

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελ. 76 Σχολικού Βιβλίου (ΣΒ)

A2. Σελ. 123 ΣΒ

A3. Σελ. 212 ΣΒ

A4. α) Λ σελ. 52 ΣΒ (ανισότητα ημιτόνου)

β) Σ σελ. 128 ΣΒ (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

γ) Σ σελ. 96 ΣΒ (εξίσωση εφαπτομένης)

δ) Λ σελ. 77 ΣΒ (δεν αναφέρεται ότι το διάστημα Δ είναι κλειστό. Αυτό κάνει την πρόταση λανθασμένη, πχ. δες το σχήμα 69β)

ε) Λ πχ. $\int_{-1}^1 x dx = 0$ αλλά $-1 \neq 1$

(το αντίστροφο όμως ισχύει πάντοτε: σελ. 212 ΣΒ)

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $f \circ g$ είναι :

$$D_{f(g(x))} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x > 0 : \ln x \geq 1\} = \{x > 0 : \ln x \geq \ln e\} = [e, +\infty)$$

και ο τύπος: $h(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{\ln x - 1}$

B2. i) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x - 1}} \cdot \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > e$

και επειδή είναι συνεχής στο $x = e$ είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το $[e, +\infty)$ άρα και 1-1 οπότε αντιστρέψιμη.

ii) Έστω ότι για την h υπάρχει διάστημα $[a, \beta]$ με $e \leq a < \beta$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle τότε πρέπει $h(a) = h(\beta)$ και επειδή η h είναι 1-1 θα είναι $a = \beta$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο διάστημα.

B3. Για την αντίστροφη της h λύνουμε την εξίσωση $y = h(x)$ ως προς x στο διάστημα $[e, +\infty)$

$$y = \sqrt{\ln x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \ln x - 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 1 = \ln x \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{y^2+1} = x \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ και}$$

$$x \in [e, +\infty) \Leftrightarrow e^{y^2+1} \geq e^1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 0 \text{ που ισχύει. Άρα } h^{-1}(x) = e^{x^2+1}, \quad x \geq 0$$

B4.

1^{ος} τρόπος:

Ισχύει $e^y \geq y+1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ και με $y = x^2 + 1$ παίρνουμε

$$h^{-1}(x) = e^{x^2+1} \geq x^2 + 1 + 1 = x^2 + 2 > x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ακόμη $x^2 > x \quad \forall x \geq e$ διότι το τριώνυμο $x^2 - x = x(x-1)$ είναι θετικό εκτός των ριζών του 0 και 1 < e

Απ' την άλλη έχουμε $\ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0$ οπότε $\forall x \geq e > 0$ παίρνουμε

$$h(x) = \sqrt{\ln x - 1} \leq \sqrt{x-1-1} < \sqrt{x}$$

Ακόμη $\sqrt{x} < x \quad \forall x > 1$ αφού ισοδύναμα $x^2 > x$ όπως δείξαμε παραπάνω.

Άρα τελικά $h^{-1}(x) > x > h(x) \quad \forall x \geq e$

2^{ος} τρόπος: Αρκεί να αποδείξουμε μόνο την μία από τις δύο ανισότητες διότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων. Επομένως αν η μία είναι πάνω από την διχοτόμο η άλλη θα είναι κάτω από την διχοτόμο.

Ισχύει $x^2 + 1 > x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ διότι το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει $\Delta = -3 < 0$ επομένως

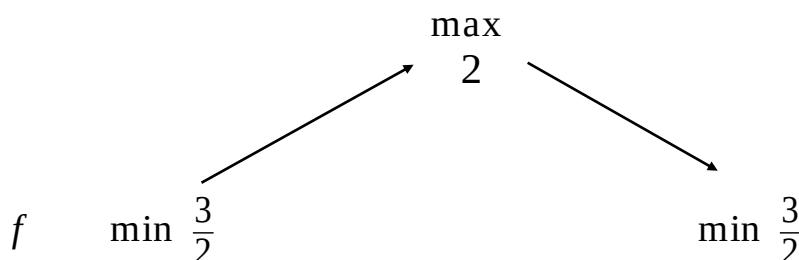
$$h^{-1}(x) = e^{x^2+1} > e^x \geq x+1 > x \quad \text{Άρα} \quad h^{-1}(x) > x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{άρα και} \quad \forall x \geq e$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6 \frac{-(3+x^2)'}{(3+x^2)^2} = \frac{-12x}{(3+x^2)^2}$ και το

πρόσημο της παραγώγου είναι:

x	-1	0	+1
f'	+	0	-



Μονοτονία: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 2 στη θέση 0 και ολικό ελάχιστο το 3/2 στις θέσεις -1 και 1

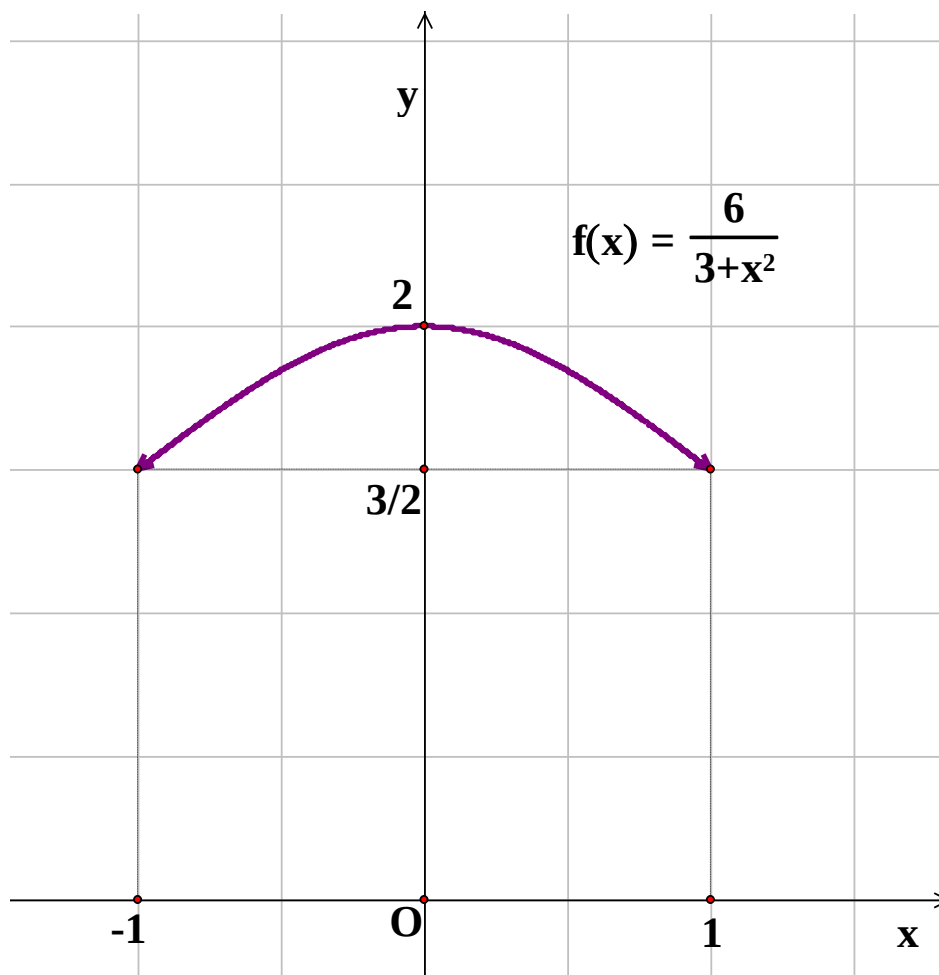
Γ1 ii) (Με άτοπο) Έστω ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ ώστε $f(\alpha) + f(\beta) = \ln 4$ τότε

$f(\alpha) + f(\beta) \stackrel{\Gamma 1 i)}{\geq} \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ και επομένως ισχύει $\ln 4 \geq 3$ που είναι άτοπο διότι απ' την

ανισοϊσότητα $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ (με το $=$ μόνο για $x=1$) είναι $\ln 4 < 4 - 1 = 3$

Γ2 Είναι $f''(x) = 36 \frac{x^2 - 1}{(3 + x^2)^3} < 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ άρα f κοίλη.

Σχεδίαση: Επειδή η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα δεν έχει ασύμπτωτες και οι πληροφορίες για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο είναι αρκετές για την γραφική της παράσταση η οποία θα σχεδιαστεί κάτω ακριβώς απ' τον πίνακα μεταβολών. Συγκεκριμένα, γράφουμε πάνω πάνω στην κόλλα του τετραδίου μας τον πίνακα μεταβολών της f με γραμμές τις x, f', f'', f και κάτω ακριβώς απ' το 0 του πίνακα σχεδιάζουμε τον άξονα των y ώστε να αποτυπώσουμε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο το γράφημα! Προκύπτει τότε η εξής γραφική παράσταση:



Γ3 Η f είναι άρτια αφού $f(-x) = \frac{6}{3+(-x)^2} = \frac{6}{3+x^2} = f(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$

Άρα αν $A(x, 0)$ με $x > 0$ είναι μια κορυφή του ορθογωνίου τότε $B(-x, 0)$ είναι η δεύτερη κορυφή του άξονα $x'x$ και επειδή οι άλλες δύο κορυφές είναι σημεία της C_f θα είναι τα $\Gamma(-x, f(x))$ και $\Delta(x, f(x))$

Επομένως $(AB\Gamma\Delta) = 2xf(x) = g(x)$ και αρκεί να βρω το μέγιστο της συνάρτησης g στο διάστημα $(0, 1]$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = 2(xf(x))' = 2(f(x) + xf'(x)) = 2\left(\frac{6}{3+x^2} + x \frac{-12x}{(3+x^2)^2}\right) = 2\left(\frac{6(3+x^2) - 12x^2}{(3+x^2)^2}\right) = 12 \frac{3-x^2}{(3+x^2)^2}$$

και το πρόσημο της παραγώγου είναι:

x	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$
g'	////	+	\\	\\

$\begin{matrix} & & \text{max} \\ & \nearrow & \\ \text{min} & & \end{matrix}$

Άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση 1 το $g(1) = 2 \cdot 1 \cdot f(1) = 2 \cdot \frac{6}{4} = 3$ που σημαίνει ότι το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 3 τ.μ.

Γ4

1^{ος} τρόπος (ολοκλήρωμα περιττής με αντίθετα άκρα): Η ολοκληρωτέα συνάρτηση

$$h(x) = xf(x) \text{ είναι περιττή αφού } h(-x) = -xf(-x) \stackrel{f \text{ άρτια}}{=} -xf(x) = -h(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

οπότε με την αντικατάσταση $x = -u$ έχουμε

$$I = \int_{-1}^1 xf(x)dx \stackrel{dx=-du}{=} \int_1^{-1} uf(-u)du \stackrel{f \text{ άρτια}}{=} \int_1^{-1} uf(u)dx = -\int_{-1}^1 xf(x)dx \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

2^{ος} τρόπος (με υπολογισμό): Είναι

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = 6 \int_{-1}^1 \frac{x}{3+x^2} dx = 6 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln(3+x^2)' dx = 3 [\ln(3+x^2)]_{-1}^1 = 3(\ln 4 - \ln 4) = 0$$

Συμπληρωματικά ερωτήματα – γενίκευση:

Έστω οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ και η συνάρτηση: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta + \gamma x^2}$$

Να αποδείξετε ότι:

Γ1 $A = \mathbb{R}$ και ο άξονας x' x είναι ασύμπτωτος της C_f

Γ2 η f έχει ένα μέγιστο και δύο σημεία καμπής

Γ3 αν x_1, x_2 οι θέσεις των σημείων καμπής και x_3 η θέση του μεγίστου, τότε το εμβαδόν που σχηματίζουν τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$

είναι $\frac{\alpha}{4\beta} \sqrt{\frac{\beta}{3\gamma}}$

Γ4 $\frac{1}{f(x) + f(y)} \geq 1 - \frac{\alpha}{2\beta}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Αν $x \leq 0$ τότε ισχύει $[(x^2 - x + 1)e^x]' = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1)e^x = (x^2 + x)e^x$ δηλ.

$[(x^2 - x + 1)e^x]' = f'(x)$ άρα $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x + c$ και επειδή $f(0) = 1$ παίρνουμε

$$1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$$

Αν $x > 0$ τότε $f'(x) = -\eta\mu x = (\sigma\upsilon\nu x)'$ άρα $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής στο 0 οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} ((x^2 - x + 1)e^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sigma\upsilon\nu x + c) \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα τελικά } f(x) = \begin{cases} (x^2 - x + 1)e^x, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$$

Σχόλιο: Αν δεν μας δινόταν έτοιμη η συνάρτηση f και έπρεπε να την βρούμε τότε ένας τρόπος είναι η διπλή παραγοντική ολοκλήρωση:

Αν $x \leq 0$ τότε $f'(x) = (x^2 + x)e^x$

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \left[f(t) \right]_0^x = \int_0^x f'(t) dt \Leftrightarrow f(x) = \int_0^x f'(t) dt + 1 = 1 + \int_0^x (t^2 + t)(e^t)' dt \\ &= 1 + \left[(t^2 + t)e^t \right]_0^x - \int_0^x (2t + 1)e^t dt = 1 + (x^2 + x)e^x - \int_0^x (2t + 1)(e^t)' dt \\ &= 1 + (x^2 + x)e^x - \left\{ \left[(2t + 1)e^t \right]_0^x - \int_0^x 2e^t dt \right\} = 1 + (x^2 + x)e^x - \left[(2x + 1)e^x - 1 - 2[e^t]_0^x \right] \\ &= 1 + (x^2 + x)e^x - (2x + 1)e^x + 1 + 2(e^x - 1) = e^x(x^2 + x - 2x - 1 + 2) = (x^2 - x + 1)e^x \end{aligned}$$

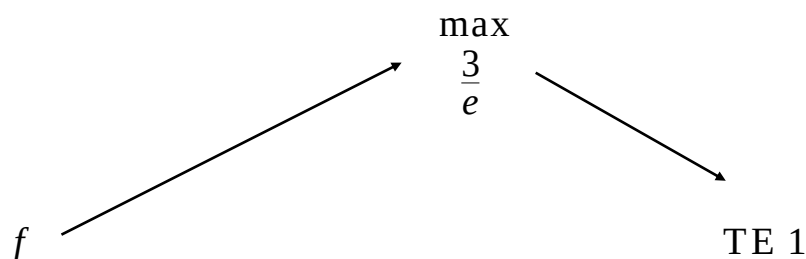
Συμπληρωματικό ερώτημα:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(\alpha x^2 e^x + \beta x e^x)' = x^2 e^x - x e^x + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$

Δ2 Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ είναι $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ και $f'(x) = (x^2 + x)e^x = x(x + 1)e^x$

Η μονοτονία και τα ακρότατα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	0
f'	$+$	0	$-$



Δ3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((x^2 - x + 1)e^x \right) \stackrel{+\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ είναι $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x > 0$ διότι $e^x > 0$ και $x^2 - x + 1 > 0$

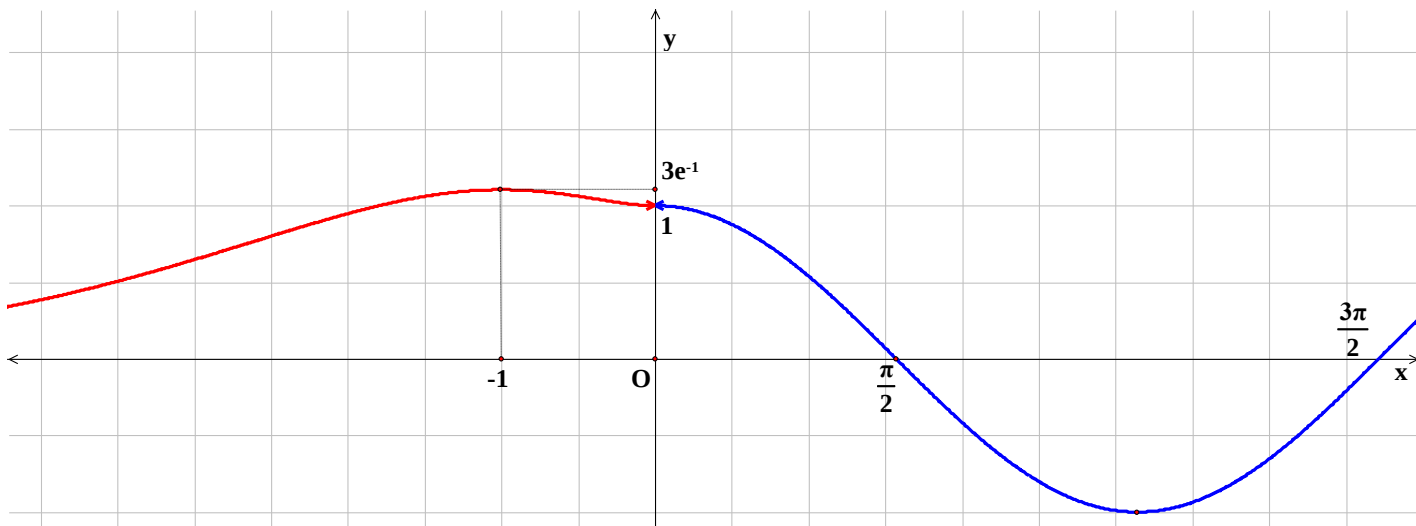
$\forall x \in \mathbb{R}$ (τριώνυμο με $\Delta = -3 < 0$). Άρα η ασύμπτωτη δεν τέμνει την C_f όταν $x \leq 0$

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι $f(x) = \sin x$ και οι λύσεις της εξίσωσης: $\sin x = 0$ με $x > 0$

μας δίνουν τα άπειρα σημεία: $\left(\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, 0 \right)$, $\kappa \in \mathbb{N}$ που είναι τελικά τα άπειρα σημεία

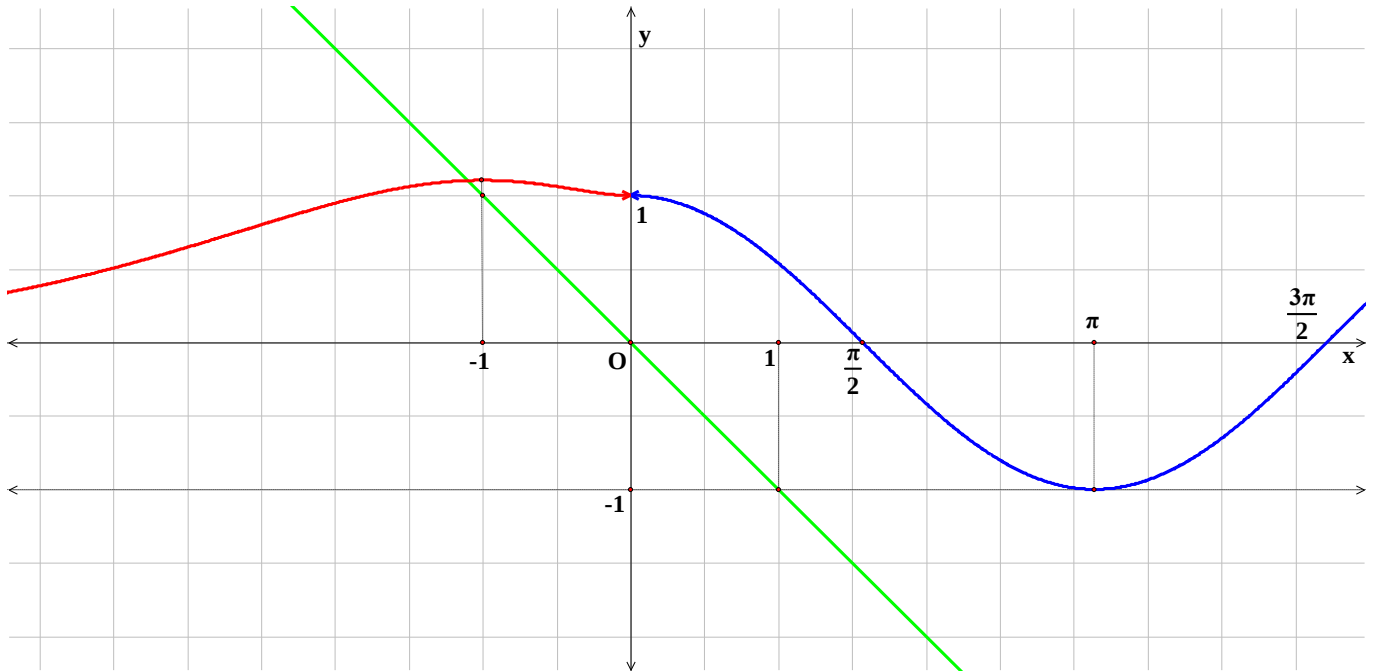
τομής της ασύμπτωτης με την C_f

Αυτά μπορούμε να τα διαπιστώσουμε και γραφικά αφού οι πληροφορίες που έχουμε είναι αρκετές για να έχουμε μια πρόχειρη εικόνα της C_f



Δ4

i) Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = -x$ είναι αδύνατη όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε απ' την C_f



Αλλά και αλγεβρικά ως εξής: Αν $0 < x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ τότε $y = -x < 0$ ενώ $f(x) = \sin x > 0$

Αν $x > 1$ τότε $y = -x < -1$ ενώ $f(x) = \sin x \geq -1$

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ είναι $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ και αν θέσουμε $g(x) = x + f(x)$ τότε :

1) Η g είναι συνεχής στο υποδιάστημα $[-2, -1]$ του $(-\infty, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα αυτό

$$2) g(-1)g(-2) = (-1 + \frac{3}{e})(-2 + 7e^{-2}) = (3 - e)(7 - 2e^2)/e^3 < 0$$

διότι $3 - e > 0$ και $7 - 2e^2 < 0$

Άρα απ' το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, -1)$

Για την απόδειξη της μοναδικότητας αρκεί να δείξουμε ότι g γνησίως μονότονη.

1^{ος} τρόπος:

Είναι $g'(x) = 1 + f'(x) = 1 + (x^2 + x)e^x$ και επειδή η παραβολή $y = x^2 + x$ έχει

ελάχιστο στη θέση $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2}$ το $y(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ έχουμε $g'(x) \geq 1 - \frac{1}{2}e^x$

Για την συνάρτηση $h(x) = -\frac{1}{2}e^x$ ισχύει: $h'(x) = -\frac{1}{2}e^x < 0$ επομένως για $x < 0$ έχουμε

$h(x) > h(0) = -\frac{1}{2}$ οπότε $g'(x) \geq 1 + h(x) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ άρα g γνησίως αύξουσα.

2^{ος} τρόπος:

Ισχύει $x^2 + x > -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (τριώνυμο με $\Delta = -3 < 0$) επομένως
 $(x^2 + x)e^x > -e^x \Leftrightarrow 1 + (x^2 + x)e^x > 1 - e^x \Leftrightarrow g'(x) > 0$ διότι για $x < 0$ είναι
 $e^x < e^0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0$

ii)

Απ' το ερώτημα Δ2 η f στο διάστημα $[-1, 0]$

είναι γνησίως φθίνουσα επομένως

$f(-1) \geq f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow \frac{3}{e} \geq f(x) \geq 1$ ενώ στο ίδιο

διάστημα, δηλ. για $-1 \leq x \leq 0$ ισχύει $1 \geq -x \geq 0$

επομένως $f(x) \geq 1 \geq -x \quad \forall x \in [-1, 0]$

με τις ισότητες να ισχύουν σε διαφορετικά x :

διότι $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ενώ $1 = -x \Leftrightarrow x = -1$

Άρα $f(x) > -x \quad \forall x \in [-1, 0]$ που σημαίνει ότι στο

διάστημα $[-1, 0]$ η C_f βρίσκεται εξολοκλήρου

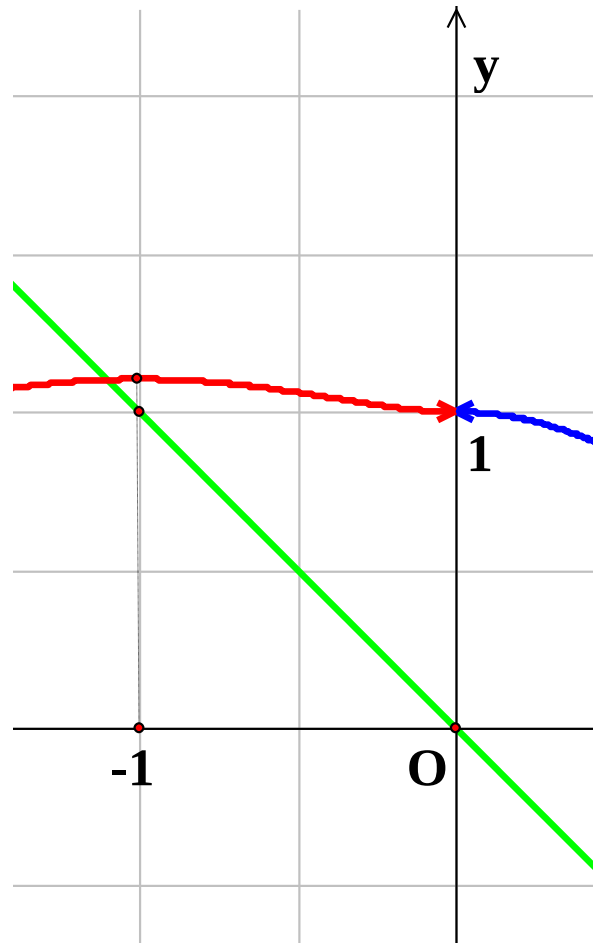
πάνω από το τμήμα της ευθείας $y = -x$

Άρα το χωρίο που περικλείεται απ' την C_f

την $y = -x$ και τον άξονα των y

περιλαμβάνει εξολοκλήρου το ορθογώνιο τρίγωνο

με κορυφές τα σημεία: $O(0, 0)$, $(-1, 1)$ και $(0, 1)$ το οποίο έχει εμβαδόν $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ τ.μ.



Κατασκευή και λύσεις των θεμάτων:

Χρήστος Ε. Ηρακλείδης

2^ο ΓΕΛ Ρόδου