

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΪΟΣ 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;

Μονάδες 4

A2. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(α, β)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε συνάρτηση f συνεχή με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [α, β]$, ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \neq 0.$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(α, β)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου: $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

γ. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_0 .

δ. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ε. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση C_f της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+κημx}{x-x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ \lambda, & \text{αν } x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

B1. Να δείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = 4$.

Μονάδες 8

B2. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Μονάδες 10

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 2\ln(8x + 1)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μία συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1) = 0, f'(1) = 1$$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x) = 2\ln x + 3, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = 2xf(x) + x^2f'(x) - x(2\ln x + 1), x > 0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x, x > 0.$$

Μονάδες 5

Γ3. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

ii. Αν ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t) > 1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης $C_{f \circ f}$ της $f \circ f$ με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με 1 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία $x(t_0) = 2$ cm.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left| f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in 0, \frac{1}{e} \text{ με } \alpha < \beta.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x^3 + x, x \in \mathbb{R}$$

Δ1. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 3

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x \cdot (x^4 + x^2 + 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ2. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1)$

Μονάδες 4

ii. Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0$$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$3 < \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t) dt}{\xi_2 - \xi_1} < 42, \text{ με } 0 < \xi_1 < \xi_2 < 1.$$

Μονάδες 4

Δ4. i. Να αποδείξετε ότι:

$$3 \int_0^1 e^{x^2} dx \geq 4$$

Μονάδες 3

ii. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0 , το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 |f^{-1}(x)| dx.$$

Μονάδες 3

Επιστημονικά υπεύθυνος: Καραγιάννης Ιωάννης

Σύμβουλος Εκπαίδευσης Κυκλάδων & Α' Αθήνας