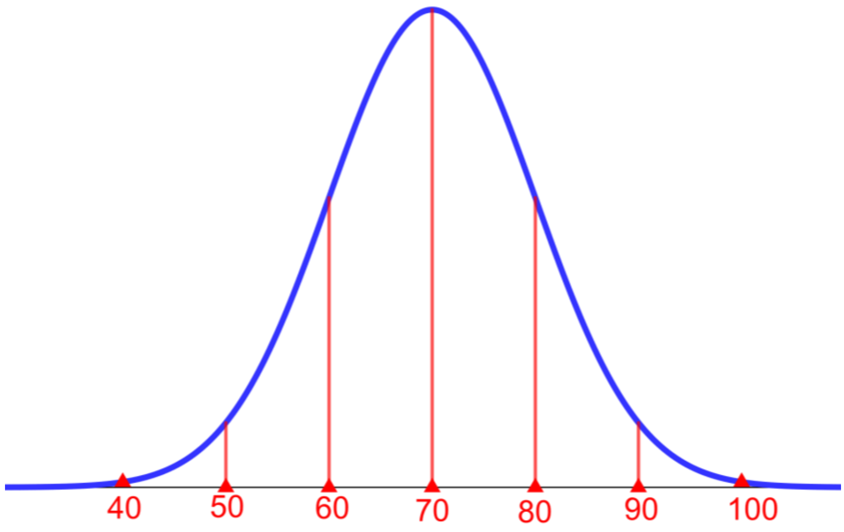
Μονάδες 5

3. Οι μπαταρίες που επιλέξαμε δεν είναι αποφορτισμένες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Υποθέτουμε ότι το βάρος, σε κιλά, των μαθητών λυκείου στην Ελλάδα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 70$ (όπως στο σχήμα) και το 99,7% περίπου των μαθητών έχει βάρος που ανήκει στο διάστημα $(40,100)$.



1. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση σ της κατανομής.

Μονάδες 10

2. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή λυκείου από όλο τον πληθυσμό των μαθητών λυκείου, στην Ελλάδα.

   i. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα $(60, 80)$».

Μονάδες 6

   ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα $(80, 90)$».

Μονάδες 9

7

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Να δώσετε τον ορισμό της Στατιστικής κατά τον R.A. Fisher.

(Μον. 7)

β. Σε μία στατιστική έρευνα: Τι ονομάζουμε **πληθυσμό**, τι **δείγμα** και τι **μεταβλητή**;

(Μον. 9)

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Ο χρόνος που χρειάζεται ένας μαθητής για να απαντήσει σε ένα διαγώνισμα είναι μεταβλητή:

α. ποιοτική **β.** ποσοτική διακριτή **γ.** ποσοτική συνεχής

2. Σε ένα σχολείο με 300 μαθητές θέλουμε να κάνουμε μία έρευνα για το πλήθος των αδερφών τους. Επιλέγουμε για τον σκοπό αυτό προσεκτικά 50 μαθητές και τους ρωτάμε σχετικά. Στην έρευνα αυτή, το δείγμα είναι:

α. οι 50 μαθητές που ερωτήθηκαν **β.** οι 300 μαθητές του σχολείου
γ. οι μαθητές ενός τμήματος του σχολείου

3. Στην έρευνα του προηγούμενου ερωτήματος, η μεταβλητή είναι:

α. ποσοτική συνεχής **β.** ποσοτική διακριτή **γ.** ποιοτική

(Μον. 3x3=9)

ΘΕΜΑ 2ο

Στα κυλικεία δύο σχολείων, ενός γυμνασίου και ενός λυκείου, καταγράφηκαν οι πωλήσεις ατομικών συσκευασιών του ίδιου τύπου χυμού, ως προς τη γεύση, πορτοκάλι ή ροδάκινο. Συνολικά καταγράφηκαν οι πωλήσεις συσκευασιών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας:

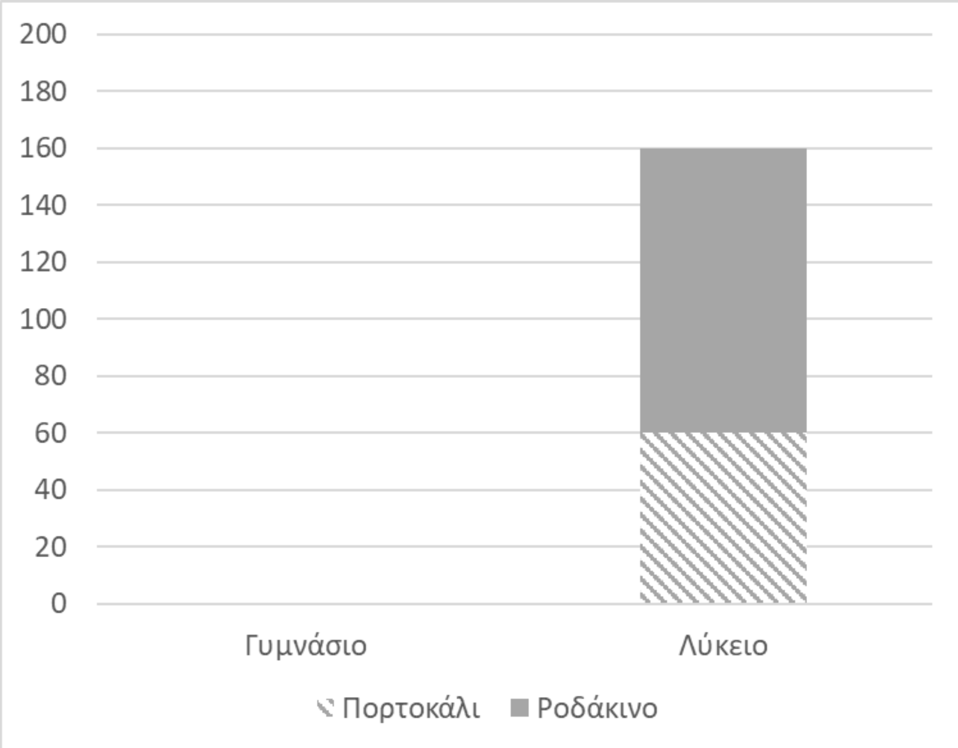
		Προτίμηση σε γεύση χυμού		
		Πορτοκάλι	Ροδάκινο	Σύνολο
Σχολεία	Γυμνάσιο	120	80	
	Λύκειο	60	100	
	Σύνολο			

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

(Μονάδες 15)

β) Να συμπληρώσετε το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα.

(Μονάδες 10)

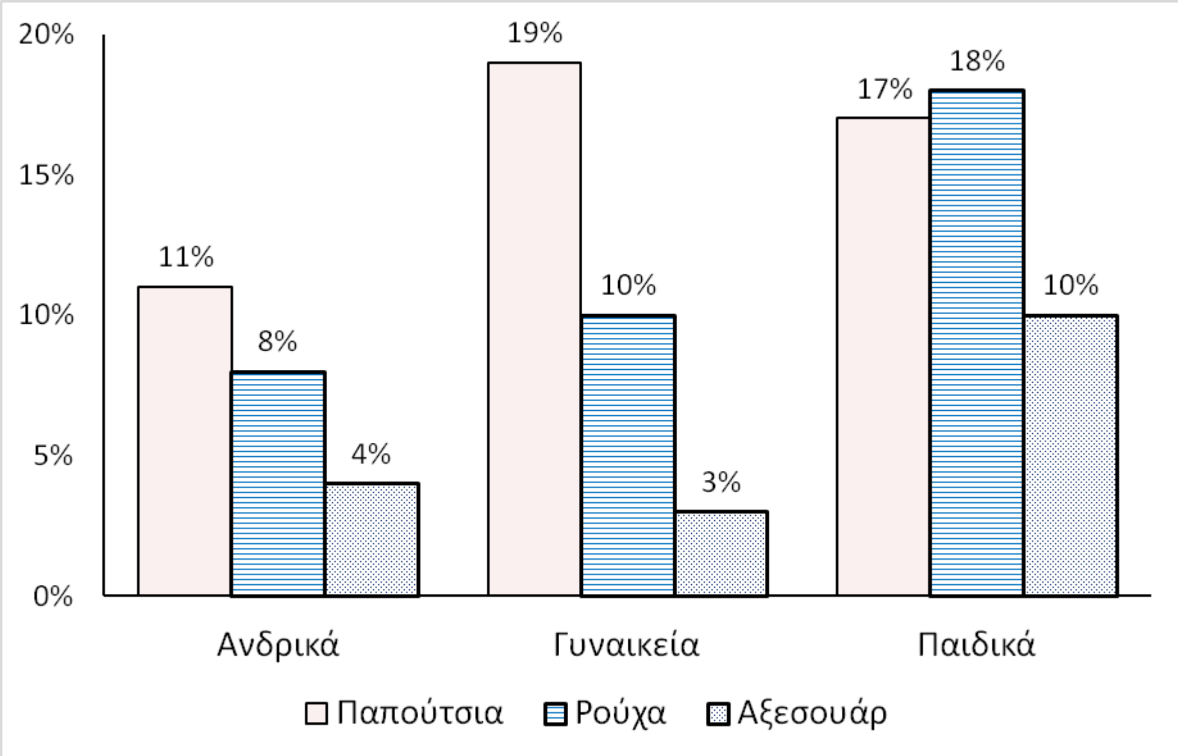


ΘΕΜΑ 3ο

Μια εταιρεία λιανικής πώλησης αθλητικών ειδών κατέγραψε το περασμένο έτος τις πωλήσεις των προϊόντων της: παπούτσια , ρούχα, αξεσουάρ, ανά κατηγορία: ανδρικά, γυναικεία, παιδικά. Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν με το παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, κατηγορίας και προϊόντων ως προς το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος.

α) Από τα ανδρικά προϊόντα, σε ποιο καταγράφηκαν οι περισσότερες πωλήσεις;
β) Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό των ανδρικών προϊόντων στο δείγμα;
γ) Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό των ρούχων στο δείγμα;
δ) Σε ποιο από τα προϊόντα (παπούτσια , ρούχα ή αξεσουάρ), καταγράφηκαν συνολικά οι λιγότερες πωλήσεις;
ε) Σε ποια κατηγορία (ανδρικά γυναικεία ή παιδικά), καταγράφηκαν συνολικά οι περισσότερες πωλήσεις;

(Μονάδες 25)



ΘΕΜΑ 4ο

Σ΄ ένα διαγώνισμα δύο ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής, με τέσσερις δυνατές απαντήσεις η καθεμία τις α , β , γ και δ . Η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η α και στη δεύτερη η δ . Ένας μαθητής επιλέγει τυχαία την απάντηση για καθεμία από τις δύο ερωτήσεις.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i. ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση, (Μονάδες 5)

ii. ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση, (Μονάδες 5)

iii. ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις, (Μονάδες 5)

iv. ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις. (Μονάδες 5)

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1

Θέμα 1 :

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Μια συνάρτηση **f** : Α→R λέγεται συνάρτηση 1 – 1 (ένα προς ένα) , όταν για οποιαδήποτε $\chi_1 , \chi_2 \in A$, ισχύει : αν $\chi_1 \neq \chi_2$ τότε $f(\chi_1) = f(\chi_2)$.

2) Ισχύει ότι : $\lim_{x\to-\infty}(e^x) = -\infty$

3) Εστω μια συνάρτηση **f** συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Αν για τη πρώτη παράγωγο της **f** ισχύει : $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η **f** είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

4) Έστω μια συνάρτηση **f** συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Τότε ισχύει ότι :
Η συνάρτηση **f** είναι κυρτή στο Δ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

5**)** Ισχύει ότι : $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 0$

(μον. 25)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+3x+2,\ x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

iii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x)+2023=0$ έχει θετική λύση.

(Μονάδες 6)

Θέμα 3 :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .

β) Να λύσετε την εξίσωση : $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$

(μον. 10 , 15)

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\frac{lnx}{x}f(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2\cdot lnx\cdot f(x)+xe^x}{x(f(x)+e^x)}dx$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηριστεί τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν η f συνεχής στο [α,β] τότε έχει ελάχιστο
2. Αν $(f(x)\ g(x))' = f'(x)\ g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις
3. Αν f αντιστρέψιμη , τότε ισχύει ότι $f^{-1}(f(x))=x$, $x\in D_f$.
4. Αν $f'(x_0)=0$, τότε x_0 είναι πάντα θέση ακρότατο της f
5. Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(Μονάδες 8)

Γ.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 – 1".
(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - \alpha x - 2$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha\neq1$ η εξίσωση $x^3 + 2x^2 = \alpha x + 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1,1)

(Μονάδες 12)

Β. Αν α =1 , να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to2} \frac{f(x)}{x+2}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x) - 5 = x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(2) = 3$

Α. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Β. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 -$ συνx, με $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 +$ συνx έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π,π).

(Μονάδες 9)

3

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 15)

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1. Αν μια συνάρτηση $f: IR \to IR$ είναι « 1 - 1 » και το Μ(α,β) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f ,τότε το σημείο Λ(β,α) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f^{-1} .
2. Αν για δύο συναρτήσεις f ,g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.
3. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.
4. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(a) - G(\beta)$.
5. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}.$$

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o = 0$. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$.
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=2 και x=3.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$.
α)

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = κ,\ \ κ \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

4

ΘΕΜΑ 1

Α. Πότε μια συνάρτηση f : A->R λέγεται συνάρτηση 1-1 ; (7Μ)

Β. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι : Αν F είναι μια

παράγουσα της f στο Δ, τότε

όλες οι συναρτήσεις της μορφής G (χ) = F(χ) + c, c∈Rείναι παράγουσες της f στο Δ και

κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G (χ) = F (χ) + c , c∈R (8Μ)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α) Αν η f συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ ∈Δ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{a}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

β) Αν μια συνάρτηση fείναι συνεχής στο [α, β],παραγωγίσιμη στο (α, β) και f ΄(χ) ≠0 για κάθε χ∈(α, β) τότε f (α) ≠f (β)

γ) Αν f(χ) > 0 τότε $\lim\limits_{\chi \to \chi_o} f(x) > 0$ κοντά στο χ_o

δ) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο [α, β] ,τότε η f παίρνει στο [α. β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m

ε) Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f ΄΄διαπερνά΄΄ την καμπύλη (10Μ)

ΘΕΜΑ 2

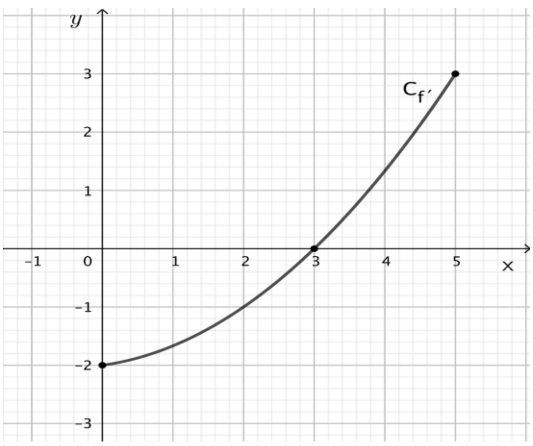
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική της παραγώγου f΄μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα [0,5]

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης f ΄(χ) = 0 ; (6Μ)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,3] και γνησίως αύξουσα στο [3, 5] (10Μ)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο χ_o = 3. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

(9Μ)



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f(χ) = (x-3)lnx

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ

(5Μ)

β) Να αποδείξετε ότι f(2017) < $\frac{f(2018)+f(2016)}{2}$

(6Μ)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{3}$·χlnx - $\frac{2}{3}$= lnx - $\frac{2}{3}$·x (6Μ)

δ) Να βρείτε αν υπάρχουν , τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f (5Μ)

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ= 1 , χ = 3

(3Μ)

ΘΕΜΑ 4

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου)

ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο
  περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim_{t\to+\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot ln(T(t))dt$ ισούται με $\frac{2e^3-3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$.

(Μονάδες 10)

5

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή**,** ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση είναι ΄1-1΄ στο πεδίο ορισμού της τότε είναι και γνησίως μονότονη σε αυτό.
β) Αν f , g συναρτήσεις τότε ισχύει πάντα fog = gof.
γ) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ τότε είναι και συνεχής σε αυτό.
δ) Αν f συνεχής στο Δ και f'(x)<0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.
ε) Η εξίσωση $χ^5 – 2χ^4 +3χ -1 = 0$ είναι αδύνατη.

Μονάδες 10

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην παράγωγο της κάθε συνάρτησης στο $χ_0$.

Στήλη Α - Συναρτήσεις	**Στήλη Β -Παράγωγος**
α. $f(x)=x^3$, $x_0= -1$	**I.** -2
β. $f(x)=ημ2x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$	**II.** 3
γ. $f(x)=3\|x\|$, $x_0=0$	**III.** $\frac{1}{4}$
δ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$	**IV.** 0
	V. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι (f +g)'(χ) = f'(χ) + g'(χ) με f ,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:
$f(x) = \ln(1+ e^x)$ και $g(x) = 2\ln x$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f + g.

(Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f + g ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(χ) = χ^3 +αχ^2 +βχ +1$ με πραγματικούς α, β η οποία παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία -1 και 3.

1. Να δείξετε ότι α = -3 και β = -9.

Μονάδες 10

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της.

Μονάδες 8

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(χ) = 0 έχει ακριβώς μια λύση στο (-1 , 3)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

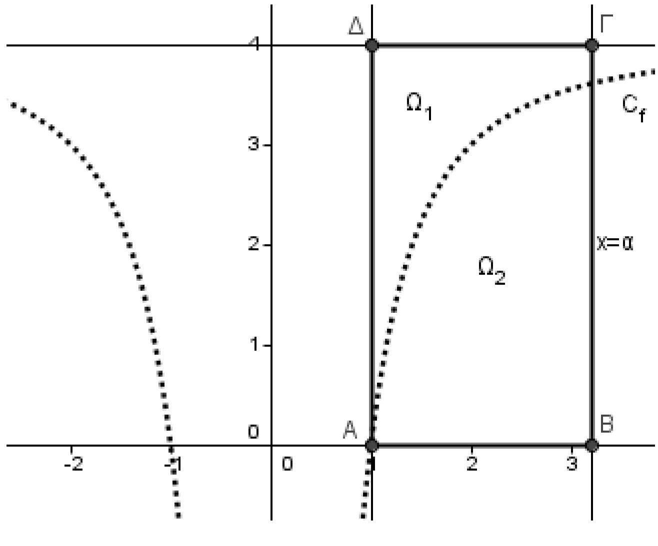
α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$.

(Μονάδες 6)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = α$, $α > 1$ και $y = 4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία $Ω_1$, $Ω_2$.



i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(Ω_1)$, $E(Ω_2)$ των χωρίων.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(Ω_1) = E(Ω_2)$.

(Μονάδες 5)

6

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = \sqrt{x}\ τότε\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $, x > 0$

Μονάδες 08

Β) Πότε το σημείο Α(X_0, f(X_0)) λέγεται σημείο καμπής μίας συνάρτησης f ;

Μονάδες 09

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο φύλλο σας , δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή , ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση f(χ)= ημχ με χ$\in\mathcal{R}$ έχει μία θέση ολικού μέγιστου
2. Μία συνάρτηση f:A→$\mathcal{R}$ είναι συνάρτηση 1-1 , αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in$ A ισχύει η συνεπαγωγή :
   Αν $x_1=x_2$, τότε $f(x_1)=f(x_2)$.
3. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ τότε θα είναι f(x)≥ 0 για κάθε x$\in[\alpha,\beta]$
4. Αν είναι 0<α<1 , τότε $\lim\limits_{\chi\to-\infty} \alpha^x = 0$

Μονάδες 08

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 05

Β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 08

Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”.

Μονάδες 05

Δ) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}.

Μονάδες 07

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ lnx\ - \frac{4}{3}x^3$

1. Να μελετηθεί ως προς την Μονοτονία , Ακρότατα και Σημεία καμπής , εφόσον υπάρχουν

   Μονάδες 15

2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{X\to+\infty} f(x)$

   Μονάδες 05

3. Να δείξετε ότι f(x) ≤ 0 για κάθε x του πεδίου ορισμού της

   Μονάδες 05

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2+x+1\,, & -1 \leq x < 1 \\ 1+\frac{(lnx)^2}{x}\,, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

Μονάδες 7

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$.