ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.4. Αντικειμενικού τύπου

Σχολικού Βιβλίου

Ι.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1α	**Ψ**	Είναι ψευδής, αφού: $D_f=(0,\ +\infty)$, $D_g=\mathbb{R}$, $D_{gof}=(0,\ +\infty)$
1β	**Α**	Είναι αληθής, αφού: $D_f=(0,\ +\infty)$, $D_g=\mathbb{R}$, $D_{fog}=\mathbb{R}$ και $(fog)(x)=f(g(x))=\ln e^{-x}=-x$.
2	**Α**	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=l\in\mathbb{R}$ $\dfrac{f(x)}{x-1}=g(x),\ \lim\limits_{x\to 1}g(x)=l$ $f(x)=(x-1)g(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)\right]=0\cdot l=0$
3	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού $0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0$ δεν είναι σωτό διότι έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(\pm\infty)$.
4	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού μπορεί να ισχύει και $f(x)=1$. Παράδειγμα: $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$. Είναι $f(x)>1,\ x\in\mathbb{R}$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.
5α	**Α**	Αληθής αφού:

		$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\left(\begin{array}{l}u=\frac{1}{x}\\ x\to+\infty\Rightarrow u\to0\end{array}\right)$
5β	**Ψ**	Είναι Ψευδές αφού: $\left\|\frac{\eta\mu x}{x}\right\|=\frac{\|\eta\mu x\|}{\|x\|}\le\frac{1}{\|x\|}\Rightarrow-\frac{1}{\|x\|}\le\left\|\frac{\eta\mu x}{x}\right\|\le\frac{1}{\|x\|}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\|x\|}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\|x\|}=0$ και από το Κριτήριο της Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to\infty}\left\|\frac{\eta\mu x}{x}\right\|=0$.
6	**A**	Είναι Αληθής, αφού : $0\le f(x)\le1\Rightarrow0\le x^2f(x)\le x^2$ $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ και από το κριτήριο της Παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2f(x)\right)=0$.
7	**Ψ**	Είναι Ψευδής αφού το όριο της f μπορεί να μην υπάρχει στο $+\infty$.
8	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση $f(x)\cdot g(x)$ είναι ή όχι συνεχής στο $x_0=6$.
9	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει. Παράδειγμα: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\frac{\|x\|}{x}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to x_0}\|f(x)\|=1$ ενώ: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\ne\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$
10	**A**	Γνωστή ιδιότητα των ορίων (Σχολικό βιβλίο)
11	**A**	Είναι Αληθής, αφού : $f(4)=\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}=$ $=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(x-3)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x-3)=1$
12	**A**	Είναι Αληθής, αφού :

		Η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ και $f(-1) \neq f(1)$. Επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in \left(-1,\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \pi$.

ΙΙ.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Ε**
2	**Ε**
3	**Δ**
4	**Γ**

ΙΙΙ.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Γ**
2	**Α, Γ, Ε**
3	**Ε**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.4. Αντικειμενικού τύπου

Σχολικού Βιβλίου

Ι.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1	**Α**	Αληθής, αφού αν ισχύει $f(0)=f(1)$ από το Θ. Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\ 1)$: $f'(\xi)=0$, που είναι άτοπο.
2	**Α**	Αληθής, αφού αν ισχύει $f'(x_0) \geq 0$ για κάθε $x_0 \in (a,\ \beta)$ η f .
3	**Α**	Αληθής, αφού για τη συνάρτηση: $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[a,\beta]$ ισχύει το Θ. Rolle, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (a,\ \beta) : h'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$, δηλαδή οι εφαπτομένες στα Α και Β είναι παράλληλες.
4α	**Ψ**	Είναι: $f \downarrow (-\infty,\ 1)$, $f \downarrow [1,\ 2]$, $f \uparrow (2,\ +\infty)$ και επομένως η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2 και δεν έχει τοπικό μέγιστο στο 1.
4β	**Α**	
5α	**Α**	Η f' θα είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού, και άρα θα έχει μία ,τουλάχιστον, πραγματική ρίζα. Επομένως η C_f θα έχει μία, τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.
5β	**Ψ**	Η f' θα είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού, και άρα δεν θα έχει πάντα πραγματικές ρίζες επομένως και οριζόντιες εφαπτομένες.
6	**Α**	Η $f''(x)=6ax+2\beta,\ \alpha \neq 0$. Είναι: $f''(x)=0 \Leftrightarrow x_0=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$, οπότε η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και επομένως έχει πάντα σημείο καμπής.

7	**Ψ**	**Αντιπαράδειγμα:** $f(x)=x^3,\ g(x)=x^5, x\in\mathbb{R}$. $f''(x)=6x=0 \Leftrightarrow x=0$ $g''(x)=20x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ και f, g έχουν Σ.Κ. Ενώ $\begin{matrix} h(x)=x^8 \\ h''(x)=56x^6=0 \Leftrightarrow x=0 \end{matrix}$ και η h δεν έχει Σ.Κ.
8	**Α**	Προφανώς το σημείο Α βρίσκεται ψηλότερα (η χαμηλότερα) από τα υπόλοιπα σημεία του άξονα x και άρα η f (που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) θα έχει ακρότατο στο x_0 . Από το Θ. Fermat θα είναι $f(x_0)=0$ και επομένως έχει οριζόντια εφαπτομένη στο Α.
9α	**Ψ**	Ψευδής , αφού**:** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$
9β	**Α**	Αληθής, αφού: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=+\infty$
10 i.	Ψ	Από το σχήμα προκύπτει ότι υπάρχει σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,\ 4)$ το οποίο βρίσκεται ψηλότερα από τα άλλα σημεία της C_f και επειδή η f παραγωγίζεται στο $(1,\ 4)$, από το Θ. Fermat θα είναι $f'(x_0)=0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ δεν είναι ούτε το $(1,\ 4)$ ούτε το $[1,\ 4]$.
10 ii.	**Ψ**	
10 iii.	**Ψ**	Ψευδής, αφού τότε η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ 4]$ που δεν είναι αληθές

		αφού η f είναι και γνησίως φθίνουσα .
10 iv.	**Α**	Όπως το i.
11α	**Ψ**	Ψευδές, αφού $f'(x) > 0,\ x \in (0,1)$
11β	**Α**	Αληθές αφού ισχύει το Θ. Bolzano [$f(-1) = -1 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$] και $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, δηλαδή η f γν. αύξουσα (άρα 1-1) οπότε μοναδική ρίζα στο $(-1,\ 0)$.
11γ	**Ψ**	Ψευδές, αφού $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε δηλαδή η f γν. αύξουσα (άρα 1-1) οπότε μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.
12	**Α**	$(fog)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(5) \cdot 1 = 6$ $(gof)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(4) \cdot 3 = 6$

II.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Β**
2	**Γ**
3	**Ε**
4	**Γ**
5	**Γ**
6	**Γ**
7	**Ε**
8	**Γ**

III.

1. $\alpha \to \mathrm{E},\ \beta \to A,\ \gamma \to B,\ \delta \to \Delta$

2. $1 \to \delta,\ 2 \to \gamma,\ 3 \to \alpha$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

I.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
2	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ $f(x) = g(x) = c \neq 0, x \in [a,\ \beta]$
3	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
4	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ και άκρα $a = 0,\ \beta = 2\pi$. Τότε $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.
5	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
6	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ και άκρα $a = 0,\ \beta = \frac{3\pi}{2}$. Τότε $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = 1 > 0$ και $f(x) < 0, x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.
7	**Α**	$f(x) = x^4 + 1 < x^4 + x^2 + 1 = g(x)$ και οι f, g δεν είναι παντού ίσες στο $[-a,\ a],\ a > 0$. Επομένως: $\int_{-a}^{a} f(x)dx < \int_{-a}^{a} g(x)dx$.
8	**Α**	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 - \eta\mu^2 x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)dx =$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)dx$
9	**Α**	$\int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt = \int_e^1 -\ln t dt = \int_1^e \ln t dt$
10	**Ψ**	Ψευδές, αφού για να παριστάνει εμβαδόν θα έπρεπε να ισχύει $x^3 - x \geq 0,\ x \in [-1,\ 1]$ που δεν ισχύει σε όλο το διάστημα.

II.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Δ**
2	**Α**
3	**Β**
4	**Δ**
5	**Β**
6	**Γ**

III.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Β, Ζ**
2	Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u.