Επιμέλεια

Καραγιάννης Β. Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

Το 1ο Θέμα στις Πανελλήνιες Εξετάσεις

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α. ***Ορισμοί-Προτάσεις-Θεωρήματα- Αποδείξεις***

Β. ***Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους-Πολλαπλής Επιλογής***

Γ. ***Διαγωνίσματα Θεωρίας***

Δ. ***Όλα τα θέματα Θεωρίας που τέθηκαν 2005-2014***

Σχολικό Έτος: 2015-2016

Περιεχόμενα

Ερωτήσεις+Απαντήσεις Θεωρίας...3

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους...

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής...

Θέματα Θεωρίας στις πανελλήνιες εξετάσεις+Απαντήσεις..............................

Απαντήσεις στις Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους και Πλλαπλής Επιλογής.............

Ερωτήσεις Κατανόησης του σχολικού βιβλίου +απαντήσεις ....

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ+ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α;

Απάντηση

Έστω Α ένα υποσύνολο του **R**. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο x ∈ A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της** f **στο x** και συμβολίζεται με f(x).

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbf{R}$$
$$x \to f(x)$$

2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α $f(x) = g(x)$ **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο,

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

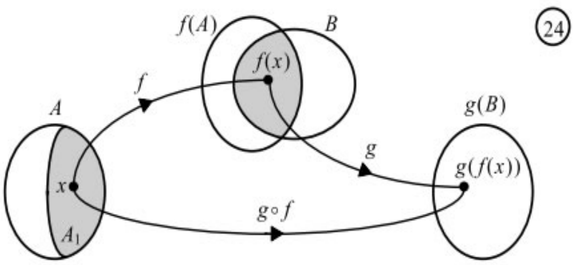
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

5. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$.



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο :

$$A_1 = \{x \in A / \ f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;**
- **γνησίως φθίνουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται :

• **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

• **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

7. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι είναι «1-1»;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

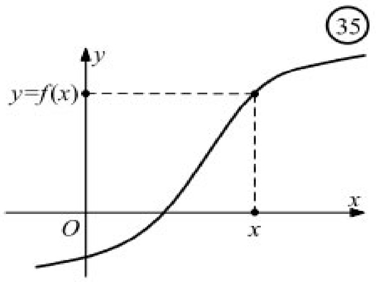
«Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$»

που σημαίνει ότι: «τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες».

8. Τι ονομάζουμε αντίστροφη της συνάρτησης $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f : A → **R**. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A) , της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει f(x) = y. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση g : f(A) → **R**



με την οποία κάθε y ∈ f(A) αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x ∈ A για το οποίο ισχύει $g(y) = x$

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

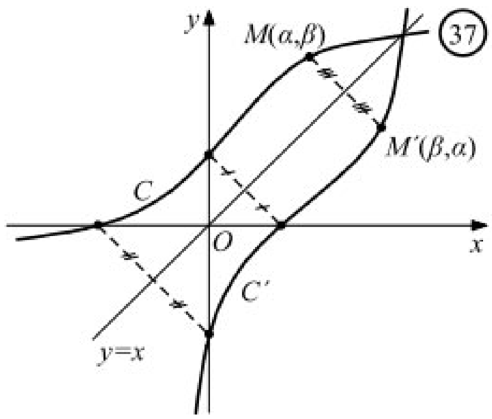
Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\mathbf{f^{-1}}$. Επομένως έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

9. Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων C_f, $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f, f^{-1} αντίστοιχα; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.



Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f $^{-1}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ αν ένα σημείο M(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο M΄(β,α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C¨ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy.

10. Αν $P(x)=a_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...a_1x+a_0$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Απόδειξη

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(a_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(a_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}a_0=$$

$$=a_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\lim_{x\to x_0}a_0=a_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\ldots+a_0=P(x_0)$$

11. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

Απάντηση

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

12. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

13. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής

- **σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);**
- **σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;**

Απάντηση

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

14*. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- f(α) • f(β) < 0 .

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

15*. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

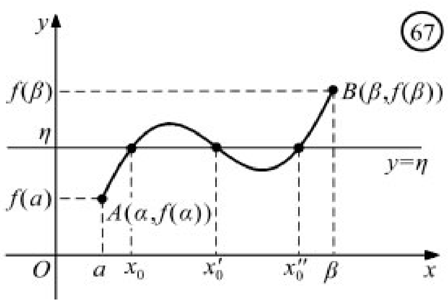
Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι f(α) < f(β). Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο [α, β] και
- $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, πάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



16. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m, δηλαδή $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

(*) Στις ερωτήσεις αυτές (14 και 15) μπορεί να ζητηθεί και η γεωμετρική ερμηνεία τους με τη χρήση ενός πρόχειρου σχήματος.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

2. Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x **.**

3. Μία συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

4. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

5. Αν μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x,\ x \in A \ \text{ και } f\left(f^{-1}(y)\right) = y,\ y \in f(A).$$

6. Αν μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε υπάρχουν σημεία της με την ίδια τεταγμένη.

7. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

8. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.

9. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «1–1», αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

10. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

11. Κάθε συνάρτηση, που είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, είναι και 1-1 .

12. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

13. Δύο συναρτήσεις που έχουν τον ίδιο τύπο εναι πάντα ίσες.

14. Οι συναρτήσεις fof^{-1} και $f^{-1}of$, όταν ορίζονται, είναι πάντα ίσες.

15. Αν $f(x) > \lambda \left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$ «κοντά» στο x_0, τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \lambda$.

16. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \left|f(x)\right| = l \left(l \in \mathbb{R}\right)$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -l$.

17. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$, τότε $f(x) \geq 0$ «κοντά στο x_0 ».

18. Μια συνάρτηση είναι δυνατόν να μην ορίζεται σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ αλλά να υπάρχει το όριό της στο x_0.

19. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ (Με την προϋπόθεση ότι όλα τα όρια υπάρχουν).

20. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x) + g(x)\right] = l \in \mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν πάντα τα όρια $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

21. Για όλες τις συναρτήσεις f, g με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ είναι $\lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x) - g(x)\right] = 0$.

22. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)\neq 0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

23. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε η f παίρνει μόνο θετικές τιμές «κοντά» στο x_0.

24. Αν η f είναι άρτια συνάρτηση και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$, τότε και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$

25. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.

26. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=+\infty$.

27. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

28. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

29. Αν $a>1$, τότε $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$.

30. Αν Αν $a>1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} a^x=0$.

31. Αν $0<a<1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} a^x=0$.

32. $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

33. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0$

34. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{(x-1)^4}=-\infty$

35. $\lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

36. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, τότε πάντα $f(a)\cdot f(\beta)<0$

37. Αν f συνεχής στο Δ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

38. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

39. Αν f συνεχής σε ένα σύνολο Α και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Α.

40. Αν f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, τότε παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή.

41. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof ειναι συνεχής στο x_0.

42. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

43. Μία συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ παίρνει υποχρεωτικά ολες τις ενδιάμεσες τιμές.

44. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

45. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[a,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

46. Για οποιεσδήποτε συνεχείς συναρτήσεις f και g στο x_0 η gof είναι συνεχής στο x_0.

47. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$.

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ-ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ:

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο διάστημα (a,β) και πότε στο διάστημα $[\alpha,\beta]$;

2. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει :

i) Μέγιστο στο Α ii) Ελάχιστο στο Α

3. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών.

Β. ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το IR και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

3. Μια συνάρτηση f:A → IR είναι 1−1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

4. Μία συνάρτηση f : A → $\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1» , αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1)=f(x_2)$

5. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}

6. Αν μια συνάρτηση f:A→R είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A \text{ και } f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(A)$$

7. Αν μια συνάρτηση f:A→R είναι 1−1, τότε υπάρχουν σημεία της με την ίδια τεταγμένη

8. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μία μέγιστη τιμή.

9. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

10. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και -f είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.

11. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

12. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

13. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) , όπου $A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x\to\beta^-} f(x)$

14. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

15. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

17. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ΄αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

18. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0\in A$, όταν $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

19. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$,τότε κατ΄ανάγκη $f(\beta)>0$

20. Ισχύει ότι $|\eta\mu x|\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

21. Ισχύει ότι: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

22. Ισχύει ότι: $\lim_{x\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

23. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-\lambda) = 0$$

24. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty)$$

25. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 τότε αν $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$ είναι και $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

26. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}$ (f(x)+ g(x)) τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$

27. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 «κοντά» στο x_0 .

28. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε f(x) < 0 «κοντά» στο x_0 .

29. Αν α > 1, τότε $\lim_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$

30. Αν 0<α < 1, τότε $\lim_{x\to +\infty} \alpha^x = +\infty$

31. Αν 0<α < 1, τότε $\lim_{x\to +\infty} \alpha^x = 0$

32. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και f(x) > 0 «κοντά» στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

33. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και f(x) < 0 «κοντά» στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

34. Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε f(x)<0 «κοντά» στο x_0

35. Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$

36. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, **τότε** $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Στις επόμενες προτάσεις να επιλέξετε τη μοναδική σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση

1. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\cdot g$ είναι:

α. Το $\mathbb{R}$ **β.** Το Β **γ.** Το $A\cup B$ **δ.** $A\cap B$

2. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι:

α. $A \cap B$ β. $\{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\}$ **γ.** $\{x \in A \cap B / f(x) \neq 0\}$ **δ.** Το Α

3. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης gof

α. $\{x \in A / f(x) \in B\}$ **β.** $\{x \in B / f(x) \in A\}$ γ. $A \cap B$ **δ.** $A \cup B$

4. Η εξίσωση y = f(x) επαληθεύεται

α. μόνο από τα σημεία της C_f **β.** Από όλα τα σημεία του επιπέδου xOy

γ. Μόνο από τα σημεία με $x > 0$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

5. Η συνάρτηση $f(x) = -x^4$ είναι :

α. Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **β.** Γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

γ. «1-1» **δ.** Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$

6. Το όριο $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι ίσο με:

α. 0 **β.** 1 **γ.** $+\infty$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

7. Αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano για μια συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η συνάρτηση f έχει πάντα στο (a, β) :

α. Ακριβώς μία ρίζα **β.** Το πολύ μία ρίζα **γ.** Τουλάχιστον μία ρίζα **δ.** Καμία ρίζα

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f έχει πάντα:

α. μόνο μέγιστη τιμή **β.** μέγιστη και ελάχιστη τιμή

γ. μόνο ελάχιστη τιμή **δ.** ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ι

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να σημειώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε:

α) $(gof)(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$

β) $(fog)(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$

2. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=l\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\frac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=0$.

4. Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, τότε κατ΄ ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0}f(x)>1$.

5. Ισχύει: **α)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$

β) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

6. Αν $0\le f(x)\le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 f(x)\right)=0$

7. Αν $f(x)\le\frac{1}{x^2},\ x\in(a,+\infty)$, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$

8. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}\left(f(x)g(x)\right)$, τότε είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-1$

10. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

11. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x\neq 4$ ισχύει $f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1.

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\pi$

II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l,\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=m\ (l,m\in\mathbb{R})$ και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι:

A) $l<m$ **B)** $l\le m$ **Γ)** $l\ge m$ **Δ)** $l=m$ **E)** $m<l$

2. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

A) 8 **B)** 1 **Γ)** 0 **Δ)** $+\infty$ **E)** -8

3. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

A) $+\infty$ **B)** $-\infty$ **Γ)** 1 **Δ)** -1 **E)** 0

4. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

A) $x_0=0$ **B)** $x_0=2$ **Γ)** $x_0=-1$ **Δ)** $x_0=1$

III

1[1]**.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \qquad \text{και} \qquad g(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς **λάθος** είναι ο :

A) η g είναι συνεχής στο 2

B) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

[1] Προτείνεται η διατύπωση: «η g έχει δύο σημεία το πεδίου ορισμού της στα οποία δεν είναι συνεχής» που είναι προφανώς λανθασμένος ισχυρισμός.

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ Β) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$ Δ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

Ε) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x+1)]$ ΣΤ) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x-1)]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα Δ = [0,3] , με f(0) =2, f(1) =1 και f(3) = −1. Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;
Α) Υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$.

Β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$

Γ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Δ) $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο [0,3] είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το −1.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

Αρ. Ερώτησης	Απάντηση	Αρ. Ερώτησης	Απάντηση
1	Λ	26	Σ
2	Σ	27	Σ
3	Λ	28	Λ
4	Σ	29	Σ
5	Σ	30	Λ
6	Λ	31	Σ
7	Σ	32	Σ
8	Σ	33	Σ
9	Σ	34	Λ
10	Λ	35	Λ
11	Σ	36	Λ
12	Σ	37	Σ
13	Λ	38	Σ
14	Λ	39	Λ
15	Λ	40	Λ
16	Λ	41	Σ
17	Λ	42	Σ
18	Σ	43	Λ
19	Σ	44	Λ
20	Λ	45	Σ
21	Λ	46	Λ
22	Λ	47	Σ
23	Σ		
24	Σ		
25	Σ		

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Αρ. Ερώτησης	Απάντηση	Αρ. Ερώτησης	Απάντηση
1	Λ	19	Λ
2	Λ	20	Σ
3	Σ	21	Λ
4	Λ	22	Λ
5	Σ	23	Σ
6	Σ	24	Σ
7	Λ	25	Σ
8	Λ	26	Λ
9	Σ	27	Σ
10	Σ	28	Σ
11	Σ	29	Σ
12	Λ	30	Λ
13	Σ	31	Σ
14	Σ	32	Σ
15	Σ	33	Λ
16	Λ	34	Λ
17	Σ	35	Σ
18	Σ	36	Σ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Αρ. Ερώτησης	1	2	3	4	5	6	7	8
Απάντηση	δ	β	α	α	δ	α	γ	β

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

(Ι)[2]

Αρ. Ερώτησης	Απάντηση
1α	Ψ
1β	Α
2	Α
3	Ψ
4	Ψ
5α	Α
5β	Ψ
6	Α
7	Ψ
8	Ψ
9	Ψ
10	Α
11	Α
12	Α

(ΙΙ)

Αρ. Ερώτησης	1	2	3	4
Απάντηση	Β	Ε	Ε	Δ

(ΙΙΙ)

Αρ. Ερώτησης	1	2	3
Απάντηση	Γ	Α, Γ, Ε	Ε

[2] Απατείται και δικαιολόγηση της απάντησης μας.

Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ 1ο

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

2. Οι συναρτήσεις fof^{-1} και $f^{-1}of$, όταν ορίζονται, είναι πάντα ίσες.

3. Αν $f(x) > \lambda \left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$ «κοντά» στο x_0, τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \lambda$

4. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

5. Το σύνολο τμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\left[a, \beta\right]$ είναι το κλειστό διάστημα [m,M], όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

6. Μια συνάρτηση f:A → IR είναι 1−1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

7. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ (Με την προϋπόθεση ότι όλα τα όρια υπάρχουν).

8. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f\left(x\right) \neq 0$ «κοντά» στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

9. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε η f παίρνει μόνο θετικές τιμές «κοντά» στο x_0

10. Αν η f είναι άρτια συνάρτηση και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, τότε και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10x2=20)

ΘΕΜΑ 2ο

Στις επόμενες προτάσεις να επιλέξετε τη μοναδική σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση .

1. Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και Β το πεδίο ορισμού της g, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι:

α. $A \cap B$ β. $\{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\}$ **γ.** $\{x \in A \cap B / f(x) \neq 0\}$ **δ.** Το Α

2. Η εξίσωση y = f(x) επαληθεύεται

α. μόνο από τα σημεία της C_f **β.** Από όλα τα σημεία του επιπέδου xOy

γ. Μόνο από τα σημεία με $x > 0$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

3. Το όριο $\lim_{x \to \infty} \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι ίσο με:

α. 0 **β.** 1 **γ.** $+\infty$ **δ**. Τίποτα από τα προηγούμενα

4. Αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano για μια συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε η συνάρτηση f έχει πάντα στο (a, β) :

α. Ακριβώς μία ρίζα **β.** Το πολύ μία ρίζα **γ.** Τουλάχιστον μία ρίζα **δ.** Καμία ρίζα

(Μονάδες 4x3=12)

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g **;**

(Μονάδες 8)

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής:

- σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β);
- σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

(Μονάδες 2x5=10)

Γ. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $P(x)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 20)

Β. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών καθώς και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 20)