ΓΙΑΝΝΗΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

- **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
- **ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

Γιάννης Καραγιάννης
Τηλ. 2241068945
e-mail: iokaragi@sch.gr
ΡΟΔΟΣ

Σελίδες:220

Νοέμβριος 2017

Λίγα λόγια για την μαθήτρια/μαθητή

Το μικρό αυτό βιβλίο αυτό αποτελεί ένα σημαντικό βοήθημα για να μάθεις την θεωρία που περιλαμβάνεται στην εξεταστέα ύλη των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής για τις πανελλαδικές εξετάσεις.

Οι ερωτήσεις θεωρίας, δηλαδή οι αποδείξεις των θεωρημάτων και των προτάσεων, οι ορισμοί καθώς και οι γεωμετρικές ερμηνείες αποτελούν τα 2 ή τα 3 ερωτήματα από το $1^{ο}$ θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων.

Οι αποδείξεις των προτάσεων καθώς και οι ορισμοί δίνονται όπως ακριβώς γράφονται στο σχολικό βιβλίο .Ωστόσο εδώ θα τα βρεις «μαζεμένα» χωρίς να σπαταλάς περιττό χρόνο να τα βρεις στο βιβλίο σου, να αναρωτιέσαι αν είναι εντός ή εκτός εξεταστέας ύλη ή καιπως ακριβώς θα πρέπει να τα απαντήσεις.

Στο επόμενο μέρος τοτ βιβλίου θα βρεις υποδειγματικά λυμένα όλα τα θέματα των προσομοιωμένων διαγωνισμάτων καθώς και των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων,τακτικών και επαναληπτικών, των ετών 2016 και 2017 σε όλους τους τύπους σχολείων. Σε κάποια προτεινόμενα θέματα (Β3,Γ3 και Δ3) θα βρεις παραπομπή σε λυμένο θέμα. Για τα υπόλοιπα προτεινόμενα θέματα γράφεται η ημερομηνία της ανάρτησής των απαντήσεων-υποδείξεων στον Μαθηματικό Περιηγητή.

Καλή μελέτη λοιπόν

Γιάννης Καραγιάννης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

[1] Ορισμένες και οι άλλες στο site blogs.sch.gr-iokaragi στις ημερομηνίες που δίνονται

1.Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α;

Απάντηση

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbf{R}$$
$$x \to f(x)$$

2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο,

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο,

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f\left(x_0\right)$, όταν:

$$f\left(x\right) \le f\left(x_0\right) \text{ για κάθε } x \in A$$

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, $f\left(x_0\right)$, όταν

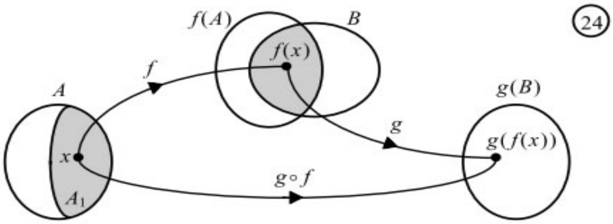
$$f\left(x\right) \ge f\left(x_0\right) \text{ για κάθε } x \in A$$

5. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο:

$$\left(gof\right)(x) = g(f\left(x\right)) \quad .$$



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο:

$$A_1 = \left\{x \in A \,/\, f(x) \in B\right\}$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;**
- **γνησίως φθίνουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται :

● **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

● **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2) \ .$$

7. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1−1»;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

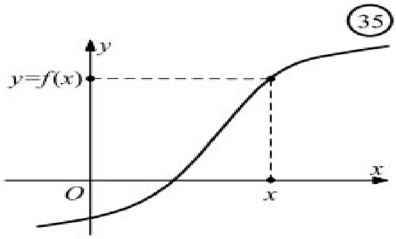
«Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$»

που σημαίνει ότι: «τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες».

8. Τι ονομάζουμε αντίστροφη της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f : A → **R**. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι «1-1», τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A) , της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει f(x) = y. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση g : f(A) → **R.**



με την οποία κάθε y ∈ f(A) αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x ∈ A για το οποίο ισχύει $g(y) = x$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

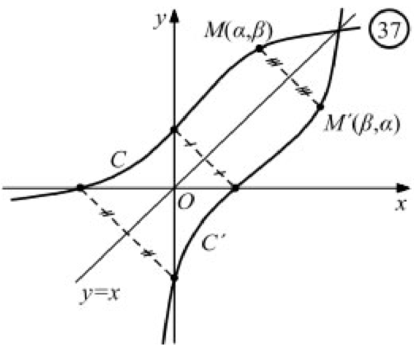
Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\mathbf{f^{-1}}$. Επομένως έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

9. Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων C_f, $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f, f^{-1} αντίστοιχα; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.



Ας πάρουμε τώρα μια «1-1» συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και $C΄$ των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ αν ένα σημείο M(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο M΄(β, α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C¨ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy.

10. Αν $P\left(x\right)=a_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_{1}x+a_{0}$ ένα πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P\left(x\right)=P\left(x_0\right)$

Απόδειξη:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(a_{\nu}x^{\nu}+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_0\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(a_{\nu}x^{\nu}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(a_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}a_0=$$

$$=a_{\nu}x_0^{\nu}+a_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\ldots+a_0=P(x_0)$$

11. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

Απάντηση

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν

- $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=l$$

τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$.

12. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

13. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής

- **σε ένα ανοικτό διάστημα $\left(a,\beta\right)$;**
- **σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$;**

Απάντηση

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**,** όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]**,** όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

14. Πότε μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τινή της , στο σημείο x_0 .

15. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

<u>Διατύπωση:</u>

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

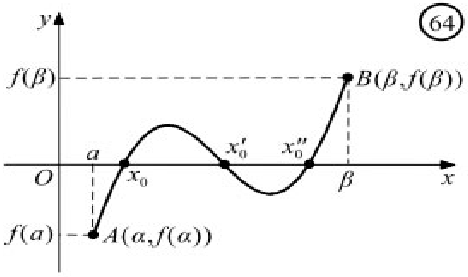
- η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- f(α) • f(β) < 0 .

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in$ (α, β) τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (α, β).

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία:</u>

Στο επόμενο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β]. Επειδή τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x΄x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



16. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Απάντηση

Διατύπωση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη

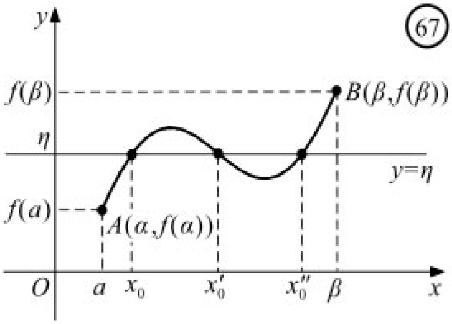
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

● η g είναι συνεχής στο [α, β] και

● $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, πάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



17. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

18. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0) \quad , \quad \lambda = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

19. Τι οναμάζεται ακολουθία;

Απάντηση

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

20. Πότε λέμε ότι μία ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$;

Απάντηση

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = l$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - l| < \varepsilon$.

21. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'\left(x_0\right)$.
Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα.

22. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\left(x - x_0\right)$$

Οπότε:

$$\lim_{x \to x0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\left(x - x_0\right)\right] =$$

$$= \lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x0}\left(x - x_0\right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 ■

23. Εστω η σταθερή συνάρτηση f(x) = c, c ϵ R. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'\left(x\right) = 0$, δηλαδή $\left(c\right)' = 0$.

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

δηλαδή $\left(c\right)' = 0$. ■

24. Έστω η συνάρτηση f(x) = x. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

Απόδειξη:

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1$$

δηλαδή $(x)'=1$. ■

25. Έστω η συνάρτηση f(x) = x$^{\nu}$, ν ϵ N-{0, 1}. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή:

$$\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1} \quad .$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x^{\nu-1}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\cdot\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=$$

$$=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1}\right)=$$

$$=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$$

Δηλαδή: $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$. ■

26. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad .$$

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του (0, +∞) , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(x-x_0\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Δηλαδή: $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

27. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(f+g\right)'\left(x_0\right)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{\left(f+g\right)(x)-\left(f+g\right)(x_0)}{x-x_o}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_o}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_o}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(f+g\right)(x)-\left(f+g\right)(x_0)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_o}$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Δηλαδή $\left(f+g\right)'\left(x_0\right)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}.$$

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$ έχουμε :

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1\cdot(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$$

29. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_1 = R − {x | συνx = 0} και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απόδειξη

Για κάθε x ∊ R έχουμε :

$$(\varepsilon\varphi\, x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

30. Η συνάρτηση $f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει: $f'(x) = \alpha x^{a-1}$, δηλαδή $\left(x^a\right)' = \alpha x^{a-1}$.

Απόδειξη

Αν y = x $^{\alpha}$ = e $^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε u = αlnx, τότε έχουμε y = e ^{u}. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u}\cdot u' = e^{a\ln x}\cdot a\cdot\frac{1}{x} = x^{a}\cdot\frac{a}{x} = a\cdot x^{a-1}$$

31. Η συνάρτηση f(x) = α ^{x} , α > 0, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \alpha^{x}\ln a$, δηλαδή $\left(a^{x}\right)' = \alpha^{x}\ln a$.

Απόδειξη

Αν y = α ^{x} = e $^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε u = xlnα, τότε έχουμε y = e ^{u}. Επομένως:

$$y' = (e^{u})' = e^{u}\cdot u' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^{x}\cdot\ln a$$

32. Η συνάρτηση f(x) = ln |x|, x ∊ R*, είναι παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

Απόδειξη

— αν x > 0, τότε $\left(\ln|x|\right)' = \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως,

$$(\ln u)' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$.

33. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ **ως προς το x στο σημείο x_0 όταν η συνάρτηση f είναι παραγωίσιμη στο x_0;**

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

34. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

<u>Διατύπωση</u>

Αν μια συνάρτηση f είναι:

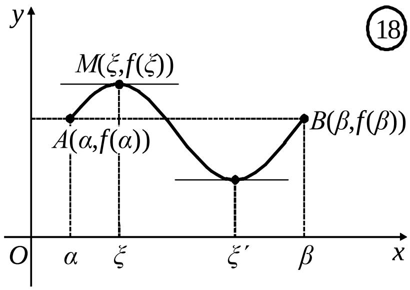
- ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- ♦ $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα,τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



35. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

<u>Διατύπωση</u>

Αν μια συνάρτηση f είναι:

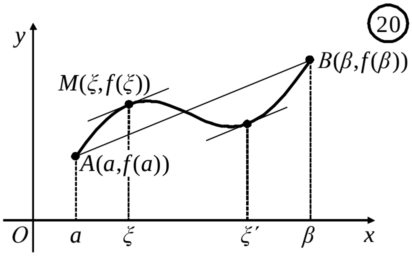
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



36. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **η είναι συνεχής στο Δ και**
- **$f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,**

τότε να αποδείξετε ότι η είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι:

♦ Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

♦ Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει

$\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

37. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

● οι f, g είναι συνεχείς στο *Δ* και

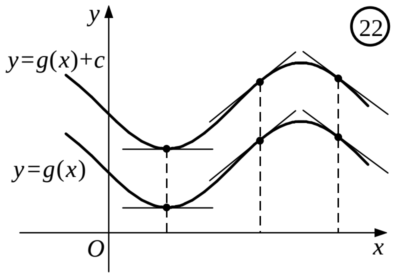
● $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,

Τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \ .$$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$. ■

38. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.**
- **Αν $f'(x)<0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*.**

Απόδειξη

Έστω $x_1,\, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$. Πράγματι, στο διάστημα $\left[x_1,\, x_2\right]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi\in\left(x_1,\, x_2\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

, οπότε έχουμε $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f'\left(\xi\right)\left(x_2-x_1\right)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$, οπότε $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$.

Η απόδειξη για τη γνησίως φθίνουσα είναι ανάλογη.

39. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *Α* παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση

Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ .$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της** ***f***.

40. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A* παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση

Μία συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{, για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ .$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της** ***f***.

41. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Απάντηση

<u>Διατύπωση</u>

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

<u>Απόδειξη</u>

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta \qquad \text{και}$$

$$f(x) \le f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \text{ .} \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ .}$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

42. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η *f* είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

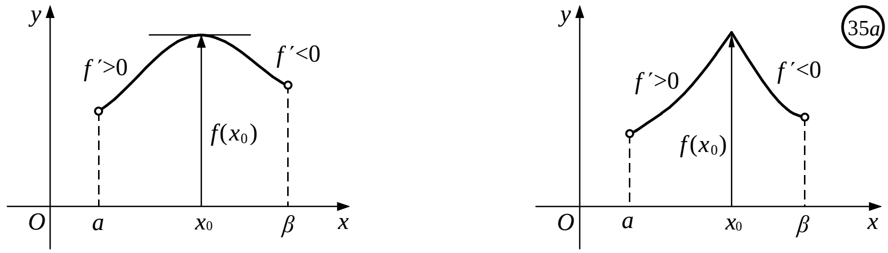
Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,\ x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0)\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,x_0]\quad(1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0)\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in[x_0,\beta)\quad(2)$$

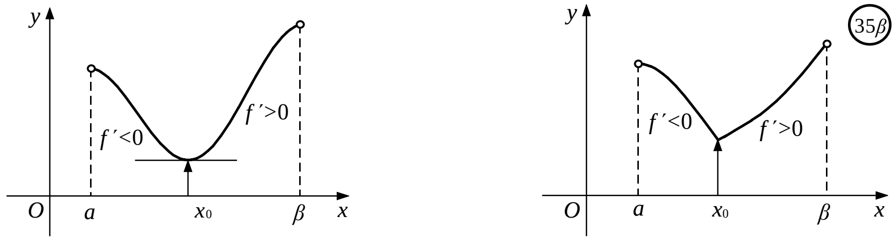


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

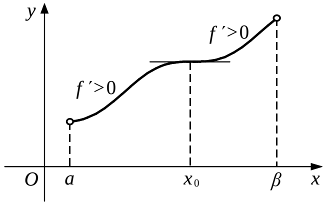
$$f(x)\le f(x_0)\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta)\ ,$$

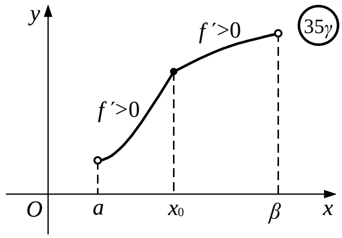
που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο $(\alpha,\ \beta)$ και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,\ x_0]$ και $[x_0,\ \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

—Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

43. Πότε λέμε ότι:

Α. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο *Δ*;

Β. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο *Δ*;

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα *Δ* και *π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η* στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

♦ Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

♦ Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

44. Πως σχετίζεται η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f με την κυρτότητά της;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα *Δ* και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

♦ Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι κυρτή στο *Δ*.

♦ Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι κοίλη στο *Δ*.

45. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0.

Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της *f*;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

♦ η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και

♦ η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

46. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ποια είναι η τιμή της $f''(x_0)$;

Απάντηση

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

47. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

48. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Απάντηση

Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

49. Πότε λέμε ότι ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0 \ ,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0 \ .$$

50. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital

Απάντηση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

51. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x)=f(x)\ , \quad \text{για κάθε} \quad x\in\Delta.$$

52. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

● όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x) = F(x) + c , c ∈ R **, είναι παράγουσες της f στο Δ και**

● κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x) = F(x) + c , c ∈ R.

Απόδειξη

● Κάθε συνάρτηση της μορφής G(x) = F(x) + c, (c ∈ **R**) είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού:

G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), για κάθε x ∈ Δ.

● Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε x ∈ Δ ισχύουν F'(x) = f(x) και G'(x) = f(x), οπότε G'(x) = F'(x), για κάθε
x ∈ Δ

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε G(x) = F(x) + c, για κάθε x ∈ Δ ■

53. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες ισότητες-ανισότητες, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

Α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \ldots\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

Β. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \ldots$

Γ. Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = \ldots$

Δ. Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α,β] και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = \ldots$$

Απάντηση

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β].

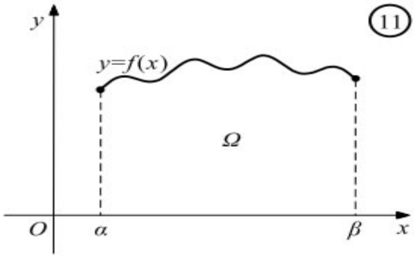
Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α,β] και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

54. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ αν $f(x) \geq 0$;

Απάντηση

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α,β], τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β (Σχ. 11). Δηλαδή, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$



55. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_\beta^\alpha c dx$ αν c > 0;

Απάντηση

Το $\int_\alpha^\beta c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση β − α και ύψος c .

56. Α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες ισότητες, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

« Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{\dots} f(x)dx + \int_{\dots}^\beta f(x)dx \text{ »}$$

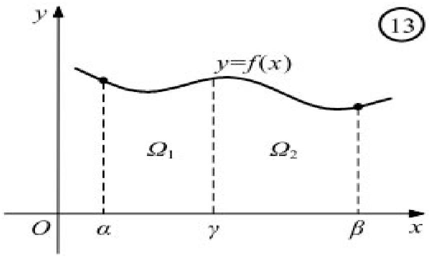
Β. Αν f(x) ≥ 0 και α < γ < β τι δηλώνει , η παραπάνω ιδιότητα;

Απάντηση

Α. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

Β. Ε(Ω) = Ε(Ω_1) + Ε(Ω_2), όπου $E(\Omega_1) = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$, $E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x)dx$ και

$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ (Σχήμα 13)



57. Να συμπληρώσετε το επόμενο κενό, ώστε η πρόταση να είναι αληθής:
«Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(x)dx,\ x\in\Delta$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{x} f(x)dx\right)'=...$ για κάθε $x\in\Delta$ ».

Απάντηση

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(x)dx\right)'=f(x)$$

58. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Απάντηση

<u>Διατύπωση</u>

Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

«Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)$ »

<u>Απόδειξη</u>

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση:

$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$

είναι μια παράγουσα της f στο [α,β]. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], θα υπάρχει c ∈ **R** τέτοιο, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για x = α , έχουμε:

$$G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(x)\,dx + c = c$$

οπότε c = G(α).

Επομένως, G(x) = F(x) + G(α),

οπότε, για x = β , έχουμε:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(x)\,dx + G(a)$$

και άρα:

$$\int_a^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(a)\ .$$

59. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα;

Απάντηση

$$\int_a^\beta \left(f(x)\cdot g'(x)\right)dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left(f'(x)\cdot g(x)\right)dx$$

, όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

60. Ποιος είναι τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα ;

Απάντηση

$$\int_a^\beta f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du\ ,$$

όπου f, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις , u = g(x), du = g΄(x)dx και u_1 = g(α) , u_2 = g(β).

61. Αν g συνεχής στο $[a,\ \beta]$, ποιος τύπος δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ αν:

i. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$;

ii. $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$;

ii. η g δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\ \beta]$;.

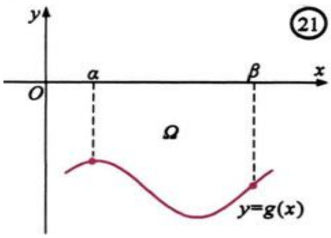
Να αποδείξετε τον τύπο ii. με τη βοήθεια ενός σχήματος.

Απάντηση

i. $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

ii. Με τη βοήθεια του τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα x'x, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και τις ευθείες x = α και x = β (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας x'x είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = 0, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_{a}^{\beta} [-g(x)]dx = -\int_{a}^{\beta} g(x)dx$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

iii. $E = \int_{a}^{\beta} |f(x)|\, dx$

62. Ποιος είναι ο τύπος που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων f, g στο $[a, \beta]$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$; Να αποδείξετε τους τύπους σε κάθε περίπτωση με τη βοήθεια ενός σχήματος.

Απάντηση

- Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις:
  (i) $f(x) \ge g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και
  (ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο [α,β].

  τότε ισχύει: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x) \right) dx$

- Αν η διαφορά f(x)−g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες x = α και x = β είναι ίσο με:

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Αποδείξεις:

- Έστω δύο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα [α,β] με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε x ∈ [α,β] και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες x = α και x = β (Σχ. 18α).

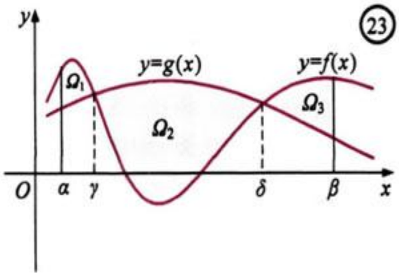
Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-\int_{a}^{\beta}g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

Επομένως,

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

- Αν η διαφορά f(x)−g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β], όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες x = α και x = β είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3.



$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{\gamma}^{\delta}\left(g(x)-f(x)\right)dx+\int_{\delta}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\gamma}^{\delta}|g(x)-f(x)|dx+\int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Επομένως ,

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις κατανόησης σχολικού βιβλίου

Απαντήσεις[1]-Υποδείξεις Β3, Γ3 και Δ3

Σχολικού βιβλίου

Οι ασκήσεις που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο στα κεφάλαια 1^{ο}, 2ο και 3ο των οποίων οι λύσεις βρίσκονται αναλυτικά στο βιβλίο των λύσεων που έχει διανεμηθεί.

Ψηφιακό Βοήθημα

Οι ερωτήσεις αυτές υπάρχουν διαδραστικά με τις απαντήσεις τους στον σύνδεσμο:

study4exams.gr/math_k/index.php

Από τις προτεινόμενες δίνονται οι απαντήσεις σε όσες από αυτές είναι θέματα των προσομοιωμένων διαγωνισμάτων ή θέματα πανελλαδικών εξετάσεων των οποίων οι πλήρεις-αναλυτικές λύσεις βρίσκονται στο 4ο κεφάλαιο.

Οι απαντήσεις των άλλων ασκήσεων καθώς και οι λύσεις των προτεινόμενων διαγωνισμάτων σε κάθε κεφάλαιο θα δίνονται κάθε 1η του μήνα από τον Δεκέμβριο του 2017 και μετά (1/12/2017 1ο κεφάλαιο, 3/1/2018 2ο κεφάλαιο, 1/2/2018 3ο κεφάλαιο, 1/3/2018 δέκα απαιτητικά θέματα).

[1] Ορισμένες και οι άλλες στο site blogs.sch.gr-iokaragi στις ημερομηνίες που δίνονται

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.4. Αντικειμενικού τύπου

Σχολικού Βιβλίου

Ι.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1α	**Ψ**	Είναι ψευδής, αφού: $D_f=(0,\ +\infty)$, $D_g=\mathbb{R}$, $D_{gof}=(0,\ +\infty)$
1β	**Α**	Είναι αληθής, αφού: $D_f=(0,\ +\infty)$, $D_g=\mathbb{R}$, $D_{fog}=\mathbb{R}$ και $(fog)(x)=f(g(x))=\ln e^{-x}=-x$.
2	**Α**	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=l\in\mathbb{R}$ $\dfrac{f(x)}{x-1}=g(x),\ \lim\limits_{x\to 1}g(x)=l$ $f(x)=(x-1)g(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)\right]=0\cdot l=0$
3	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού $0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0$ δεν είναι σωτό διότι έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(\pm\infty)$.
4	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού μπορεί να ισχύει και $f(x)=1$. Παράδειγμα: $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$. Είναι $f(x)>1,\ x\in\mathbb{R}$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.
5α	**Α**	Αληθής αφού:

		$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\left(\begin{matrix}u=\frac{1}{x}\\ x\to+\infty\Rightarrow u\to0\end{matrix}\right)$
5β	**Ψ**	Είναι Ψευδές αφού: $\left\lvert\frac{\eta\mu x}{x}\right\rvert=\frac{\lvert\eta\mu x\rvert}{\lvert x\rvert}\le\frac{1}{\lvert x\rvert}\Rightarrow-\frac{1}{\lvert x\rvert}\le\left\lvert\frac{\eta\mu x}{x}\right\rvert\le\frac{1}{\lvert x\rvert}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lvert x\rvert}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\lvert x\rvert}=0$ και από το Κριτήριο της Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to\infty}\left\lvert\frac{\eta\mu x}{x}\right\rvert=0$.
6	**Α**	Είναι Αληθής, αφού : $0\le f(x)\le1\Rightarrow0\le x^2f(x)\le x^2$ $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ και από το κριτήριο της Παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2f(x)\right)=0$.
7	**Ψ**	Είναι Ψευδής αφού το όριο της f μπορεί να μην υπάρχει στο $+\infty$.
8	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση $f(x)\cdot g(x)$ είναι ή όχι συνεχής στο $x_0=6$.
9	**Ψ**	Είναι Ψευδής, αφού το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει. Παράδειγμα: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=1$ ενώ: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\ne\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$
10	**Α**	Γνωστή ιδιότητα των ορίων (Σχολικό βιβλίο)
11	**Α**	Είναι Αληθής, αφού : $f(4)=\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}=$ $=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(x-3)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x-3)=1$
12	**Α**	Είναι Αληθής, αφού :

		Η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ και $f(-1) \neq f(1)$. Επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in (-1,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \pi$.

ΙΙ.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Ε**
2	**Ε**
3	**Δ**
4	**Γ**

ΙΙΙ.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Γ**
2	**Α, Γ, Ε**
3	**Ε**

Β3. Προτεινόμενα

1. Προσομοίωση 4, θέμα Β

3. Προσομοίωση 2, θέμα Β.

4. Προσομοίωση 4, θέμα Β.

10. Προσομοίωση 3, θέμα Β.

12. Προσομοίωση 7, θέμα Β.

13. Προσομοίωση 6, θέμα Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.4. Αντικειμενικού τύπου

Σχολικού Βιβλίου

Ι.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1	**Α**	Αληθής, αφού αν ισχύει $f(0)=f(1)$ από το Θ. Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\ 1)$: $f'(\xi)=0$, που είναι άτοπο.
2	**Α**	Αληθής, αφού αν ισχύει $f'(x_0)\geq 0$ για κάθε $x_0 \in (a,\ \beta)$ η f .
3	**Α**	Αληθής, αφού για τη συνάρτηση: $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[a,\beta]$ ισχύει το Θ. Rolle, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (a,\ \beta): h'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$, δηλαδή οι εφαπτομένες στα Α και Β είναι παράλληλες.
4α	**Ψ**	Είναι: $f \downarrow (-\infty,\ 1)$, $f \downarrow [1,\ 2]$, $f \uparrow (2,\ +\infty)$ και επομένως η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2 και δεν έχει τοπικό μέγιστο στο 1.
4β	**Α**	
5α	**Α**	Η f' θα είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού, και άρα θα έχει μία ,τουλάχιστον, πραγματική ρίζα. Επομένως η C_f θα έχει μία, τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.
5β	**Ψ**	Η f' θα είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού, και άρα δεν θα έχει πάντα πραγματικές ρίζες επομένως και οριζόντιες εφαπτομένες.
6	**Α**	Η $f''(x)=6ax+2\beta,\ \alpha\neq 0$. Είναι: $f''(x)=0 \Leftrightarrow x_0=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$, οπότε η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και επομένως έχει πάντα σημείο καμπής.

7	**Ψ**	**Αντιπαράδειγμα:** $f(x)=x^3,\ g(x)=x^5, x\in\mathbb{R}$. $f''(x)=6x=0 \Leftrightarrow x=0$ $g''(x)=20x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ και f, g έχουν Σ.Κ. Ενώ $\begin{matrix} h(x)=x^8 \\ h''(x)=56x^6=0 \Leftrightarrow x=0 \end{matrix}$ και η h δεν έχει Σ.Κ.
8	**Α**	Προφανώς το σημείο Α βρίσκεται ψηλότερα (η χαμηλότερα) από τα υπόλοιπα σημεία του άξονα x και άρα η f (που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) θα έχει ακρότατο στο x_0 . Από το Θ. Fermat θα είναι $f(x_0)=0$ και επομένως έχει οριζόντια εφαπτομένη στο Α.
9α	**Ψ**	Ψευδής , αφού**:** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$
9β	**Α**	Αληθής, αφού: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=+\infty$
10 i.	Ψ	Από το σχήμα προκύπτει ότι υπάρχει σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,\ 4)$ το οποίο βρίσκεται ψηλότερα από τα άλλα σημεία της C_f και επειδή η f παραγωγίζεται στο $(1,\ 4)$, από το Θ. Fermat θα είναι $f'(x_0)=0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ δεν είναι ούτε το $(1,\ 4)$ ούτε το $[1,\ 4]$.
10 ii.	**Ψ**	
10 iii.	**Ψ**	Ψευδής, αφού τότε η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ 4]$ που δεν είναι αληθές

		αφού η f είναι και γνησίως φθίνουσα .
10 iv.	**Α**	Όπως το i.
11α	**Ψ**	Ψευδές, αφού $f'(x) > 0,\ x \in (0,1)$
11β	**Α**	Αληθές αφού ισχύει το Θ. Bolzano [$f(-1) = -1 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$] και $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, δηλαδή η f γν. αύξουσα (άρα 1-1) οπότε μοναδική ρίζα στο $(-1,\ 0)$.
11γ	**Ψ**	Ψευδές, αφού $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε δηλαδή η f γν. αύξουσα (άρα 1-1) οπότε μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.
12	**Α**	$(fog)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(5) \cdot 1 = 6$ $(gof)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(4) \cdot 3 = 6$

ΙΙ.

Α/Α Ερώτησης	**Απάντηση**
1	**Β**
2	**Γ**
3	**Ε**
4	**Γ**
5	**Γ**
6	**Γ**
7	**Ε**
8	**Γ**

ΙΙΙ.

1. $\alpha \to \mathrm{E},\ \beta \to A,\ \gamma \to B,\ \delta \to \Delta$

2. $1 \to \delta,\ 2 \to \gamma,\ 3 \to \alpha$

Β3. Προτεινόμενα

7. Θέμα Β, εξετάσεις 2017 -Ημερησίου

8. Θέμα Β, εξετάσεις 2017 (επαναληπτικές)-Ημερησίου

9. Θέμα Β, εξετάσεις 2016-Ημερησίου

10. Θέμα Β, εξετάσεις 2016-Ημερησίου

11. Θέμα Β, εξετάσεις 2016 (Εσπερινά)

13. Θέμα Β, εξετάσεις 2017-Ημερησίου

Γ3. Προτεινόμενα

1. Προσομοίωση 1, θέμα Γ **3.** Προσομοίωση 2, θέμα Γ

5. Προσομοίωση 3, θέμα Γ **7.** Προσομοίωση 4, θέμα Γ

9. Προσομοίωση 5, θέμα Γ **19.** Θέμα Γ, εξετάσεις 2016-Ημερήσιο.

21. Θέμα Γ, εξετάσεις 2016-επαναληπτκές-Ημερήσιο.

Δ3. Προτεινόμενα

1. Προσομοίωση 1, θέμα Δ **2.** Προσομοίωση 3, θέμα Δ

3. Προσομοίωση 5, θέμα Δ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

I.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση	Δικαιολόγηση
1	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
2	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ $f(x)=g(x)=c\neq 0, x\in[a,\ \beta]$
3	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
4	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ και άκρα $a=0,\ \beta=2\pi$. Τότε $\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$.
5	**Α**	Αληθές , γνωστή ιδιότητα.
6	**Ψ**	Ψευδές, αφού δεν ισχύει π.χ για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ και άκρα $a=0,\ \beta=\frac{3\pi}{2}$. Τότε $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=1>0$ και $f(x)<0, x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.
7	**Α**	$f(x)=x^4+1<x^4+x^2+1=g(x)$ και οι f,g δεν είναι παντού ίσες στο $[-a,\ a],\ a>0$. Επομένως: $\int_{-a}^{a} f(x)dx<\int_{-a}^{a} g(x)dx$.
8	**Α**	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1-\eta\mu^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)dx=$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)dx$
9	**Α**	$\int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt=\int_e^1 -\ln t dt=\int_1^e \ln t dt$
10	**Ψ**	Ψευδές, αφού για να παριστάνει εμβαδόν θα έπρεπε να ισχύει $x^3-x\geq 0,\ x\in[-1,\ 1]$ που δεν ισχύει σε όλο το διάστημα.

ΙΙ.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση
1	**Δ**
2	**Α**
3	**Β**
4	**Δ**
5	**Β**
6	**Γ**

ΙΙΙ.

Α/Α Ερώτησης	Απάντηση
1	**Β, Ζ**
2	Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u .

Γ3. Προτεινόμενα

1. Θέμα Γ, εξετάσεις 2016 -Ημερήσιο.

2. Θέμα Γ, εξετάσεις 2017 επαναληπτικές-Ημερήσιο.

4. Θέμα Γ, εξετάσεις 2016 Εσπερινό

5. Θέμα Γ, εξετάσεις 2017 επαναληπτικές-Ημερήσιο.

6. Θέμα Γ, εξετάσεις 2016 (τέκνα εξωτερικού)

Δ3. Προτεινόμενα

4. Θέμα Δ, εξετάσεις 2017 -Ημερήσιο. **5.** Προσομοίωση 7, θέμα Δ.

6. Προσομοίωση 6, θέμα Δ. **8.** Θέμα Δ, εξετάσεις 2016 -Ημερήσιο

9. Θέμα Δ, εξετάσεις 2016 –επαναληπτικές –Ημερήσιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}: ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 1

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1−1», όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

«Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ »

Α2. Το $\int_\alpha^\beta c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση β − α και ύψος c .

Α3. Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

Δηλαδή:

$$\left(f+g\right)'\left(x_0\right) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Α4.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Για το πεδίο ορισμού D_f της f έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{1-x}>0\\ 1-x\neq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x+1)(1-x)>0\\ x\neq 1\end{array}\right\} \Leftrightarrow -1<x<1$$

Επομένως $D_f=(-1,\ 1)$

B2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f=(-1,\ 1)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων αφού οι επόμενες συναρτήσεις:

$$g(x)=\frac{x+1}{1-x}$$
$$h(x)=\ln g(x)$$
$$\Phi(x)=2\ln g(x)+3$$

είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού της.

B3. Έστω $x_1,x_2\in D_f=(-1,\ 1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ Θα αποδείξουμε ότι $x_1=x_2$
Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3=2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3\Leftrightarrow \ln\frac{x_1+1}{1-x_1}=\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2}\Leftrightarrow (x_1+1)(1-x_2)=(1-x_1)(x_2+1)\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f αντιστέφεται.
Για την αντίστροφή της έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\Leftrightarrow 2\ln\frac{x+1}{1-x}=y-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{1-x}=\frac{y-3}{2}\Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x}=e^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=(1-x)e^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-xe^{\frac{y-3}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+xe^{\frac{y-3}{2}}=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Leftrightarrow x\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{y-3}{2}}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 < \frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} < 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} < 1 \\ -1 < \dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{y-3}{2}}-1 < 1+e^{\frac{y-3}{2}} \\ -1-e^{\frac{y-3}{2}} < e^{\frac{y-3}{2}}-1 \end{pmatrix}$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι αληθείς για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{x-3}{2}}},\ x \in \mathbb{R}$$

Η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο και σύνθεση των επόμενων συνεχών συναρήσεων:

$$f_1(x) = e^{\frac{x-3}{2}}$$

$$f_2(x) = \frac{e^x-1}{1+e^x}$$

B4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right) = \lim_{u\to\infty}(2u+3) = +\infty \quad \left(u = \frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{1-x} = +\infty\right)$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right) = \lim_{u\to 0^+}(2\ln u+3) = -\infty$$

$$\left(u = \frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{1-x} = 0\right)$$

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Γ1. Η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}, & \text{αν } x>0 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq 1\\ \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}, & \alpha\nu\ x<0\\ \kappa, & \alpha\nu\ x=1\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Για το $\lim_{x\to 0} f(x)$ έχουμε:

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}=0$

αφού $\lim_{x\to 0^+}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right]=\lim_{x\to 0^+} e^{-x^2+1}\cdot\lim_{x\to 0^+}(x-1)=e\cdot(-1)=-e$ και $\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$.

- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}=0$

αφού $\lim_{x\to 0^-}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right]=\lim_{x\to 0^-} e^{-x^2+1}\cdot\lim_{x\to 0^-}(x-1)=e\cdot(-1)=-e$ και $\lim_{x\to 0^-}(\ln(-x))=-\infty$

Επομένως είναι $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ και άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

Η συνάρτηση f ίναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0,\ 1\}$ ώς πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού

$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. Τέλος για να είναι η f συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_1=1$.

Έχουμε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L΄ Hospital:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)x\right]=1$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f\left(1\right) = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$

Γ2. α) Η συνάρτηση:

$$g\left(x\right) = f\left(x\right)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x > 0$$

γίνεται διαδοχικά:

Για $x = 1$ έχουμε $g\left(1\right) = f\left(1\right)\cdot \ln 1 = 0$ και

$$g\left(x\right) = \frac{e^{-x^2+1}\left(x-1\right)}{\ln\left|x\right|}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{-x^2+1}\left(x-1\right)}{\ln x}\left(\ln 1 - \ln x^2\right)$$

$$= \frac{e^{-x^2+1}\left(x-1\right)}{\ln x}\left(-2\ln x\right) = -2e^{-x^2+1}\left(x-1\right)$$

Επομένως θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης:

$$g\left(x\right) = -2e^{-x^2+1}\left(x-1\right),\ x > 0$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \infty\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'\left(x\right) = -2\left[-2x\left(x-1\right)e^{-x^2+1} + e^{-x^2+1}\right] = -2e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right),\ x > 0$$

Επειδή $-2e^{-x^2+1} < 0,$ για $x > 0$ το πρόσημο της $g'\left(x\right)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $-2x^2+2x+1$

Ο πίνακας προσήμου της $g'\left(x\right)$ είναι ο επόμενος:

x	0 $\quad\quad$ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$g'\left(x\right)$	$-$	$+$
$g\left(x\right)$	↘	↗

Επομένως η συνάρτηση g είναι:

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ και

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$

β) Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της $g'(x)$ του ερωτήματος (i) η συνάρτηση g έχει ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ το $g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)$

Επομένως για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$g(x) \geq g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow -2e^{-x^2+1}(x-1) \geq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2+1}(x-1) \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

Άρα:

- Για $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}$$

- Για $x-1<0$ *και* $x>0 \Leftrightarrow 0<x<1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}$$

Γ3. α) Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ή αλλιώς η $g(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x) = -4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right) = -4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right) =$$

$$= -4e^{-x^2+1}(x+1)\left(2x^2-4x+1\right),\ x>0$$

Επειδή $-4e^{-x^2+1}<0$ *για* $x>0$ και $x+1>0$ το πρόσημο της $g''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $2x^2-4x+1$

Ο πίνακας του προσήμου της $g''(x)$ είναι ο επόμενος:

$0 \qquad \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \qquad \infty$

x			
$g''(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Επομένως η συνάρτηση g :

- Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left(0,\ \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$
- Είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$
- Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$
- Τα σημεία καμπής της είναι το $A\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, g\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το

$A\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}e^{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}\right)$ και το $B\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ g\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το

$B\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}e^{-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}\right)$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A\big(2,\ g(2)\big)$ είναι:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+2e^{-3}=6e^{-3}(x-2) \Leftrightarrow y=6e^{-3}x-14e^{-3}$$

Επειδή η g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ θα είναι:

$$y \geq g(x) \Leftrightarrow 6e^{-3}x-14e^{-3} \geq -2e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow -3e^{-3}x+7e^{-3} \leq e^{-x^2+1}(x-1) \Leftrightarrow$$
$$e^{-4}(-3x+7) \leq e^{-x^2}(x-1)$$

, για κάθε $x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty \right)$

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B\left(1,\ g(1)\right)$ είναι:

$$y - g\left(1\right) = g'\left(1\right)\left(x-1\right) \Leftrightarrow y = -2\left(x-1\right)$$

Επειδή η g είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα

$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1 \right) \subset \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right)$ θα είναι:

$$y \le g\left(x\right) \Leftrightarrow -2\left(x-1\right) \le -2e^{-x^2+1}\left(x-1\right) \Leftrightarrow x-1 \ge e^{-x^2+1}\left(x-1\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 \le e^{-x^2+1} \Leftrightarrow e^{-x^2} \ge e^{-1},$$

για κάθε $x < 1$ αφού $x-1 < 0$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ το 1ο μέλος της δοθείσας σχέσης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), όπως προφανώς παραγωγίσιμη είναι η συνάρτηση του 2ου μέλους. Παραγωγίζοντας[1] λοιπόν τα μέλη της δοθείσας σχέσης έχουμε διαδοχικά (όχι ισοδύναμα):

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$
$$e^{f(x)}f'(x)[f^2(x) - 2f(x) + 3] + e^{f(x)}[2f(x)f'(x) - 2f'(x)] = 1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x) - 2f(x)f'(x) + 3f'(x) + 2f(x)f'(x) - 2f'(x)] = 1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x) + f'(x)] = 1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x)+1) = 1$$
$$f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1} > 0, x \in (0,\infty)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$ άρα είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ με } x \in A = (0,\infty) \text{ και } y \in f(A) = \mathbb{R}$$

---

[1] Μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την παραγωγισιμότητα της f με ιδιότητες της ισότητας.

Άρα, θα έχουμε από την δοθείσα σχέση:

$$e^y(y^2-2y+3)=f^{-1}(y),\ y\in\mathbb{R} \text{ ή } f^{-1}(x)=e^x(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$$

Δ2. Η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x)=e^x(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=e^x(x^2-2x+3)+e^x(2x-2)=e^x(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $\left(f^{-1}(x)\right)'$ είναι επίσης παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)''=e^x(x^2+1)+2xe^x=e^x(x+1)^2,\ x\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή:

$$\left(f^{-1}(x)\right)''>0,\ x\in(-\infty,-1)\ \kappa\alpha\iota\ x\in(-1,\ -\infty)$$

που σημαίνει ότι η $f^{-1}(x)$ είναι κυρτή στο $(-\infty,-1]$ και στο $[-1,+\infty)$ (δηλαδή στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $x=0\Rightarrow f^{-1}(0)=3$ δηλαδή στο σημείο $A(0,3)$ Αν θέσουμε $g(x)=f^{-1}(x),\ x\in\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α είναι :

$$y-3=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+3\ \ (g'(0)=(f^{-1})'(0)=3$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1\left|f^{-1}(x)-(x+3)\right|dx=\int_0^1[e^x(x^2-2x+3)-x-3]dx=$$

$$=\int_0^1 x^2e^xdx-2\int_0^1 xe^xdx+3\int_0^1 e^x-[\frac{x^2}{2}]_0^1-3[x]_0^1=4e-\frac{21}{2}\tau.\mu$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f^{-1} είναι κυρτή δηλαδή ότι: $f^{-1}(x)\geq x+3,\ x\in\mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x)-(x+3)\geq 0,\ x\in(0.1)$

Δ3. α)[2] Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1},\ x \in (0,\infty) \text{ και } \left(f^{-1}(x)\right)' = e^x(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}$$

Άρα :

$$f'(f^{-1}(x)) = \frac{e^{-f(f^{-1}(x))}}{[f(f^{-1}(x))]^2+1} = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \cdot e^x(x^2+1) = 1$$

β) Η απόσταση των σημείων Α και Β είναι :

$$(\text{AB})^2 = 2(x - f^{-1}(x))^2,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\text{AB}) = \sqrt{2}\left|x - f^{-1}(x)\right|,\ x \in \mathbb{R}$$

$$(\text{AB}) = \sqrt{2}(f^{-1}(x) - x),\ x \in \mathbb{R}$$

(Χρησιμοποιήσαμε $f^{-1}(x) \geq x+3 > x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(x) - x > 0$.

Αν θέσουμε :

$$h(x) = \sqrt{2}(f^{-1}(x) - x) = \sqrt{2}[e^x(x^2-2x+3) - x], x \in \mathbb{R}$$

θα έχουμε ότι η $h(x)$ είναι παραγωγίσμη (ως πράξεις παραγωγίσμων) με:

$$h'(x) = \sqrt{2}[e^x(x^2+1) - 1], x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ μοναδικό,}$$

διότι η συνάρτηση:

$$\varphi(x) = e^x(x^2+1) - 1,\ x \in \mathbb{R}$$

είναι συνάρτηση «1-1», αφού η $\varphi'(x) = e^x(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε:

---

[2]Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και γενικότερα αφού: $f(f^{-1}(x)) = x, x \in D_{f^{-1}}$ και παραγωγίζοντας τα μέλη της έχουμε $f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = 1$.

Επίσης τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x), x)$ είναι συμμετρικά ως προς την $y = x$.

- Είναι: $x<0 \Rightarrow \varphi(x)<\varphi(0) \Rightarrow \varphi(x)<0 \Rightarrow e^x(x^2+1)-1<0$
  $\Rightarrow \sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]<0$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

- Είναι:

$x>0 \Rightarrow \varphi(x)>\varphi(0) \Rightarrow \varphi(x)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x(x^2+1)-1>0 \Rightarrow \sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]>0$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

και άρα η συνάρτηση $h(x)$ (μπορεί να φανεί πιο καθαρά από τον πίνακα προσήμου της $h'(x)$) έχει ελάχιστο στο $x_0=0$, το $h(0)=\sqrt{2}(f^{-1}(0))=3\sqrt{2}$ δηλαδή $(AB)_{\min}=3\sqrt{2}$.

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 2

ΘΕΜΑ 1ο :

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \ , \ \text{για κάθε} \ \ x \in \Delta \ .$$

Α2.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$

Α3.

α. Σωστό.

β. Λάθος.

γ. Σωστό.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2º

Β1. Πρέπει να ισχύει:

$$e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$$

Επομένως $D_f = \left[\ln 2, \ +\infty\right)$

Β2. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f **.** Εχουμε διαδοχικά:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} < \sqrt{e^{x_2} - 2} \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} + 3 < \sqrt{e^{x_2} - 2} + 3$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\ln 2, \ +\infty\right)$.

<u>Σημείωση:</u> Μπορεί, πιο εύκολα, η μονοτονία της συνάρτησης f να προκύψει και ως εξής:

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 2}}, \ x > \ln 2 \ .$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\ln 2, \ +\infty\right)$.

Έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[f(\ln 2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ με $f(\ln 2)=3,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\sqrt{e^x-2}+3\right)=+\infty$, δηλαδή το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $\left[3,\ +\infty\right)$.

Η f δεν έχει ρίζες αφού $f(x)\geq 3$, για κάθε $x\in\left[\ln 2,\ +\infty\right)$.

B3. Για κάθε $y\in\left[3,\ +\infty\right)$ έχουμε διαδοχικά:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=4\sqrt{e^x-2}+3\Leftrightarrow \frac{y-3}{4}=\sqrt{e^x-2}\Leftrightarrow\left(\frac{y-3}{4}\right)^2=e^x-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x=\left(\frac{y-3}{4}\right)^2+2\Leftrightarrow x=\ln\left[\left(\frac{y-3}{4}\right)^2+2\right]$$

Επομένως:

$$f^{-1}(x)=\ln\left[\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+2\right],\ x\in\left[3,\ +\infty\right)$$

B4. Η συνάρτηση g είναι άρτια , αφού:

$$g(x)=g(-x)=\frac{1}{x^2}+2,\ \text{για κάθε }\ x\in\mathbb{R}^*.$$

Επομένως η g **δεν** είναι αντστρέψιμη.

B4. Για το πεδίο ορισμού της fog έχουμε:

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g\ /\ g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^*\ /\ \frac{1}{x^2}+2\geq\ln 2\right\}=\mathbb{R}^*$$

(αφού $\frac{1}{x^2}+2>1,\ \ \ln 2<1$ είναι πάντα αληθείς)

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=4\sqrt{e^{\frac{1}{x^2}+3}-2}+2$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Έχουμε αφού $x>0$:

$$2x\ln x+\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow 2x^2\ln x+1>0\ ,$$

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = 2x^2 \ln x + 1, \ x > 0 \ ,$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, \ +\infty)$ με:

$$g'(x) = 4x \ln x + 2x = 2x \cdot (2\ln x + 1)$$

και έχουμε ($x > 0$):

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x \ln x + 2x = 2x \cdot (2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

και

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2\ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2\ln x + 1) < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \ +\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0 \ .$$

Επομένως:

$$g(x) \geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x > 0 \ ,$$

άρα αποδείξαμε ότι:

$$2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{για κάθε} \ x > 0 \ .$$

Γ2. Έχουμε:

Η f είναι και παραγωγίσιμη στο $(0, \ +\infty)$ με:

$$f'(x) = \left[(x^2+1) \cdot \ln x\right]' = 2x \ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x \ln x + \frac{1}{x}\right) > 0$$

αφού:

$$x > 0 \quad \text{και} \quad 2x\ln x + \frac{1}{x} > 0$$

από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ +\infty\right)$.

Επίσης το $x = 1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f\left(x\right) = 0$, η οποία λόγω της μονοτονίας της f είναι και μοναδική.

Γ3. Έχουμε:

Η f' είναι και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ +\infty\right)$ με:

$$\left(2x\ln x + x + \frac{1}{x}\right)' = 2\ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2},\ x > 0$$

και

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0$$

για κάθε $x > 0$.

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $\left(0, +\infty\right)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, +\infty\right)$.

Επίσης:

$f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},\ 1\right]$, υπάρχει, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε:

$$0 < x < x_0 \Leftrightarrow f''(x) < f(x_0) = 0$$

και

$$x > x_0 \Leftrightarrow f''(x) > f(x_0) = 0$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ4. α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=+\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty\ ,$$

αφού:

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1\quad \text{και}\ \lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty\ .$$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|f(x)\right|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx=-I_1+I_2\ ,\ \text{όπου}\ I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx$$

$$\text{και}\ \ I_2=\int_{1}^{e}f(x)dx$$

αφού , επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$x>1\Rightarrow f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>0$$

$$\frac{1}{e}<x<1\Rightarrow f(x)<f(1)\Rightarrow f(x)<0$$

Έχουμε:

$$I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot \ln x dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x dx=$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}=\frac{4}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}$$

$$I_2=\int_{1}^{e}\left(x^2+1\right)\cdot \ln x dx=\int_{1}^{e}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x dx=$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx=\frac{e^3}{3}+e-\int_{1}^{e}\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=$$

$$=\frac{e^3}{3}+e-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{e}-\left[x\right]_{1}^{e}=\frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}+\frac{10}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{20}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}\ \ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^x f'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x=xf'(x)+c\ \ (1)$$

Για $x=0$ είναι $0-1=0+c\Leftrightarrow c=-1$. Επομένως από την σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}&e^x f'(x)-e^x=xf'(x)-1\Leftrightarrow e^x f'(x)-xf'(x)=e^x-1\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}\end{aligned}\qquad(2)$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$h(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων

για $x \in \mathbb{R}$) με $h'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)$ είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$ είναι :

- Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Επομένως η $h(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, δηλαδή: $h(x) \geq h(0) = 1 > 0$,

$x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\left(e^x - x\right)'}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\ln\left|e^x - x\right|\right)' \Leftrightarrow f(x) = \ln\left|e^x - x\right| + c_1,\ x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $0 = 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$. Επομένως από την σχέση (2) έχουμε:

$$f(x) = \ln\left|e^x - x\right| \qquad \text{ή} \qquad (x) = \ln\left(e^x - x\right),\ x \in \mathbb{R}\ ,$$

αφού $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο

παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, 0\right]$.

Έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$ (επειδή η f είναι και συνεχής στο 0).

Δ3. Η f' είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f''(x) = \frac{(2-x)e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}, \; x \in \mathbb{R} .$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $(2-x)e^x - 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση:

$$K(x) = (2-x)e^x - 1, \; x \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$K'(x) = -e^x + (2-x)e^x = e^x\left(1-x\right), \; x \in \mathbb{R} .$$

Έχουμε:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$K'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$K'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, 1\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1, +\infty\right)$. Έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_1 = 1$ το $K(1) = e - 1 > 0$.

Θα βρούμε τις εικόνες $K\left((-\infty,1]\right)$, $K\left([1,+\infty)\right)$. Έχουμε:

$$K\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}K(x),\ K(1)\right]=\left(-1,\ e-1\right]$$

$$K\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}K(x),\ K(1)\right]=\left(-\infty,e-1\right]$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty}K(x)=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}K(x)=-\infty$$

Επειδή $0\in\left(-1,\ e-1\right]$ και $0\in\left(-\infty,e-1\right]$ η $K(x)$ έχει μία ρίζα ξ_1 στο $(-\infty,1]$ και μία ρίζα ξ_2 στο $[1,+\infty)$, οι οποίες είναι μοναδικές, επειδή η $K(x)$ είναι «1-1» στα διαστήματα αυτά (ως γνησίως μονότονη στα διαστήματα $\left(-\infty,\ 1\right]$ και $[1,+\infty)$ αντίστοιχα). Για να αποδείξουμε όμως ότι τα σημεία $A\left(\xi_1,\ f(\xi_1)\right)$ και $B\left(\xi_2,\ f(\xi_2)\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f πρέπει να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ (ισοδύναμα η $K(x)$) αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των $\xi_1,\ \xi_2$. Έχουμε:

$$1>x>\xi_1\Rightarrow K(x)>K(\xi_1)\Rightarrow K(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$$

$$x<\xi_1\Rightarrow K(x)<K(\xi_1)\Rightarrow K(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$$

$$x>\xi_2\Rightarrow K(x)<K(\xi_2)\Rightarrow K(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$$

$$1<x<\xi_2\Rightarrow K(x)>K(\xi_2)\Rightarrow K(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$$

Επομένως η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής τα $\xi_1\in\left(-\infty,\ 1\right]$ και $\xi_2\in\left[1,\ +\infty\right)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=\ln\left(e^{x}-x\right)-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\ .$$

Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- $h(0)=-1<0$

- $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ (διότι $\frac{\pi}{2}>0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)=0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$). Άρα $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.
- Επομένως υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0)=0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x_0}-x_0\right)-\sigma\upsilon\nu x_0 .$$

Για τη μοναδικότητα του x_0 θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη (ή «1-1» με τον ορισμό). Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$h'(x)=f'(x)+\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R} .$$

Είναι $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, διότι είναι $f'(x)>0$ και $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Δ5. Έχουμε:

$$I=\int_0^1\left(e^x-1\right)\frac{f(x)}{e^x-x}dx=\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x-x}\cdot f(x)dx=\int_0^1 f'(x)\cdot f(x)dx=$$

$$=\left[f(x)f(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)dx$$

Επομένως:

$$I=f^2(1)-f^2(0)-I \Leftrightarrow 2I=\ln^2\left(e-1\right)\Leftrightarrow I=\frac{\ln^2\left(e-1\right)}{2}$$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 3

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου

Α3.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Σωστό.

δ. Σωστό.

ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Για να ορίζεται η f, πρέπει:

$$3e^x + 1 > 0,$$

που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Β2. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} < 3e^{x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3e^{x_1} + 1 < 3e^{x_2} + 1 \Rightarrow \ln(3e^{x_1} + 1) < \ln(3e^{x_2} + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(3e^{x_1} + 1) - 2 < \ln(3e^{x_2} + 1) - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε εύκολα ότι

$$f'(x) = \frac{3e^x}{3e^x + 1} > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Β3. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y + 2 = \ln(3e^x + 1) \Leftrightarrow e^{y+2} = 3e^x + 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{e^{y+2} - 1}{3},\quad \frac{e^{y+2} - 1}{3} > 0$$

Οπότε:

$$x=\ln\frac{e^{y+2}-1}{3},\ y>-2$$

Άρα:

$$f^{-1}(x)=\ln\frac{e^{y+2}-1}{3},\ x>-2$$

Β4. Έχουμε:

$$f(x)<f(\ln 5-2)-2\Leftrightarrow \ln(3e^{x}+1)-2<\ln\frac{e^{\ln 5}-1}{3}-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(3e^{x}+1)<\ln\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3e^{x}+1<\frac{4}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9e^{x}+3<4\Leftrightarrow 9e^{x}<1\Leftrightarrow e^{x}<\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<-\ln 9$$

Επειδή όμως $x\in(-2,\ +\infty)$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,+\infty)$.

Γ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x)=e^{x}-\frac{1}{x+1},\ f''(x)=e^{x}+\frac{1}{(x+1)^{2}}$$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f''(0)=0$, άρα

$$-1<x<0\Leftrightarrow f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(-1,0)$$

$$x>0\Leftrightarrow f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Επιπλέον $f(0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	-1		0		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	
f(x)		↘	0	↗	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Γ2. α. Έχουμε:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left[e^x - \ln(x+1) - 1\right] = +\infty \text{ , αφού}$$

$\lim_{x \to -1^+} \ln(x+1) = \lim_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$, όπου: $u = x+1$, $x \to -1^+ \Leftrightarrow u \to 0^+$

και $\lim_{x \to -1^+} [e^x - 1] = \frac{1}{e} - 1$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1, +\infty)$, μοναδική λύση την $x = 0$, αφού:

$$x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0$$

β. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της f

<u>Κατακόρυφες</u>: Επειδή:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(e^x - \ln\left(x+1\right) - 1\right) = +\infty \ ,$$

η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

<u>Οριζόντιες:</u> Η C_f **δεν** έχει οριζόντια ασύμπτωση αφού:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x - \ln\left(x+1\right) - 1\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = \left(+\infty\right) \cdot 1 = +\infty$$

, διότι είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \left(\frac{0}{0} - D, L\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

<u>Πλάγιες:</u> Επειδή:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \ln\left(x+1\right) - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = \left(+\infty\right) \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1 - 0 - 0 = 1$$

Η C_f **δεν** έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Γ3. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2a+\beta-1} - \ln(2a+\beta) + e^{a+2\beta-2} - \ln(a+2\beta-1) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2a+\beta-1} - \ln\left((2a+\beta-1)+1\right) - 1 + e^{a+2\beta-2} - \ln\left((a+2\beta-2)+1\right) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(2a+\beta-1) + f(a+2\beta-2) \le 0 \ \ (1)$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι:

$$f(2a+\beta-1) = f(a+2\beta-2) = 0 \ , \ (2)$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2a+\beta-1) \neq 0$ τότε, επειδή

$f(x) \ge 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2a+\beta-1) > 0$ και η (1) μας δίνει:

$f(a+2\beta-2) \le -f(2a+\beta-1) < 0 \Rightarrow f(a+2\beta-2) < 0$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως

$$f(2a+\beta-1) = 0 \ \ (2)$$

οπότε από την (1) και $f(a+2\beta-2)=0$.

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases} 2a+\beta-1=0 \\ a+2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}.$$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^x-\ln(x+1)-1\right)dx=$$

$$=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 \ln(x+1)dx-\int_0^1 1dx=\left[e^x\right]_0^1-\left[x\ln(x+1)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x}{x+1}dx-\left[x\right]_0^1=$$

$$=e-1-\ln 2+I-1=e-2-\ln 2+I$$

$$I=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\left[x\right]_0^1-\left[\ln(x+1)\right]_0^1=1-\ln 2$$

Επομένως:

$$\mathrm{E}(\Omega)=e-2-\ln 2+1-\ln 2=e-1-2\ln 2\ \ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1+x\ln x}{x\ln x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x\ln x}+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|f(x)|=\left[\ln(\ln x)\right]'+(x)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\ln|f(x)|\right]'=\left[\ln(\ln x)+x\right]'\Leftrightarrow \ln|f(x)|=\ln(\ln x)+x+c$$

Για $x=e$ έχουμε:

$$\ln|f(e)|=\ln(\ln e)+e+c\Rightarrow \ln e^e=e+c\Rightarrow e=e+c\Rightarrow c=0$$

Επομένως:

$$\ln|f(x)|=\ln(\ln x)+x\ \ (1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ (ως παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$) και δεν έχει ρίζες αφού $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$, η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο

$\left(1,\ +\infty\right)$ και αφού $f(e) = e^e > 0$ θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(1,\ +\infty\right)$.

Άρα από την σχέση (1) έχουμε:

$$\ln f(x) = \ln(\ln x) + x \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln(\ln x) + \ln e^x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln\left(e^x \cdot \ln x\right) \Leftrightarrow f(x) = e^x \cdot \ln x,\ x > 1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^x,\ h(x) = \ln x$$

δεν έχουν κοινό σημείο, δηλαδή ότι η εξίσωση:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow e^x = \ln x \Leftrightarrow e^x - \ln x = 0 \quad \text{δεν έχει ρίζα στο } \left(1,\ +\infty\right)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$K(x) = e^x - \ln x,\ x \ge 1\ ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμηστο $\left[1,\ +\infty\right)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left[1,\ +\infty\right)$) με

$$K'(x) = e^x - \frac{1}{x},\ x \ge 1\ .$$

Η συνάρτηση $K'(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $\left[1,\ +\infty\right)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left[1,\ +\infty\right)$) με:

$$K''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0,\ x \ge 1\ .$$

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,\ +\infty\right)$. Άρα:

$$x > 1 \Rightarrow K'(x) > K'(1) = e - 1 \Rightarrow K'(x) > 0,\ x > 1$$

Επομένως η συνάρτηση $K(x)$ είναι είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,\ +\infty\right)$. Άρα:

$$x > 1 \Rightarrow K(x) > K(1) = e > 0 \Rightarrow K(x) > 0,\ x > 1$$

Οπότε η συνάρτηση $K(x)$ δεν έχει ρίζα στο $\left(1,\ +\infty\right)$, δηλαδή ισοδύναμα οι συναρτήσεις $g(x) = e^x,\ h(x) = \ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $\left(1,\ +\infty\right)$.

Δ2. α) Η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x \cdot \ln x,\ x > 1$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,\ +\infty)$) με:

$$f'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}>0\ \text{, για κάθε}\ \ x>1$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα $(1,\ +\infty)$. Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right),$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα $(1,\ +\infty)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$$

Αρα $f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$

β) Έχουμε:

$$f(x)=\frac{\lambda}{x}\Leftrightarrow xf(x)=\lambda\Leftrightarrow\varphi(x)=\lambda\ ,\ \ x>1\ ,$$

όπου $\varphi(x)=xf(x),\ x>1$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,\ +\infty)$) με:

$$\varphi'(x)=f(x)+xf'(x)=e^x\ln x+x\left(e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)=\ ,$$

$$=e^x\ln x+xe^x\ln x+e^x=e^x\left(\ln x+x\ln x+1\right)>0$$

για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,\ +\infty)$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$\varphi\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim_{x\to1^+}\varphi(x),\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$$

, αφού:

$$\lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to1^+}\left(xf(x)\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=+\infty$$

Άρα:

- Αν $\lambda\le0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ δεν έχει ρίζα στο $(1,\ +\infty)$

- Αν $\lambda > 0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,\ +\infty)$, αφού είναι «1-1» στο $(1,\ +\infty)$ (ως γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$).

Δ3. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,\ +\infty)$) με:

$$f''(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\,\frac{1}{x^2}=e^x\ln x+2e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\,\frac{1}{x^2}=$$

$$e^x\left(\ln x+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\left(\frac{x^2\ln x+2x-1}{x^2}\right)>0,\ x>1$$

Αφού για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$ είναι :

$$e^x>0$$

$$x^2>0$$

$$x^2\ln x+2x-1>0\left(x^2\ln x>0,\ 2x-1>0\right)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(e,\ f(e))$ είναι:

$$y-e^e=\left(e^e+e^{e-1}\right)(x-e)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}-e^e+e^e\Leftrightarrow y=\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}$$

, αφού $f'(e)=e^e+e^{e-1}$

Δ4. α) Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (στο σημείο επαφής Α ιχύει η ισότητα). Επομένως θα έχουμε:

$$f(x)\geq\left(e^e+e^{e-1}\right)x-e^{e+1}\Leftrightarrow f(x)\geq e^{e-1}(e+1)x-e^{e+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^{e-1}}\geq(e+1)x-\frac{e^{e+1}}{e^{e-1}}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^{e-1}}\geq(e+1)x-e^2 \quad ,$$

για κάθε $x>1$

β) Ολοκληρώνοντας[3] την προηγούμενη ανισοισότητα έχουμε:

$$\int_2^3 \frac{f(x)}{e^{e-1}}dx \ge \int_2^3 \left[(e+1)x - e^2\right]dx \Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \ge (e+1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 - e^2\left[x\right]_2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \ge (e+1)\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) - e^2(3-2) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \ge \frac{5}{2}(e+1) - e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \ge \frac{5+5e-2e^2}{2} \Leftrightarrow \int_2^3 f(x)dx \ge e^{e-1}\cdot\frac{5+5e-2e^2}{2}$$

Δ5. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ (προηγούμενο ερώτημα) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$, αντίστοιχα, αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$).

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in \left(x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(\xi_2) = 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

Από το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 4

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α2.

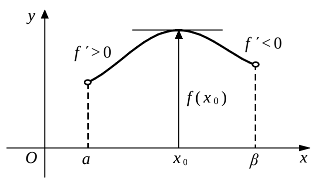
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

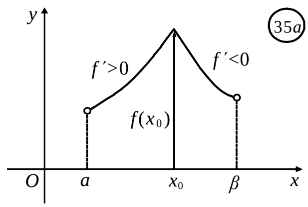
Α3. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0) \ , \text{ για κάθε } \ x \in (\alpha, x_0] \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0) \ , \text{ για κάθε } \ x \in [x_0, \beta) . \ (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0) \ , \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta) \ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α4.

α. Σωστό (αφού η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\beta]$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$. Επομένως $\int_a^\beta f(x)dx>0$ ή $\int_a^\beta f(x)dx<0$).

β. Λάθος **(**είναι $(B,\ A)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα)

γ. Σωστό

δ. Σωστό (αφού η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και χωρίς ρίζες θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι ή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως αύξουσα, ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως φθίνουσα).

ε. Σωστό (αν $x_1\in\mathbb{R}$ θέση τοπικού ακροτάτου, τότε από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_1)=0$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ -
οριζόντια εφαπτομένη).

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$. Επομένως:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+\kappa\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\frac{2+\kappa}{1}=2+\kappa$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=4$$

$$f(0)=\lambda$$

Άρα: $\lambda=4,\ 2+\kappa=4\Leftrightarrow\kappa=2$

Β2. Για $\kappa=2,\ \lambda=4$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 2\eta\mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ 4 \quad , & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{8 + \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} - 3\right) = (+\infty)\cdot\left(\sqrt{8} - 3\right) = +\infty$$

Β3. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x + \text{ημx}}{x - x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 + \dfrac{\text{ημx}}{x}}{1 - x} = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{1}{1-x}\cdot\left(2 + \frac{\text{ημx}}{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{\text{ημx}}{x}\right) = 0\cdot 2 = 0$$

αφού τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 + \dfrac{\text{ημx}}{x}\right)$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 + \dfrac{\text{ημx}}{x}\right) = 2$

[διότι $\left|\dfrac{\text{ημx}}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\text{ημx}}{x} \le \dfrac{1}{x}$] και από το κριτήριο της παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{\text{ημx}}{x}\right) = 2$$

Β4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \ln(8x + 1),\ x \in [0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ((ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$)

Επίσης:

$$g(0) = f(0) = 4$$

$$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln\frac{e}{9}$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, έχουμε ότι η εξίσωση:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$

ΘΕΜΑ 3º

Γ1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$g'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) - 2\ln x - 1 - 2 =$$
$$= 2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) - 2\ln x - 3 = 0$$

,λόγω της δεδομένης σχέσης. Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c \in \mathbb{R}$, για κάθε x>0.

Γ2. Αφού από το ερώτημα Δ1 η συνάρτηση g είναι σταθερή θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $g(x) = c$.

Για $x = 1 \Rightarrow g(1) = c \Rightarrow 2f(1) + f'(1) - 1 = c \Rightarrow c = 0$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) - x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) = x(2\ln x + 1) \Leftrightarrow$$
$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 2x\ln x + x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[x^2 f(x)\right]' = \left[x^2 \ln x\right]' \Leftrightarrow x^2 f(x) = x^2 \ln x + c_1 \ (c_1 \in \mathbb{R})$$

Για $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

Επομένως:

$$x^2 f(x) = x^2 \ln x \Leftrightarrow f(x) = \ln x,\ x > 0$$

Γ3. α). Έστω $A\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης C_f της f με την εφαπτομένη της (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με:

$$f'(x)=\frac{1}{x},x>0\ .$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο Α είναι:

$$(\varepsilon):y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$$

Αφού η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $0(0,0)$ έχουμε:

$$0-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(0-x_0\right)\Leftrightarrow -\ln x_0=-1\Leftrightarrow \ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e$$

Επομένως η ζητούμενη εξισωση είναι:

$$y-f(e)=f'(e)\left(x-e\right)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{e}\left(x-e\right)\Leftrightarrow y=\frac{1}{e}x$$

β) Έχουμε:

$$y(t)=\left(fof\right)(x(t))=f\left(f(x(t))\right)=\ln\left(\ln(x(t)\right),\ t>0,\ x(t)>1$$

Η συνάρτηση $y(t)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε ($t>0$ ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $t>0$) με:

$$y'(t)=\frac{1}{\ln(x(t)}\cdot\left(\ln(x(t)\right)'=\frac{1}{\ln(x(t)}\cdot\frac{1}{x(t)}\cdot x'(t),\ t>0$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ sec είναι:

$$t=t_0\Rightarrow y'(t_0)=\frac{1}{\ln(x(t_o)}\cdot\frac{1}{x(t_0)}\cdot x'(t_0)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2\ln 2}\ cm/\sec$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x)=\ln\left(\left|f(x)\right|\right),\ x\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right].$$

Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$) με:

$$K'(x) = \frac{1}{x\ln x},\ x \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right].$$

Η $K'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συνατήσεων στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$) με :

$$K''(x) = \frac{-(1+\ln x)}{x^2\ln^2 x} > 0 \text{ , για κάθε } \left(0,\ \frac{1}{e}\right) \text{ (είναι}$$

$$x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \text{).}$$

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$, δηλαδή η K είναι κυρτή στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα $\left[a,\ \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ αντίστοιχα αφού:

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[a,\ \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ (άρα και συνεχής σε αυτά). Επομένως, υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(a,\ \frac{a+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right)$ τέτοια, ώστε:

$$K'(\xi_1) = 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a)}{\beta-\alpha} \quad \text{και} \quad K'(\xi_2) = 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow K'(\xi_1) < K'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)-K(a)}{\beta-\alpha} < 2\frac{K(\beta)-K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)-K(a) < K(\beta)-K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < K(a)+K(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right) < \ln|f(a)|+\ln|f(\beta)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < \ln\left(|f(a)|\cdot|f(\beta)|\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < |f(a)|\cdot|f(\beta)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{|f(a)|\cdot|f(\beta)|} \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}$$

$(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\, f(a) < 0,\ f(\beta) < 0, \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \alpha,\beta \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right))$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0,\ x \in \mathbb{R}\ ,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή είναι «1-1» οπότε η f αντιστρέφεται.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x\left(x^4 + x^2 + 1\right) \Leftrightarrow \frac{e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4}}{e^5} \geq x^5 + x^3 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{5(x-1)} + e^{3(x-1)} + e^{x-1} \geq x^5 + x^3 + x \Leftrightarrow f(e^{x-1}) \geq f(x) \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$$

Η τελευταία σχέση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού:

- Για $x > 0$ γίνεται $x - 1 \geq \ln x$ (αληθής με χρήση της εφαρμογής 2,ii) στη σελίδα 266 του σχολικού βιβλίου).
- Για $x \leq 0$, είναι προφανής, αφού $e^{x-1} > 0$.

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση: Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = e^{x-1} - x,\ x \in \mathbb{R}$$

και να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της, οπότε αποδυκνείουμε ότι $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Δ2.

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - 1,\ x \in [0,1].$$

- Η συνάρτηση $K(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική).
- $K(0) = f(0) - 1 = -1 < 0$, $K(1) = f(1) - 1 = 2 > 0$, άρα $K(0) \cdot K(1) < 0$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$K(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1 \ .$$

Επειδή η f είναι συνάρτηση «1-1» το x_0 είναι μοναδικό.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x,\ x \in \mathbb{R}$$

και έτσι θέλουμε ισοδύναμα να λύσουμε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^{\ 6} + 3x_0^{\ 4} + 6x_0^{\ 2} - 12x_0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(x_0) \quad \text{(I)}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$h'(x) = 12x^5 + 12x^3 + 12x - 1 = 12\left[\left(x^5 + x^3 + x\right) - 1\right] = 12(f(x) - 1),\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = x_0 \in (0,1)$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$$

Επομένως η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = x_0$ και άρα είναι $h(x) \geq h(x_0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

<u>2ος τρόπος (Δ2 ii)</u>

Έχουμε ισοδύναμα:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x \geq 2x_0^{\ 6}+3x_0^{\ 4}+6x_0^{\ 2}-12x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x \geq \frac{x_0^{\ 6}}{6}+\frac{x_0^{\ 4}}{4}+\frac{x_0^{\ 2}}{2}-x_0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x)=\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R}\quad ,$$

η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αφού η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$F'(x)=x^5+x^3+x=f(x),\ x\in\mathbb{R}$$
$$F''(x)=f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_F της F στο σημείο της $A\left(x_0, F(x_0)\right)$ είναι:

$$y-F(x_0)=F'(x_0)\left(x-x_0\right)\Rightarrow y=F(x_0)+F'(x_0)\left(x-x_0\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=F(x_0)+f(x_0)\left(x-x_0\right)\Rightarrow y=F(x_0)+\left(x-x_0\right)$$

Αφού η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$F(x)\geq y \Leftrightarrow F(x)\geq F(x_0)+\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F(x)-x\geq F(x_0)-x_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x > \frac{x_0^{\ 6}}{6}+\frac{x_0^{\ 4}}{4}+\frac{x_0^{\ 2}}{2}-x_0,\ x\in\mathbb{R}$$

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (Ι) είναι το $\mathbb{R}$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\xi_1+1,\ \xi_2+1\right]$ και επειδή τη f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\xi_1+1 \le t \le \xi_2+1 \Rightarrow f\left(\xi_1+1\right) \le f(t) \le f\left(\xi_2+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f\left(\xi_1+1\right)dt \le \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt \le \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f\left(\xi_2+1\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\xi_1+1\right)\left(\xi_2-\xi_1\right) \le \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt \le f\left(\xi_2+1\right)\left(\xi_2-\xi_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\xi_1+1\right) \le \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2-\xi_1} \le f\left(\xi_2+1\right) \ (II)$$

Τώρα έχουμε:

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 \Rightarrow 1 < \xi_1+1 < \xi_2+1 < 2 \Rightarrow f(1) < f\left(\xi_1+1\right) < f\left(\xi_2+1\right) < f(2)$$

$$\Rightarrow 3 < f\left(\xi_1+1\right) < f\left(\xi_2+1\right) < 42 \ (III)$$

Επομένως, από τη σχέση (II),λόγω της σχέσης (III) προκύπτει ότι:

$$3 \le \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2-\xi_1} \le 42$$

Δ4.

α) Ισχύει ότι $e^{x-1} \ge x,\ x \in \mathbb{R}$ (ερώτημα Δ1,ii). Αν θέσουμε όπου x το x^2+1 έχουμε:

$$e^{x^2} \ge x^2+1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1 \ge 0 \quad \text{(IV)},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση:

$$\varphi(x) = e^{x^2}-x^2-1$$

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,1\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0,1\right]$) και επίσης δεν είναι παντού μηδέν στο $\left[0,1\right]$.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (IV) έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^1\left(e^{x^2}-x^2-1\right)dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 x^2dx - \int_0^1 1dx \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \frac{1}{3}+1 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \frac{4}{3} \Rightarrow 3\int_0^1 e^{x^2}dx > 4$$

β) Θέτουμε $f^{-1}(x) = u$ και έχουμε:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$
$$dx = f'(u)du$$
$$x = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$
$$x = 1 \Leftrightarrow f(u) = 1 \Leftrightarrow u = x_0$$
$$u \in [0, x_0] \subseteq [0,1] \Rightarrow u \geq 0$$

Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^1 \left| f^{-1}(x) \right| dx = \int_0^{x_0} |u| f'(u)du = \int_0^{x_0} u f'(u)du = \int_0^{x_0} u\left(5u^4 + 3u^2 + 1\right)du =$$

$$= \int_0^{x_0} \left(5u^5 + 3u^3 + u\right)du = \left[\frac{5u^6}{6} + \frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{5x_0^{\ 6}}{6} + \frac{3x_0^{\ 4}}{4} + \frac{x_0^{\ 2}}{2}$$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 5

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0) \quad , \quad \lambda = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Α2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} = \frac{\left(x-x_0\right)\cdot\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}\right)}{x-x_0} = x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}\right) = x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}$$

Δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$

Α4.

α. Σωστό (πρόταση του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 178)

β. Σωστό (η παράγωγος της f είναι **παντού** 0 αφού η f είναι σταθερή συνάρτηση, ως ορισμένο ολοκλήρωμα).

γ. Λάθος (όχι σε ένα τουλάχιστον σημείο αλλά σε ένα **το πολύ** σημείο).

δ. Λάθος (δεν ισχύει **υποχρεωτικά**, αφού π.χ. η συνάρτηση

$f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ενώ $f'(x)=3x^2\geq 0$, δηλαδή μπορεί και να μηδενίζεται σε κάποια σημεία).

ε. Σωστό[4] (Αν έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=a$ θα είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}.$$

Τότε όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, οπότε ασύμπτωτη είναι πάλι η $y=a$ **).**

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Η σχέση $\left(fof\right)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε για $x=2$ έχουμε:

$$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1\Leftrightarrow f(5)+10=5\Leftrightarrow f(5)=-5$$

Β2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$

άρα:

$$f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$$

οπότε η f είναι «1-1», και άρα αντιστρέφεται.

Β3. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$$\Rightarrow f\left(f(f^{-1}(2))\right)+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f^{-1}(2)=8\Rightarrow f^{-1}(2)=4$$

Β4. Έχουμε:

[4] Εδώ προφανώς εννοεί «πλάγια ασύμπτωστη» ευθεία της μορφής $y=ax+\beta$ με $\alpha\neq 0$, όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο στη σείδα 280.

$$f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2 \Leftrightarrow f^{-1}\left(2x^2+7x\right)-1=f^{-1}(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(2x^2+7x\right)=5 \Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5) \Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1=-1 \text{ ή } x_2=-\frac{5}{2}\right)$$

<u>Παρατήρηση:</u> Κανονικά σε τέτοιου είδους ασκήσεις θα πρέπει εξ΄αρχής να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή το σύνολο τιμών της f για να δούμε για ποια x ορίζεται η εξίσωση., Αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Στην προκειμένη περίπτωση είναι $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3º

Γ1. Έχουμε:

$$f(x)-1\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 1 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0) \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο $x_1=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=2x+a-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

<u>Παρατήρηση:</u> Θα πρέπει να επαληθεύσουμε την ευρεθείσα τιμή, αφού το αντίστροφο του Θεώρηματος του Fermat **δεν ισχύει**. Έχουμε:

Για $\alpha=1$ η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x)=x(x+1)-x+1=x^2+x-x+1=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x)=x^2+1\geq 1=f(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η τιμή $a=1$ είναι δεκτή.

Γ2. Για κάθε $x\in\left(1,\ +\infty\right)$ έχουμε διαδοχικά:

$$g'(x)\ln x = \frac{2g(x)}{x} \Rightarrow g'(x)\ln x - \frac{2g(x)}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)\ln^2 x - 2\ln x \cdot \frac{1}{x} g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)\ln^2 x - \left(\ln^2 x\right)' g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)\ln^2 x - \left(\ln^2 x\right)' g(x)}{\ln^4 x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{\ln^2 x}\right)' = 0$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = c\,,\ \ x \in \left(1,\ +\infty\right)$$

Για $x = e$ είναι:

$$x = e \Rightarrow \frac{g(e)}{\ln^2 e} = c \Rightarrow c = -1$$

Επομένως:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -\ln^2 x,\ x \in \left(1,\ +\infty\right)$$

Γ3. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 + \ln^2 x,\ x \in \left(0,\ +\infty\right)\ ,$$

η οποία είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$. Θα βρούμε το ελάχιστο της $K(x)$.

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ (ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,+\infty\right)$) με:

$$K'(x) = 2x + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 2\frac{x^2 + \ln x}{x},\ x > 0$$

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = x^2 + \ln x,\ x > 0$$

η οποία είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$. (Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $K(x)$ είναι όμοια με τις ρίζες και το πρόσημο αντίστοιχα της συνάρτησης $\Phi(x)$).

Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$(ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με $\Phi'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$, για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$. Άρα η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και στο διάστημα $(0,1)$, οπότε:

$$\Phi((0,1))=\left(\lim_{x\to 0^+}\Phi(x),\ \lim_{x\to 1^-}\Phi(x)\right)=(-\infty,1)\ \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\Phi(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\ln x\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\Phi(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\ln x\right)=1$$

Επειδή $0\in(-\infty,1)=\Phi((0,1))$ υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$\Phi(x_0)=0\Leftrightarrow K'(x_0)=0\ .$$

Έχουμε:

$$x>x_0\Rightarrow\Phi(x)>\Phi(x_0)\Rightarrow\Phi(x)>0\Leftrightarrow K'(x)>0$$

$$0<x<x_0\Rightarrow\Phi(x)<\Phi(x_0)\Rightarrow\Phi(x)<0\Leftrightarrow K'(x)<0$$

Άρα η συνάρτηση $K(x)$ είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ x_0]$ (στο x_0 είναι συνεχής) και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0,+\infty)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης Κ φαίνονται στον επόμενο πίνακα μεταβολών.

0	x_0	$+\infty$
Κ΄(x)	-	+
Κ(x)	↓	↑
	Ολ. Ελ	

Επομένως, η συνάρτηση:

$$K(x)=f(x)-g(x)$$

παρουσιάζει **ένα μόνο** ελάχιστο (ολικό) στο $x_0\in(0,1)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,\ +\infty)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=g'(\xi)\ .$$

Η συνάρτηση $K(x) = f(x) - g(x)$ έχει ακρότατο στο $x_0 \in (0,1)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$) με:

$$K'(x) = f'(x) - g'(x) \ , \ x \in (0,1).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$$

Το $x_0 = \xi$ είναι μοναδικό, ως μοναδική ρίζα της συνάρτησης Φ του ερωτήματος (Γ3α) (αφού η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$), άρα και μοναδική ρίζα της συνάρτησης K' .

Γ4. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$I = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \dfrac{g(x)}{f(x)}}\right] = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) - \dfrac{\ln^2 x}{x^2+1}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\dfrac{(x-1)^x}{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - \dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - \dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]$$

Θα βρούμε ξεχωριστά τα παραπάνω όρια.

Με χρήση του κανόνα του de l’ Hospital για τα παραπάνω όρια έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)^{x-1}=\lim_{x\to 1^+}e^{(x-1)\ln(x-1)}=\lim_{u\to u_0}e^{u},\ \text{όπου}\ u=(x-1)\ln(x-1)$$

$$u_0=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\left(x-1\right)^2}}=-\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)^{x-1}=\lim_{u\to u_0}e^{u}=e^{0}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\ (\text{όπου}\ u=x-1,\ \text{όταν}\ x\to 1\Leftrightarrow u\to 0)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln^2 x}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\frac{1}{x}\ln x}{3x^2-2x+1}=0$$

Επομένως:

$$I=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}=\frac{1}{1-0}=1$$

β) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι:

$$\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\int_1^e\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_1^e\left|K(x)\right|dx=$$

$$=\int_1^e K(x)dx=\int_1^e\left(x^2+1+\ln^2 x\right)dx=$$

$$=\int_1^e x^2dx+\int_1^e 1dx+\int_1^e \ln^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e+\left[x\right]_1^e+J=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}+e-1+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+J\ \ (V)$$

, όπου $J=\int_1^e \ln^2 xdx$. Τώρα για το J έχουμε:

$$J=\int_1^e \ln^2 x dx=\int_1^e (x)'\cdot \ln^2 x dx=$$

$$=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot 2\ln x\cdot \frac{1}{x}dx=e-2\int_1^e \ln x dx=$$

$$=e-2\int_1^e (x)'\cdot \ln x dx=e-2\left[x\ln x\right]_1^e+2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=e-2e+2\int_1^e 1dx=-e+2\left[x\right]_1^e=-e+2e-2=e-2$$

Επομένως, από τη σχέση (V), έχουμε τελικά:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\frac{e^3+3e-4}{3}+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+e-2=$$

$$=\frac{e^3+3e-4+3e-6}{3}=\frac{e^3+6e-10}{3}$$

, δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega)=\dfrac{e^3+6e-10}{3}$ τ.μ

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αντίστοιχα.

Από την σχέση:

$f(x)+f(1-x)=0$, για $x=\dfrac{1}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

Άρα ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η $x=\dfrac{1}{2}$, η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».

Δ2. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_0) = f(1) - f(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f'(x_0) = 2f(1)$$

(γιατί για $x = 1$ από την σχέση $f(x) + f(1-x) = 0$ έχουμε

$f(1) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = -f(1)$).

<u>2^ος^ τρόπος:</u> Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - 2f(1)x,\ x \in [0,1] \ ,$$

αφού στο διάστημα $[0,1]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

Δ3. Για το σημείο $A(x_1,\ g(x_1))$ στο οποίο η g τέμνει τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$g(x_1) = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \ ,$$

αφού η f είναι συνάρτηση «1-1»

Άρα $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g, στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0 πρέπει να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη[5] στο $x_0 = \frac{1}{2}$ με $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Έχουμε:

---

[5] Η παραγώγιση της συνάρτησης g γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{f'(x)}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Αφού:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(f' \ \text{συνεχής στο} \ \frac{1}{2}\right) \ \text{και} \ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}},$$

$$\text{δηλαδή} \ \ g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Επομένως, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow \omega=45^0$

Δ4 α) Έχουμε ότι:

$$f(x)+f(1-x)=0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=0\Rightarrow I_1+I_2=0 \ (1) \ ,$$

όπου $I_1=\int_0^1 f(x)dx$ και $I_2=\int_0^1 f(1-x)dx$. Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε:

Θέτουμε: $1-x=u\Leftrightarrow x=1-u$, $dx=-du$, $x=1\Leftrightarrow u=0$, $x=0\Leftrightarrow u=1$, οπότε έχουμε:

$$I_2=\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(u)du=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx=I_1$$

Επομένως , από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1+I_2=0\Leftrightarrow 2I_1=0\Leftrightarrow I_1=0\Leftrightarrow I_1=0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=0$$

β) Είναι $\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1 \ (I)$

από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$, για $x=1$ έχουμε:

$$f(0)+f(1)=0 \ (II)$$

Από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$f(0)=-\frac{1}{2} \ \kappa\alpha\iota \ f(1)=\frac{1}{2} \ .$$

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|f^{-1}(x)\right|dx$.

Θέτουμε:

$$f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$$

$$dx=f'(u)du$$

$$x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=f(0) \Leftrightarrow u=0$$ (αφού η f είναι «1-1»)

$$x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=f(1) \Leftrightarrow u=1$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^1|u|\cdot f'(u)du=\int_0^1 uf'(u)du=$$

$$=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-0=\frac{1}{2}$$,

δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega)=\frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ5. α) Θέτουμε ξανά:

$$f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$$

$$dx=f'(u)du$$

$$x=0 \Leftrightarrow u=f^{-1}(0) \Leftrightarrow u=\frac{1}{2} \ \left(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\, f\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)$$

$$x=f(\lambda) \Leftrightarrow u=f^{-1}\left(f(\lambda)\right) \Leftrightarrow u=\lambda$$

και έχουμε:

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_{0}^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} uf'(u)du =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \big[uf(u)\big]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} - \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(u)du =$$

$$= \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda f(\lambda)$$

β) Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l' Hospital έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\mathrm{K}(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda f(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda\cdot\ln\lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1+\ln\lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda}} = 0$$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 6

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Διατύπωση του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

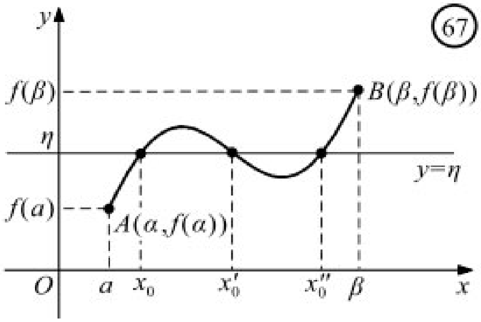
Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (επόμενο σχήμα).

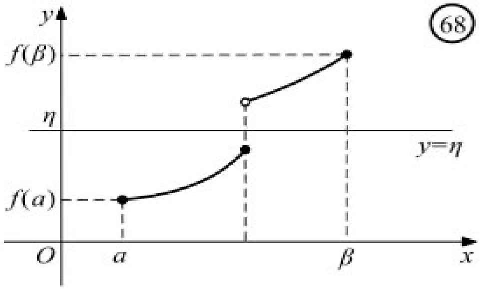
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι :



● η g είναι συνεχής στο [α, β] και

● $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$ Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Α2. Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση $x = \dfrac{1}{u}$.

Η αντικατάσταση $x = \dfrac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u .

Α3.

α. Σωστό.

β. Λάθος.

γ. Λάθος.

δ. Σωστό.

ε. Λάθος.

Α4. Το 2 (Το σημείο $A\big(0,\ f(0)\big)$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f) διότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2,\ 0)$ και συνεχής στο $[-2,\ 0]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,\ 0]$. Ακόμα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και συνεχής στο $[0,\ 2]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ 2]$. Επομένως στο $x_0 = 0$ έχει τοπικό ελάχιστο, δηλαδή το σημείο $A\big(0,\ f(0)\big)$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f .

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f είναι:

$$A = (1, 5) \cup (5,\ 9].$$

Το σύνολο τιμών $f(A)$ είναι $f\left(A\right) = (-2,\ 5]$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^+} f(x) = 3$

Β3.

α) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$,διότι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$

Δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$.

β) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(5,7)$

γ) θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f(x)=u_0 \Rightarrow \lim_{x\to 8^+} f(x)=\lim_{x\to 8^-} f(x)=5=u_0\ .$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right)=\lim_{u\to u_0} f(u)=\lim_{u\to 5} f(u)=3$$

Β4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1=3$ και $x_2=7$ αφού:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4\neq\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

Β5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x)=0$ είναι $\begin{matrix} x_3=4 \\ x_4=6 \\ x_5=8 \end{matrix}$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη (παράλληλη με τον άξονα $x'x$) οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε $f'(x_3)=f'(x_4)=f'(x_5)=0$.

<u>ή εναλλακτικά</u>: Η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία x_3, x_4, x_5 στα οποία είναι παραγωγίσιμη και επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι $f'(x_3)=f'(x_4)=f'(x_5)=0$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=e^x+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την g στο $[-1,\ 0]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-1,\ 0]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,\ 0]$).
- $g(0)=2>0$
- $g(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0$

Άρα υπάρχει $a\in(-1,\ 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(a)=0\Leftrightarrow e^{a}+2a+1=0\ .$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων

παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$), με $g'(x)=e^{x}+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in\mathbb{R}$, άρα και «1-1» , δηλαδή η η g έχει μοναδική ρίζα την $x=a$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων

παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=e^{x}+2x+1,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Άρα $f'(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ και η g έχει μοναδική ρίζα την $x=a$. Έχουμε:

$$x<a\Rightarrow g(x)<g(a)\Rightarrow f'(x)<0$$

$$x>a\Rightarrow g(x)>g(a)\Rightarrow f'(x)>0$$

Δηλαδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\ \alpha)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\ \alpha]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ \alpha]$. Ακόμα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(a,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\ +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\alpha$, το $f(a)=e^{a}+a^{2}+\alpha$ (1) .

Όμως έχουμε:

$$g(a)=0\Leftrightarrow e^{a}+2a+1=0\Leftrightarrow e^{a}=-2a-1 \quad (2)$$

Άρα η (1) δίνει:

$$f(a)=e^{a}+\alpha^{2}+\alpha=-2a-1+\alpha^{2}+\alpha=\alpha^{2}-\alpha-1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x) \geq f(a) \Rightarrow f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \ .$$

Γ3. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x + x^2 + x\right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(e^x + x^2 + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty \ .$$

Αν $\Delta_1 = \left(-\infty,\ \alpha\right]$, $\Delta_2 = \left[\alpha, +\infty\right)$ θα έχουμε:

$$f(\Delta_1) = \left[\alpha^2 - \alpha - 1,\ +\infty\right)$$

$$f(\Delta_2) = \left[\alpha^2 - \alpha - 1,\ +\infty\right)$$

(επειδή η f γν. φθίνουσα στο Δ_1 και γν. άυξουσα στο Δ_2)

Είναι:

$$\alpha \in (-1,\ 0) \Rightarrow -1 < \alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha^2 < 1 \\ 0 < -\alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \alpha^2 - \alpha - 1 < 1 \quad \text{και} \quad \frac{2017}{2016} > 1 \ .$$

Επομένως:

- $\dfrac{2017}{2016} \in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty,\ \alpha)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_1) = \dfrac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f , ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 ,είναι και «1-1».
- $\dfrac{2017}{2016} \in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $\rho_2 \in (a, +\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_2) = \dfrac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f , ως γνησίως αύξουσα στο Δ_2, είναι και «1-1».

Επομένως η f έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $\rho_1,\ \rho_2$.

Γ4. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται διαδοχικά:

$$f(x^2+1) + f(x^2+2) < f(x^2) + f(x^2+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2+1) - f(x^2) < f(x^2+3) - f(x^2+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x^2+1) - f(x^2)}{\left(x^2+1\right) - x^2} < \frac{f(x^2+3) - f(x^2+2)}{(x^2+3) - (x^2+2)} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση f στα διαστήματα:

$$\left[x^2,\ x^2+1\right] \text{ και } \left[x^2+2,\ x^2+3\right] \ ,\ x \in \mathbb{R} \ :$$

- Η f παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[x^2,\ x^2+1\right]$ και

$[x^2+2,\ x^2+3]$, $x \in \mathbb{R}$

(ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$). Άρα η f είναι και συνεχής στα διαστήματα αυτά. Επομένως υπάχουν αντίστοιχα :

$$\xi_1 \in (x^2, x^2+1),\ \xi_2 \in (x^2+2,\ x^2+3) \text{ με:}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{(x^2+1)-x^2} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)}$$

Έτσι η προς απόδειξη σχέση (1) γίνεται $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, η οποία είναι αληθής αφού:

$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ διότι:

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ (} f' \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{).}$$

Γ5. Έχουμε ότι:

$$y(t) = e^{x(t)} + x^2(t) + x(t),\ t \geq 0 \qquad (2).$$

Τα μέλη της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $t \geq 0$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $t \geq 0$). Επομένως έχουμε:

$$y'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 2x(t) \cdot x'(t) + x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = x'(t)\left(e^{x(t)} + 2x(t) + 1\right) \ (3)$$

Αν $t = t_0$ είναι η χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το $(a, f(a))$, τότε $x(t_0) = \alpha \in (-1,\ 0)$.

Η σχέση (3) για $t = t_0$ γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0)\left(e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1\right) \ (4) \text{ με } x'(t) \neq 0$$

Ισχύει ακόμα ότι :

$$e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1 = e^a + 2a + 1 = 0 \ (5).$$

Η σχέση (4), λόγω της σχέσης (5) γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0) \cdot 0 = 0 .$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = x\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\eta\mu x - f(x)\right)' = (x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 0 + c \Leftrightarrow 0 = c \Leftrightarrow c = 0$$

άρα:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

β. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με:

$$f'(x) = x\eta\mu x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow 0 < \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$$

Δ2. $g(x) = \left|x\varepsilon\varphi x - x^2\right| = |x| \cdot |\varepsilon\varphi x - x|$

Από το ερώτημα (Δ1 β) ισχύει:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x > x.$$

‘Εχουμε:

Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(-x) > -x \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x > -x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x < x$$

για $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Άρα $g(x) = x\varepsilon\varphi x - x^2$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$g'(x) = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - x = \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + x\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = = \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + x \cdot \varepsilon\varphi^2 x$$

- Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x > 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x > 0$ άρα $g'(x) > 0$
- Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x < 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x < 0$ άρα $g'(x) < 0$
- Αν $x = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$.

<u>2ος τρόπος:</u>

$$g'(x) = = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\right) + x\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$g'(0) = 0$

♦ Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma \upsilon \nu x > 0,\ \eta \mu x > x \sigma \upsilon \nu x,\ x \eta \mu^2 x > 0$, τότε $g'(x) > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

♦ Έστω $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g(-x_1) > g(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$

Δ3. α) $g(x) = a$, όπου $a > 0$

♦ $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$ και $a \in [0, +\infty)$, άρα υπάρχει μοναδικό

$x_o \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$) τέτοιο, ώστε $g(x_o) = a$

♦ $-x_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και

$$g(-x_o) = (-x_o)\varepsilon\varphi(-x_o) - (-x_o)^2 = g(x_o) = a$$

Το $-x_0$ είναι μοναδικό

(γιατί η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$)

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = a$, όταν

$a > 0$ είναι $-x_o + x_o = 0$.

β). Επειδή x_1 , x_2 , x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων

$g(x)=1$, $g(x)=2$, $g(x)=3$ αντίστοιχα, έχουμε:

$$g(x_1)=1,\ g(x_2)=2,\ g(x_3)=3$$

και είναι:

$$1<2<3 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)<g(x_3) \Leftrightarrow x_1<x_2<x_3$$

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού για την g στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ (αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι gπαραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως και στα, $[x_2, x_3]$, άρα και συνεχής σε αυτά) έχουμε:

$$(x_2-x_1)\cdot g'(\xi_1)=g(x_2)-g(x_1)=2-1=1 \quad ,\xi_1\in(x_1,x_2)$$

$$(x_3-x_2)\cdot g'(\xi_2)=g(x_3)-g(x_2)=3-2=1 \quad ,\xi_2\in(x_2,x_3)$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$(x_2-x_1)\cdot g'(\xi_1)+(x_3-x_2)\cdot g'(\xi_2)=2$$

Δ4. α. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[\eta\mu x-f(x)]-\ln x+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}\overset{D.L.P}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x+2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x+1}\overset{D.L.P}{=}\ =\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu^2 x+2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 0-2\eta\mu^2 0+2\eta\mu 0+0\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1}{2}$$

<u>2^ος τρόπος:</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[\eta\mu x-f(x)]-\ln x+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)+x^2}{\eta\mu^2 x-x\sigma\upsilon\nu x+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}+1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=l$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x}{2x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{1}{2}$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\eta\mu x}{1} = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$$

β.

Για $0 < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$ (I) (από το ερώτημα Δ1 β) και $x\eta\mu x > 0$ (II) για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x > 0 \quad \text{(III), ΄για κάθε} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο O (0,0) (αφού $f(0) = f'(0) = 0$).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$

είναι (λόγω της σχέσης (III) έχουμε:

$\left|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\right| = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$):

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-f'(x)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x\right|dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx=I_1-I_2+I_3 \quad (1)$$

$$\mathrm{I}_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\mathrm{I}_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu x)'dx=$$

$$=\left[x\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx=\frac{\pi}{2}+\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sigma\upsilon\nu x)'dx=-\left[x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx=\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

Άρα: $\mathrm{E}(\Omega)=1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+1=3-\frac{\pi}{2}\ \tau.\mu.$

<u>Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής των</u> $f,-f'$ <u>έχουμε:</u>

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,-f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο O (0,0) αφού :

$$f(x)=-f'(x)\Leftrightarrow \eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=0 \quad (1)$$

Προφανώς για $x=0$ η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι $f,-f'$ τέμνονται στο O (0,0) .

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\mathrm{K}(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$) με $\mathrm{K}'(x)=x\eta\mu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η Κ είναι συνεχής στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και «1-1» και επομένως η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο $(0,0)$.

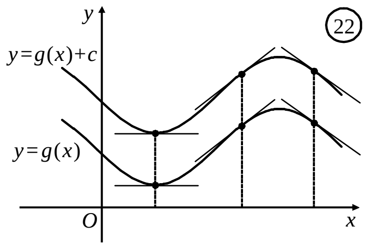
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 7

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \,.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



ii. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

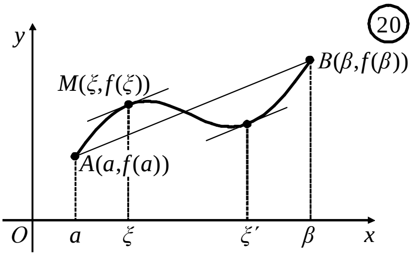
- ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *AB*.



Α3.

α. Λάθος **β.** Σωστό

γ. Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα:

$\left[-4,\ -2\right),\left(-2,\ 0\right),\left(0,\ 5\right]$, διότι δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = -2$ και δεν ορίζεται στο σημείο $x_2 = 0$

Β2. i. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 1$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$..

Β3.

α. Τα εσωτερικά σημεία $x_3 = 1,\ x_4 = 4,\ x_5 = 3$ του διαστήματος $\left(0,\ 5\right]$ είναι τα ζητούμενα κρίσιμα σημεία.

Στα σημεία $\mathrm{A}\left(x_3,\ f(x_3)\right),\ B\left(x_4,\ f(x_4)\right)$ υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ και επομένως $f'(x_3) = 0$ και $f'(x_4) = 0$ άρα οι θέσεις $x_3 = 1,\ x_4 = 4$ είναι κρίσιμα σημεία της f. Στο σημείο $\Gamma\left(x_5,\ f(x_5)\right)$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f και άρα η θέση x_5 είναι επίσης κρίσιμο σημείο της f .

β. Η παράγωγος της f , όταν $x \in \left(-4,\ -2\right)$ είναι ίση με $\text{εφ}135^\circ = -1$

ή διαφορετικά είναι ο λόγος $\dfrac{(3-1)}{(-4+2)} = -1$.

Β4. Το Ι ορίζεται, αφού η f ορίζεται στο διάστημα $\left[2,\ 4\right]$ και είναι συνεχής σε αυτό Το J δεν ορίζεται αφού η f δεν ορίζεται στο σημείο $\mathrm{x}_0 = 0$.

Β5.

α. Το πεδίο ορισμού D_{fog} έχουμε:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) \in [-4,\ 0) \cup (0,\ 5]\}$$

Είναι:

$g(x) \in [-4,\ 0) \cup (0,\ 5]$ αν, και μόνο αν,

$$(-4 \le x+1 < 0 \text{ ή } 0 < x+1 \le 5) \text{ ή } x \in [-5,\ -1) \cup (-1,\ 4]$$

Επομένως $D_{fog} = [-5,\ -1) \cup (-1,\ 4]$.

β. Ο τύπος της συνάρτησης fog είναι:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+1), x \in D_{f0g}\ .$$

Επομένως η γραφική παράσταση της fog είναι η γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 1 μονάδα αριστερά (οριζόντια μετατόπιση).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με :

$$f'(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^2 + 1 > 0,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Άρα αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και "1-1" και επομένως η f αντιστρέφεται.Το σύνολο τιμών της είναι το (A, B), όπου:

$$\mathrm{A} = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ B = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{, δηλαδή το } \mathbb{R}.$$

Γ2. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το -1.

Έχουμε:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x$$

Έστω:

$$g(x) = f(f(x)) - x \text{ , τότε είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

Παρατηρώ ότι:

$$g(-1) = f(f(-1)) + 1 = f(-1) + 1 = -1 + 1 = 0$$

Άρα το -1 είναι ρίζα της g(x)

Η συνάρτηση g(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = f'(f(x))\, f'(x) - 1 = \left(3\left(x^3 + x + 1\right)^2 + 1\right)\left(3x^2 + 1\right) - 1 =$$

$$= \left(9x^2 + 3\right)\left(x^3 + x + 1\right)^2 + 3x^2 > 0$$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1».

Επομένως το -1 είναι η μοναδική ρίζα της

$$g(x)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1, f(-1))$ ή $A(-1, -1)$.

Εναλλακτικά

<u>2^{ος} τρόπος:</u>

Έχουμε:

$f(-1)=-1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1)=-1$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f(f(x))=x \ .$$

Έστω ότι η $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$ επομένως και η $f(f(x))=x$ έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2 .

Θεωρώ τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(f(x))-x,\ x\in\mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα

$[\rho_1, \rho_2]$.Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[\rho_1, \rho_2]$)
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (ρ_1, ρ_2)) με:

  $$g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)-1=\left(3f^2(x)+1\right)\cdot(3x^2+1)-1=$$
  $$=9f^2(x)\cdot x^2+3f^2(x)+3x^2>0$$
- $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$

Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$ που είναι άτοπο αφού $g'(x)>0$.

Άρα η $x=-1$ η μοναδική ρίζα της $f^{-1}(x)=f(x)$ και επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1,\ f(-1))$ ή $A(-1,\ -1)$.

Γ3. α.

- Για $x=y$ ισχύει η ισότητα:

$$|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|=|f(x)-f(y)|=|x-y|$$

- Για $x<y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[x,y]$ και έχουμε:

  Η f είναι συνεχής στο $[x,y]$ (ως πολυωνυμική)

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x,y) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_1\in(x,y)$: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq 1$ ($f'(\xi_1)=3\xi_1^2+1\geq 1$), δηλαδή:

$$f(y)-f(x)\geq y-x \quad \text{ή} \quad |f(x)-f(y)|\geq|x-y| \text{ διότι:}$$

$$|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=f(y)-f(x)\geq y-x=|y-x|=|x-y| \quad (1)$$

- Για $x>y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[y,x]$ και έχουμε:

  Η f είναι συνεχής στο $[y,x]$ (ως πολυωνυμική)

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (y,x) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_2\in(y,x)$: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\geq 1$ ($f'(\xi_2)=3\xi_2^2+1\geq 1$), δηλαδή:

$$f(x)-f(y)\geq x-y \quad \text{ή} \quad |f(x)-f(y)|\geq|x-y| \text{ διότι:}$$

$$|f(x)-f(y)|=f(x)-f(y)\geq x-y=|x-y| \quad (2)$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$|x-y|\leq|f(x)-f(y)| \text{ (I) για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Στην σχέση (Ι) θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και y το $f^{-1}(y)$, αφού η (Ι) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y) \in \mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right| \le |x-y| \text{ και τελικά:}$$

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right| \le |x-y| \le \left|f(x)-f(y)\right|$$

β. Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0) \ .$$

Έχουμε:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right| \le |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| \le f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0) \le |x-x_0|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0| = \lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|\right) = 0$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε και

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right) = 0$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$

Γ4. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^{-1}(\xi)+2\xi = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) = -2\xi \Leftrightarrow \xi = f(-2\xi) \Leftrightarrow f(-2\xi)-\xi = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(-2x)-x,\ x\in\mathbb{R}$$

Ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\ 1]$).
- $g(0) = f(0)-0 = 1 > 0$
- $g(1) = f(-2)-1 = -9-1 = -10 < 0$

Από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα $f^{-1}(\xi)+2\xi = 0$.

Επιπλέον η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (0, 1)) με:

$$g'(x) = -2f'(-2x) - 1 = -2(12x^2 + 1) - 1 = -24x^2 - 3 < 0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1», και επομένως το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος</u>

Ισχύει $f(0) = 1$ και $f(-1) = -1$ και η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$. Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει (και είναι μοναδικό) $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = x_1 \in (-1, 0)$$

Ακόμα $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$

Θα εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano για την συνάρτηση:

$$h(x) = f^{-1}(x) + 2x$$

στο διάστημα $[0,\ 1]$.

Έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (άθροισμα συνεχών στο $[0,\ 1]$) και

$$h(0) = f^{-1}(0) = x_1 < 0 \ , \ h(1) = f^{-1}(1) + 2 = 2 > 0$$

Επομένως υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$$

Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα διότι:

Αν $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$.Θα αποδείξουμε ότι

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \ .$$

Έστω $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$ με $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Άρα

$$x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2) \quad (*)$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει η (*) έχουμε διαδοχικά:

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα:

Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$$

και με πρόσθεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε:

$$f^{-1}(x_1) + 2x_1 < f^{-1}(x_2) + 2x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Το ξ είναι μοναδικό, αφού η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1» .

Γ5. Έχουμε διαδοχικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$F^2(x) \geq F(x)F(2-x) \Leftrightarrow F^2(x) - F(x)F(2-x) \geq 0 \ (1)$$

Θέτουμε:

$$g(x) = F^2(x) - F(x)F(2-x),\ x \in \mathbb{R}$$

και από την (1) προκύπτει:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1),\ x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημεό του $\mathbb{R}$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων και σύνθεσης παραγωγίσιμψων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = 2F(x)F'(x) - F'(x)F(2-x) + F(x)F'(2-x),\ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως από το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 2F(1)F'(1) - F'(1)F(1) + F(1)F'(1) = 0 \ \text{ ή}$$

$$2F(1)F'(1) = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \ (F'(1) = f'(1) = 3 \neq 0)$$

Άρα είναι:

$$F'(x) = f'(x) \Leftrightarrow F(x) = f(x) + c \ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 1 \Rightarrow F(1) = f(1) + c \Rightarrow 0 = 3 + c \Rightarrow c = -3$

Επομένως:

$$F(x) = f(x) - 3 = x^3 + x - 2,\ x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f'(x)+f(x)+4e^{x-1}=\ln x+\frac{1}{x}+x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x}f'(x)+e^{x}f(x)+4e^{2x-1}=e^{x}\ln x+e^{x}\frac{1}{x}+e^{x}x+e^{x}\Leftrightarrow$$

<=> $\left(e^{x}f(x)+2e^{2x-1}\right)'=\left(e^{x}\ln x\right)'+\left(xe^{x}\right)'\Leftrightarrow\Leftrightarrow e^{x}f(x)+2e^{2x-1}=e^{x}\ln x+xe^{x}+c$

για $x=1$ έχουμε:

$$ef(1)+2e=e\ln 1+e+c\Leftrightarrow -e+2e=0+e+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα:

$$e^{x}f(x)+2e^{2x-1}=e^{x}\ln x+xe^{x}\Leftrightarrow f(x)=\ln x+x-2e^{x-1}$$

Δ2. Η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln x+x-2e^{x-1}$$

είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1-2e^{x-1}\quad\text{και}\quad f''(x)=-\frac{1}{x^{2}}-2e^{x-1}<0,x>0$$

επομένως η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα ·

Παρατηρούμε ότι:

$$f'(1)=\frac{1}{1}+1-2e^{1-1}=0$$

Έχουμε:

$$\bullet x>1\overset{f'\downarrow}{\Longrightarrow}f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$$

$$\bullet x<1\Rightarrow f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	
$f(x)$	γν.αύξουσα	γν.φθίνουσα	

Μονοτονία

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Ακρότατα: η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1)=-1

Εναλλακτικά

2ος τρόπος (για τον υπολογισμό του ακροτάτου).

Για κάθε $x>0$ εχουμε:

$$\ln x \le x-1 \quad (\text{I}) \quad \text{και} \quad e^{x-1} \ge x \Leftrightarrow -2e^{x-1} \le -2x \quad (\text{II})$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε:

$$\ln x - 2e^{x-1} \le -x-1 \Leftrightarrow \ln x - 2e^{x-1} + x \le -x - x + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \le -1 \Leftrightarrow f(x) \le f(1)$$

για κάθε $x>0$.

Επομένως η f παρουσιάζει στο 1 ολικό μέγιστο, το $f(1)=-1$

Δ3 . Είναι:

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f'(x) = \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt \Leftrightarrow \quad f'(x) = \left[f(\ln t) \right]_e^{e^2} = f(2) - f(1)$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

- Είναι παραγωγίσιμη στο (1 ,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού , υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο , ώστε:

$$f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο διάστημα (1, 2) αφού η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1».

Εναλλακτικά:

<u>**2^{ος} τρόπος**:</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\Lambda(x) = f'(x) + f(1) - f(2)$$

για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

$$\Lambda(1) = f'(1) + f(1) - f(2) = 0 + f(1) - f(2) > 0$$

διότι $1 < 2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(2) \Rightarrow f(1) - f(2) > 0$

$$\Lambda(2) = f'(2) + f(1) - f(2) =$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - 2e - 1 - \ln 2 - 2 + 2e = -\frac{3}{2} - \ln 2 < 0$$

Από το Θ.Bolzano υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο, ώστε:

$$\Lambda(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) + f(1) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_o είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

Εναλλακτικά:

3^ος^ τρόπος:

Έστω η συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - x\cdot(f(2) - f(1))$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- $k(1) = 2f(1) - f(2)$, $k(2) = 2f(1) - f(2)$

από το Θ.Rolle έχουμε :

υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο, ώστε:

$$k'(x_o) = 0 \Leftrightarrow \quad f'(x_o) + f(1) - f(2) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_o είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1».

Δ4.

Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x) \le f(1) \Rightarrow \quad f(x) \le -1 < 0$$

Επομένως :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\,\frac{1}{x} > 0\gamma\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon x > 0\right)$$

$$|h(x)| = \left|\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \frac{1}{x^2}\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right| = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{1}{e},1\right]$$

το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$\mathrm{E}=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left|h(x)\right|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left|\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\int_{e}^{1}f(u)du=$$

$$\int_{e}^{1}\left(\ln u+u-2e^{u-1}\right)du=\int_{e}^{1}\left(u\ln u-u+\frac{u^2}{2}-2e^{u-1}\right)'du=\frac{4e^{e-1}-e^2-5}{2}$$

Δ5. Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x)\le f(1)\Rightarrow f(x)\le -1<0$$

α) Η απόσταση των $(\mathrm{A}_\lambda,\mathrm{B}_\lambda)$ είναι:

$$(\mathrm{A}_\lambda\mathrm{B}_\lambda)=\left|f(\lambda)-g(\lambda)\right|=\left|2f(\lambda)\right|=2\left|f(\lambda)\right|=-2f(\lambda)$$

και γράφεται ως συνάρτηση του λ , $d(\lambda)=-2f(\lambda)$

$d'(\lambda)=-2f'(\lambda)$, $d'(\lambda)\ge 0\Leftrightarrow f'(\lambda)\le 0\Leftrightarrow \lambda\ge 1$

λ	0	1	+∞
$d'(\lambda)$	-	+	
$d(\lambda)$	γν.φθίνουσα	γν.αύξουσα	

άρα η ελάχιστη τιμή είναι $d(1)=(\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1)=-2f(1)=2$

β)

$$\mathrm{E}(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda\cdot\left(-2f(\lambda)\right)=-\lambda\cdot f(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1}=\lim_{\lambda\to+\infty}-\frac{\lambda\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1}=-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)}{\lambda^2+1}=$$

$$-\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)\cdot\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)=-1\cdot\left(0+1-\infty\right)=+\infty$$

γιατί :

$$\bullet\ \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{\lambda}\overset{D.L.H}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0$$

$$\bullet \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{e^{\lambda-1}}{\lambda} \overset{D.L.H}{=} \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\left(e^{\lambda-1}\right)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{\lambda-1} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2} = \lim_{\lambda \to +\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1} = \lim_{\lambda \to 0^+} - \frac{\lambda\left(\ln\lambda + \lambda - 2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1} = -\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\left(\ln\lambda + \lambda - 2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \overset{D.L.H}{=}$$

$$-\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda} + 1 - 2e^{\lambda-1}}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} = -\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\lambda + \lambda^2 - 2\lambda^2 e^{\lambda-1}}{\lambda^2 - 1} = \frac{0+0-0}{0^2-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

2016

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕ.Λ.

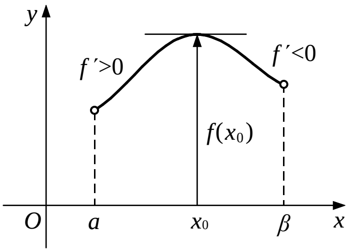
ΘΕΜΑ 1ο

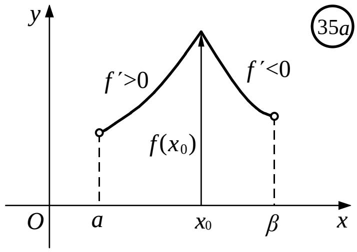
Α1. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in [x_0, \beta) \quad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in (\alpha, \beta) \text{ ,}$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2 Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3.

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

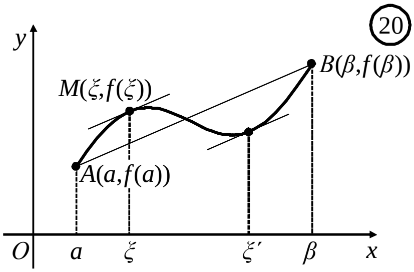
- ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α4.

α. Λάθος (διότι είναι $\int_{a}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$)

β) Σωστό (πρόταση στη σελίδα 166 του σχολικού βιβλίου).

γ) Λάθος (Η αντίστοιχη πρόταση δεν ισχύει γενικά σε ένωση διαστημάτων)

δ) Σωστό (γνωστή πρόταση –σχόλιο στο σχολικό βιβλίο).

ε) Σωστό (θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, σελίδα 195 σχολικό βιβλίο).

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=0$$

$$\left(x^2+1\right)^2>0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f θα είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$.
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0 , το $f(0)=0$.

Ο πίνακας μεταβολών (μονοτονίας-ακροτάτων) της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'\left(x\right)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Ολ. ελάχιστο

Β2. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(x^2+1\right)^3>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$.
- Κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

Ο πίνακας μεταβολών (Κυρτότητας και Σημείων Καμπής) της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Β3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε **δεν** έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη

($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$).

<u>**Πλάγιες-οριζόντιες:**</u> $y=\lambda x+\beta$ $(\lambda,\beta\in\mathbb{R})$ με:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ την $y=1$.

Ακόμα:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο** $-\infty$ την $y=1$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

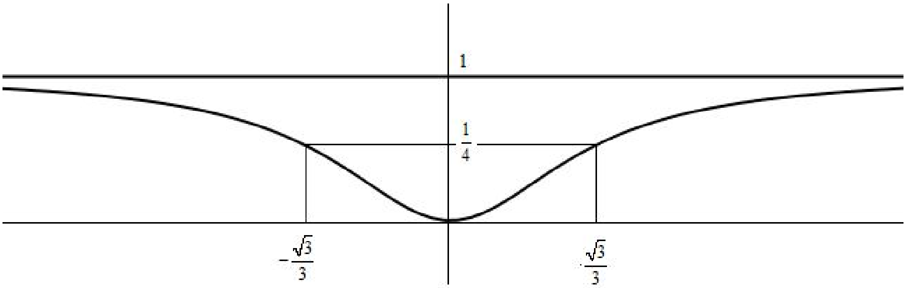
1.Μπορούμε να παρατηρήσουμε (και να αποδείξουμε) ότι η συνάρτηση f είναι άρτια ($f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$) και άρα θα έχει την ίδια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$**,** αποφεύγοντας έτσι να ξαναβρούμε τα παραπάνω όρια στο $-\infty$.

2. Μπορούμε, επίσης, να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ **και να δικαολογήσουμε** ότι μια συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ αντίστοιχα (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

Β4. Συνοπτικά ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	+	-
f'	-	-	+	+
$f(x)$	$\downarrow\ \cap$	$\downarrow\ \cup$	$\uparrow\ \cup$	$\uparrow\ \cap$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (αφού λάβουμε και υπόψη μας ότι είναι άρτια και θετική) είναι η επόμενη:



Σημείωση: Για την σωστή παρουσίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε, ότι αυτή είναι άρτια και θετική ($f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x = 0$, δηλαδή να διέρχεται από το O(0,0)).

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει προφανή ρίζα το $x_0 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \quad .$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ και άρα:

$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο $x=0$, αφού στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1»).

2

2ος Τρόπος

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 2/ii στη σελίδα 266) γνωρίζουμε ότι:

$$\ln x\leq x-1 \text{ , για κάθε } x>0 \text{ (η ισότητα ισχύει για } x=1\text{)}$$

Θέτοντας όπου x το $e^{x^2}>0$ (για κάθε $x\in\mathbb{R}$) έχουμε:

$$\ln e^{x^2}\leq e^{x^2}-1\Leftrightarrow x^2\leq e^{x^2}-1\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$\text{(η ισότητα ισχύει για } e^{x^2}=1\Leftrightarrow e^{x^2}=e^0\Leftrightarrow x=0\text{).}$$

3ος Τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της και να πάρουμε $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έπειτα να πάρουμε $g(x^2)\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1,x\in\mathbb{R}$$

(Επειδή, από το προηγούμενο ερώτημα: $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει ρίζες σε αυτά, διότι αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα $\rho\in(-\infty,0)$ ή $\rho\in(0,+\infty)$, τότε θα είναι από το θεώρημα του Fermat (που πληρούνται οι προϋποθέσεις του) ότι $f(\rho)=0$. Οπότε έχουμε:

$$|f(\rho)|=0\Leftrightarrow e^{\rho^2}-\rho^2-1=0\Leftrightarrow \rho=0$$

άτοπο.

Άρα η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

$$x > 0,\ f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$
$$x > 0,\ f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$$
$$x < 0,\ f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$$
$$x < 0,\ f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Επειδή οι ζητούμενες συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (και συνεχείς στο $x_0 = 0$ με $f(0) = 0$) θα έχουμε:

- $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$ ή
- $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$ ή
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x < 0 \end{cases}$ ή
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x \geq 0 \end{cases}$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι οι **μοναδικές** οι οποίες **επαληθεύουν** την δοσμένη σχέση και είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x) = 4x^2 e^{x^2} + 2\left(e^{x^2} - 1\right) > 0 \ ,$$

για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$, αφού $x^2 e^{x^2} \geq 0$ και $e^{x^2} - 1 > 0$

Επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων) η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty, 0\right]$ και $\left[0, +\infty\right)$, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$ (την επαληθεύει).

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x+3) - f(x),\ x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

αφού $x+3 > x \Rightarrow f'(x+3) > f'(x)$ (η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, διότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$).

Για $x > 0$ έχουμε διαδοχικά:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) < g\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(|\eta\mu x|+3\right) - f\left(|\eta\mu x|\right) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως **μοναδική λύση** της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x = 0$

<u>2^ος Τρόπος</u>

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$ (την επαληθεύει).

Εξετάζουμε τις επόμενες περιπτώσεις ($x > 0$):

1η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x| + 3 > x$, τότε προκύπτει η διάταξη:

$$|\eta\mu x| < x < |\eta\mu x| + 3 < x + 3$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[x,\ |\eta\mu x|\right]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_1 \in \left(|\eta\mu x|, x\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_1\right) = \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(I)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|+3,\ x+3\right]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_2 \in \left(|\eta\mu x|+3, x+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_2\right)=\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{(x+3)-\left(|\eta\mu x|+3\right)}=\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{x-|\eta\mu x|} \quad \text{(II)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (I) και (II) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_1<\xi_2 \Rightarrow f'\left(\xi_1\right)<f'\left(\xi_2\right) \Rightarrow \frac{f(x)-f(|\eta\mu x|)}{x-|\eta\mu x|}<\frac{f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3)}{x-|\eta\mu x|}$$

Επειδή $|\eta\mu x|<x \Leftrightarrow x-|\eta\mu x|>0$ έχουμε:

$$f(x)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(|\eta\mu x|+3) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

2η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x|+3<x$, τότε προκύπτει η διάταξη:

$$|\eta\mu x|<|\eta\mu x|+3<x<x+3.$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_3 \in \left(|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x|+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_3\right)=\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{\left(|\eta\mu x|+3\right)-|\eta\mu x|}=\frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3} \quad \text{(III)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x,\ \mathrm{x}+3\right]$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[x,\ x+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[x,\ x+3\right]$). Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi_4 \in \left(x,\ x+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_4\right) = \frac{f(x+3)-f(x)}{(x+3)-x} = \frac{f(x+3)-f(x)}{3} \quad \text{(IV)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (ΙΙΙ) και (IV) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_3 < \xi_4 \Rightarrow f'\left(\xi_3\right) < f'\left(\xi_4\right) \Rightarrow \frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3} < \frac{f(x+3)-f(x)}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|) < f(x+3)-f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

Σημείωση: Ακόμα και αν $|\eta\mu x|+3 = x$, τα παραπάνω θεωρήματα και τα συμπεράσματα εφαρμόζονται χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Εναλλακτικά:

Υποθέτουμε, αντίθετα, ότι υπάρχει $x_0 > 0$ που να είναι λύση της εξίσωσης. Ισχύει $|\eta\mu x_0| < x_0$ (από τη γνωστή ανισότητα $|\eta\mu x| \le x$ με την ισότητα μόνο για $x=0$) καθώς επίσης $|\eta\mu x_0| < |\eta\mu x_0|+3$ και $x_0 < x_0+3$.

Αν διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|\eta\mu x_0|+3 \le x_0$, τότε:

$$|\eta\mu x_0| < |\eta\mu x_0|+3 < x_0 < x_0+3$$

- Αν $x_0 \le |\eta\mu x_0|+3$, τότε:

$$|\eta\mu x_0| < x_0 \le |\eta\mu x_0|+3 < x_0+3 \ .$$

και εραρμόσουμε ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[|\eta\mu x_0|, |\eta\mu x_0|+3\right]$ και $\left[x_0, x_0+3\right]$ και άρα υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(|\eta\mu x_0|, |\eta\mu x_0|+3\right)$ και

$\xi_2 \in (x_0, x_0+3)$ και καταλήγουμε σε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και «1-1» τσι παίρνουμε $\xi_1 = \xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα. Επομένως σε κάθε περίπτωση η δοθείσα εξίσωση έχει **μοναδική** λύση την $x = 0$.

3^{ος} Τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(t) = f(t+3) - f(t),\ t \geq 0$$

Επομένως αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$h(|\eta\mu x|) = h(x),\ x \geq 0$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:

$$h'(t) = f'(t+3) - f'(t),\ t \geq 0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα (αφού η f είναι κυρτή) έχουμε διαδοχικά:

$$t+3 > t \Rightarrow f'(t+3) > f'(t) \Rightarrow f'(t+3) - f'(t) > 0 \Rightarrow h'(t) > 0,\ t \geq 0$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και άρα είναι «1-1» στο $[0, +\infty)$. Άρα η δοθείσα εξίσωση για $x \geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$h(|\eta\mu x|) = h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0\ ,$$

Αφού στην ανισοισότητα $|\eta\mu x| \leq |x|$ το = ισχύει **μόνο** για $x = 0$ (πρόταση σελίδας 171, σχολικό βιβλίο).

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \ \ (1)$$

Τώρα θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\eta\mu x\right)=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\eta\mu x=1\cdot 0=0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0) θα είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f\left(\pi\right)=\pi$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Δ2. α) Έστω οτι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα έχουμε ότι $f'(x_0)=0$.

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (αφού τα μέλη της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) έχουμε:

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+e^{x},\, x\in\mathbb{R}$$

Για $x=x_0$ από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε:

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Leftrightarrow e^{x_0}=e^{0}\Leftrightarrow x_0=0\ ,$$

Δηλαδή $f'\left(x_0\right)=f'\left(0\right)=0$, άτοπο αφού $f'\left(0\right)=1$.

Επομένως η συνάρτηση f **δεν** παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

β) Από το ερώτημα Δ2 (α) έχουμε ότι $f'\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (δηλαδή η συνάρτηση f' δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι επίσης συνεχής (αφού f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$). Επομένως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $f'\left(0\right)=1>0$ (Δ1 ερώτημα) θα είναι $f'\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ [1].

Έχουμε: $\begin{matrix} -1\leq \eta\mu x\leq 1 \\ -1\leq \sigma\upsilon\nu x\leq 1 \end{matrix}$.

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με

$f(x)>0$ (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα $f(x)>0$ «κοντά» στο $+\infty$) έχουμε:

---

[1] Στην πραγματικότητα ο ισχυρισμός αυτός είναι το αντίστροφο γνωστής πρότασης του σχολικού βιβλίου. Για την πλήρη δικαιολόγηση μπορούμε να πούμε: Αν ήταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ θα είχαμε:

$$f\left(\mathbb{R}\right)=f\left(\left(-\infty,+\infty\right)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ l\right)$$

άτοπο αφού $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$. Επίσης αν ήταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ θα είχαμε $f(x)<0$ για κάποια $x>0$ που είναι άτοπο (αφού η $f\uparrow$ και άρα

$x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$).

$$-2 \le \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \le 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)} \le \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \le \frac{2}{f(x)}$$

Τώρα έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{f(x)} = 0$ και, από το κριτήριο της παρεμβολής, παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4. Για ευκολία θέτουμε $\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \dfrac{f(\ln x)}{x} dx$. Θα δείξουμε ότι $0 < \mathrm{I} < \pi^2$

Θέτουμε (αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα):

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow du = \frac{1}{e^u} dx \Rightarrow e^u du = dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow x = e^u$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = 0$$

$$x = e^\pi \Leftrightarrow u = \pi$$

Οπότε :

$$\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi \frac{f(u)}{e^u} e^u du = \int_0^\pi f(u) du$$

Έχουμε, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$:

$$0 \le x \le \pi \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le f(x) \le \pi$$

Η ισότητες στην προηγούμενη σχέση δεν ισχύουν παντού και άρα έχουμε:

$$\int_0^\pi 0 dx < \int_0^\pi f(x) dx < \int_0^\pi \pi dx \Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < I < \pi^2$$

<u>2ος Τρόπος</u>

Επειδή η συνάρτηση $\ln x$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσες (από το ερώτημα Δ2(β)) έχουμε διαδοχικά:

$$1 \le x \le e^\pi \Rightarrow \ln 1 \le \ln x \le \ln e^\pi \Rightarrow 0 \le \ln x \le 2 \Rightarrow f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$$

Διαιρώντας με $x \in \left[1,\ e^\pi\right]$ (δηλαδή $x > 0$) έχουμε:

$$\frac{f(0)}{x} \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{f(\pi)}{x} \Leftrightarrow 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Δηλαδή έχουμε τις ανισώσεις:

- $\frac{f(\ln x)}{x} \ge 0$, $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = e^{\pi}$ δίνει $\frac{f(\ln e^{\pi})}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \neq 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$$

- $\frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x} \le 0$, $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = 1$ δίνει $\frac{f(\ln 1)}{1} - \frac{\pi}{1} = f(0) - \pi = -\pi \neq 0$). Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx - \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x} dx < 0 \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi \left[\ln x\right]_1^{e^{\pi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi \left(\ln e^{\pi} - \ln 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi \left(\pi - 0\right) \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

Άρα:

$$0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

3ος Τρόπος

Έστω F μία αρχική της f στο $\left[0, +\infty\right)$ (αυτό εξασφαλίζεται αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0, +\infty\right)$). Άρα ισχύει ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$, $x \ge 0$. Έτσι ισχύει ότι:

$$\frac{f(\ln x)}{x} = \left[F\left(\ln x\right)\right]' \ , \ x \geq 0$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{I} = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_1^{e^\pi}\left[F\left(\ln x\right)\right]'dx = \left[F\left(\ln x\right)\right]_1^{e^\pi} = \qquad (*)$$
$$= F\left(\ln e^\pi\right) - F\left(\ln 1\right) = F(\pi) - F(0)$$

Εφαρμοζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την F στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$, αφού F παραγωγίσιμη στο $\left[0,\pi\right]$ (άρα και συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$), οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in \left(0,\ \pi\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'\left(\xi\right) = \frac{F(\pi)-F(0)}{\pi} \Rightarrow f(\xi) = \frac{F(\pi)-F(0)}{\pi} \Rightarrow F(\pi)-F(0) = \pi f(\xi) \quad (**)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (*) και (**) έχουμε:

$$0 < \xi < \pi \Rightarrow f(0) < f(\xi) < f(\pi) \Rightarrow 0 < f(\xi) < \pi \Rightarrow 0 < \pi f(\xi) < \pi^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 < F(\pi) - F(0) < \pi^2 \Rightarrow 0 < \mathrm{I} < \pi^2$$

<u>4^ος Τρόπος</u>

Για το $I = \int_1^{e^\pi} \frac{f\left(\ln x\right)}{x}dx$, θέτουμε (αλλαγή μεταβλητής):

$$u = \ln x$$
$$du = \frac{1}{x}dx$$
$$x = 1 \Leftrightarrow u = \ln 1 \Leftrightarrow u = 0$$
$$x = e^\pi \Leftrightarrow u = \ln e^\pi \Leftrightarrow u = \pi$$

και έχουμε ότι $I = \int_0^\pi f(u)du$

Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$0 \leq u \leq \pi \Rightarrow f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Rightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi$$

Επομένως έχουμε:

$f(u) \geq 0$ και η f δεν είναι παντού 0, άρα $\int_0^\pi f(u)du > 0 \Leftrightarrow I > 0$ (1).

Ακόμα $f(u) \le \pi \Leftrightarrow f(u) - \pi \le 0$ και η συνάρτηση $f(u) - \pi$ δεν είναι παντού 0, άρα:

$$\int_0^{\pi} \left(f(u) - \pi \right) du < 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(u)du - \int_0^{\pi} \pi du < 0 \Leftrightarrow I < \pi \left[x \right]_0^{\pi} \Leftrightarrow \mathrm{I} < \pi^2 \ (2)$$

Επομένως $0 < \mathrm{I} < \pi^2$.

<u>*$5^{ος}$ Τρόπος*</u>

Εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση στο $I = \int_1^{e^{\pi}} \frac{f\left(\ln x\right)}{x} dx$ και έχουμε:

$$I = \int_1^{e^{\pi}} \frac{f\left(\ln x\right)}{x} dx = \int_1^{e^{\pi}} f\left(\ln x\right) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^{e^{\pi}} f\left(\ln x\right)\left(\ln x\right)' dx =$$

$$= \left[f\left(\ln x\right)\left(\ln x\right) \right]_1^{e^{\pi}} - \int_1^{e^{\pi}} \left(\ln x\right) \cdot \left[f\left(\ln x\right) \right]' dx =$$

$$= f\left(\ln e^{\pi}\right)\left(\ln e^{\pi}\right) - 0 - \int_1^{e^{\pi}} \left(\ln x\right) \cdot f'\left(\ln x\right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= f(\pi) \cdot \pi - \int_1^{e^{\pi}} K(x)dx = \pi^2 - \int_1^{e^{\pi}} K(x)dx \ (1)$$

, όπου $K(x) = \left(\ln x\right) \cdot f'\left(\ln x\right) \cdot \frac{1}{x} \ge 0,\ x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ διότι:

$$x \ge 11 \Rightarrow \ln x \ge \ln 1 \Rightarrow \ln x \ge 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$$

$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και $f'\left(\ln x\right) > 0$.
Αφού η συνάρτηση $K(x)$ δεν είναι παντού 0, έχουμε (χρησιμοποιούμε και τη σχέση (1)):

$$\int_1^{e^{\pi}} K(x)dx > 0 \Leftrightarrow -\int_1^{e^{\pi}} K(x)dx < 0 \Leftrightarrow \pi^2 - \int_1^{e^{\pi}} K(x)dx < \pi^2 \Leftrightarrow I < \pi^2$$

Επομένως $0 < I < \pi^2$.

<u>***Σχόλιο:***</u> Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ από τα δεδομένα). Επίσης η

συνάρτηση $\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ +\infty\right)$ οπότε και η συνάρτηση $f'(\ln x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,\ e^{\pi}\right]$ που μας ενδιαφέρει.

Επομένως, η συνάρτηση:

$$K(x)=\left(\ln x\right)\cdot f'\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}\geq 0,\ x\in\left[1,\ e^{\pi}\right]$$

είναι συνεχής και άρα το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{e^{\pi}}K(x)dx$ έχει νόημα.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕ.Λ.

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία, στη σελίδα 260 του σχολικού βιβλίου (Θ. Fermat).

Α2. Θεωρία, στη σελίδα 169 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία-Ορισμός, στη σελίδα 280 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Λάθος.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f είναι $D_f = (1,5) \cup (5,\ 9]$.

Το σύνολο τιμών Α είναι $A = f\left(D_f\right) = (-2,5]$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^+} f(x) = 3$

Β3.

α) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$,διότι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$

β) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(5,7)$

γ) θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f(x)=u_0 \Rightarrow \lim_{x\to 8^+} f(x)=\lim_{x\to 8^-} f(x)=5=u_0 \ .$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right)=\lim_{u\to u_0} f(u)=\lim_{u\to 5} f(u)=3$$

Β4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1=3$ και $x_2=7$ αφού:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4\neq\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

Β5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x)=0$ είναι $x_3=4$, $x_4=6$, $x_5=8$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα x΄x οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε:

$$f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0 \ .$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^3=x_2^3\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη .

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y}, & αν\ y \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-y}, & αν\ y < 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & αν\ x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & αν\ x < 0 \end{cases}$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $x \in (0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = ημx - x + \frac{1}{6}x^3,\ x \geq 0 \quad ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με

$$g'(x) = συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2,\ x \geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με

$g''(x) = -ημx + x > 0$ για κάθε $x > 0$

(αφού $ημx < x \Leftrightarrow -ημx + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $ημx = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$).

¨Άρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0\ ,$$

δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Είναι:

$$x>0 \Rightarrow g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0 .$$

Επομένως για κάθε $x>0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x-\frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f\left(\eta\mu x\right)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M\left(x(t_0),\ y(t_0)\right)$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t=t_0$ έχουμε $x'(t_0)=y'(t_0)$.

Για κάθε $t\geq 0$ έχουμε $y(t)=x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t\geq 0$ έχουμε:

$$y'(t)=\left[x^3(t)\right]' \Leftrightarrow y'(t)=3x^2(t)\cdot x'(t)$$

Για $t=t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0)=3x^2(t_0)\cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0)=3x^2(t_0)\cdot x'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2(t_0)=1 \Leftrightarrow x^2(t_0)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0)=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Επομένως το ζητούμενο σημε'ιο της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0)=y'(t_0)$ είναι $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Για το ολοκήρωμα:

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx$$

(αφού η g είναι άρτια $g(x)=g(-x)$ για κάθε $x\in\left[-1,1\right]$) θέτουμε:

$$-x = u \Leftrightarrow x = -u$$
$$dx = -du$$
$$x = -1 \Leftrightarrow u = 1$$
$$x = 1 \Leftrightarrow u = -1$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 g(-x)dx = -\int_{1}^{-1} (-u)^3 g(u)du =$$
$$= \int_{-1}^{1} (-u)^3 g(u)du = -\int_{-1}^{1} u^3 g(u)du = -I$$

Επομένως $I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.

- Για κάθε $x \in (0,1)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).
- Για κάθε $x > 1$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln x}{x} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} = (D'L) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$f(1) = 1$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, επομένως είναι συνεχής και στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ και άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες για $x_0 > 0$. Θα εξετάσουμε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωστη στο $x_0 = 0$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} + 1 = -\infty$$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Δ2.

- Για $x \in (0,1)$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$)με :

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e \notin (0,1)$$

Άρα $f'(x) \neq 0,\ x \in (0,1)$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$

- Για $x > 1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,+\infty)$ με :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2},\ x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = x - 1 - x\ln x,\ x > 0\ ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ((ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο$(0,+\infty)$) με :

$$h'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x,\ x > 0$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Έχουμε:

- $x > 1 \Rightarrow h'(x) < 0$, άρα η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1, +\infty\right)$

  (αφού είναι και συνεχής στο $\left[1, +\infty\right)$) και άρα:

  $x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0$ για κάθε $x > 1$

Επομένως $h(x) < 0,\ x \in \left(0, +\infty\right)$ άρα $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x\left(x-1\right)^2} < 0,\ x > 1$.

Το μοναδικό πιθανό κρίσιμο σημείο ειναι το $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln x}{x\left(x-1\right)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{2x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x\left(2x-1\right)} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{\left(x-1\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1-x}{2x\left(x-1\right)} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $x_0 = 1$.

Δ3. i) Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, 1\right]$ (αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

- $f\left(\left(0, 1\right]\right) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f(x),\ f(1)\right] = \left(-\infty, 1\right]$ επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ και

  $f(1) = 1$.

Αφού $0 \in \left(-\infty, 1\right]$ η f θα έχει μία ρίζα η οποία θα είναι μοναδική αφού η f είναι «1-1» ως γνησίως αύξουσα στο $\left(0, 1\right]$

Αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1, +\infty\right)$ (αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

- $f\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\, f(1)\right]=\left(0,1\right]$ επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Όμως $0\notin\left(0,1\right]$ και άρα η f δεν έχει ρίζα στο $\left[1,+\infty\right)$.

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα $x_0\in\left(0,1\right]$

ii) Το Εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$E\left(\Omega\right)=\int_{x_0}^{1}\left|f(x)\right|dx,\, x_0\in\left(0,1\right].$$

Επειδή η είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,1\right]$ έχουμε:

$$x\geq x_0 \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)\Rightarrow f(x)\geq 0$$

Άρα :

$$E\left(\Omega\right)=\int_{x_0}^{1} f(x)dx=\int_{x_0}^{1}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)dx=\int_{x_0}^{1}\frac{\ln x}{x}dx+\int_{x_0}^{1}1dx=\int_{x_0}^{1}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+\left[x\right]_{x_0}^{1}=I+1-x_0$$

$$\mathrm{I}=\int_{x_0}^{1}\ln x\cdot\left(\ln x\right)'dx=\left[\ln^2 x\right]_{x_0}^{1}-\int_{x_0}^{1}\ln x\cdot\left(\ln x\right)'dx=-\ln x_0-I$$

$$2I=-\ln x_0\Rightarrow I=\frac{-\ln x_0}{2}$$

$$E\left(\Omega\right)=\frac{-\ln x_0}{2}+1-x_0 \quad (1)$$

Επειδή το x_0 είναι ρίζα της f έχουμε:

$$f(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x_0}{x_0}+1=0\Leftrightarrow\frac{\ln x_0+x_0}{x_0}=0\Leftrightarrow\ln x_0+x_0=0\Leftrightarrow\ln x_0=-x_0 \; .$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$E\left(\Omega\right)=-\frac{x_0^{\,2}}{2}+1-x_0=\frac{-x_0^{\,2}-2x_0+2}{2} \quad \text{τ.μ.}$$

Δ4. Για κάθε $x>1$ έχουμε $f'(x)<0\Rightarrow F''(x)<0$. Η F' είναι συνεχής στο $\left[1,+\infty\right)$, αφού είναι συνεχής στο $x=1$ λόγω της αντίστοιχης συνέχειας της f . Άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$.

Ισχύει: $1 < x < x^2$ στο $[1,+\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την F στα διαδοχικά διαστήματα $[1,x],\left[x,x^2\right]$ στα οποία ικανοποιούνται οι προυποθέσεις (Η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε και στα $[1,x],\left[x,x^2\right]$).

Επομένως υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (1,x)$ και $\xi_2 \in \left(x,x^2\right)$ με:

$$F'\left(\xi_1\right) = \frac{F\left(x\right) - F(1)}{x-1}$$

$$F'\left(\xi_2\right) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$$

Έχουμε διαδοχικά :

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow F'\left(\xi_1\right) > F'\left(\xi_2\right) \Rightarrow \frac{F\left(x\right) - F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F\left(x\right) - F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)} \Rightarrow F\left(x\right) - F(1) > \frac{F(x^2) - F(x)}{x}$$

$$\Rightarrow xF(x) - xF(1) > F(x^2) - F(x) \Rightarrow xF(x) + F(x) > xF(1) + F(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+1\right)F(x) > xF(1) + F(x^2)$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕ.Λ.

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω x_1 $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3.

<u>Διατύπωση:</u>

Αν μια συνάρτηση f είναι:

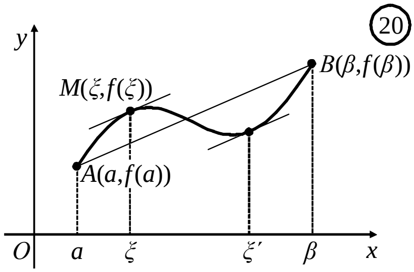
- ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία:</u>

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α4.

α) Λάθος **(** Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$)

β) Σωστό (πρόταση στη σελίδα 166 του σχολικού βιβλίου).

γ) Λάθος. (Η αντίστοιχη πρόταση δεν ισχύει γενικά σε ένωση διαστημάτων)

δ) Σωστό (γνωστή πρόταση –σχόλιο στο σχολικό βιβλίο).

ε) Σωστό **(**θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2 + a\right) = 1 + a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ οπότε $1 + a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Β2. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής για $a=1$ θα εξετάσουμε μόνο για την τιμή αυτή την παραγωγισιμότητα της f.

Για να είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ πρέπει τα όρια $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ να είναι ίσα και πεπερασμένα.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\left(x-1\right)}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\left(x+1\right)=2$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ με $f'(1)=2$.

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάτησης f στο σημείο $A\left(1,\ f(1)\right)$ δηλαδή στο $A\left(1,\ 2\right)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)\left(x-1\right)\Rightarrow y-2=2\left(x-1\right)\Rightarrow y=2x$$

Δηλαδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}<0 \Leftrightarrow x<0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f θα είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0 , το $f(0)=0$.

Ο πίνακας μεταβολών (μονοτονίας-ακροτάτων) της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↓	↑

Ολ. ελάχιστο

Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}>0 \Leftrightarrow 1-3x^2>0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}<0 \Leftrightarrow 1-3x^2<0 \Leftrightarrow \left(x>\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x<-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ο πίνακας προσήμου της $f''\left(x\right)$ είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''\left(x\right)$	-	+	-

Γ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε **δεν** έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη

($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$).

<u>Πλάγιες-οριζόντιες:</u> $y=\lambda x+\beta$ $(\lambda,\beta\in\mathbb{R})$ με:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ την $y=1$.

Ακόμα:

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

Επομένως η C_f **έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο** $-\infty$ την $y=1$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Μπορούμε επίσης να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ **και να δικαολογήσουμε** ότι μια συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια στο $-\infty$ και στο $+\infty$ αντίστοιχα (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)\cdot f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x) = 2x \Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]' = (x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + c$$

Για $x = 0 \Rightarrow f^2(0) = c \Rightarrow c = 1$. Άρα $f^2(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$. (1)

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αφού αν είχε μία ρίζα $\rho \in \mathbb{R}$ θα είχαμε:

$$f^2(\rho) = \rho^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = \rho^2 + 1 \Leftrightarrow \rho^2 = -1 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η (1) είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Εχουμε:

$$x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \lambda\right),\ x > 0$$

Άρα:

$$\text{A} = \lim_{x \to +\infty} f(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \lambda\right) = (1 - \lambda)\cdot(+\infty)$$

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1η) $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$, τότε $\text{A} = +\infty$

2η) $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, τότε $\text{A} = -\infty$

3η) $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε έχουμε:

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x},\ x>0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$.

Άρα:

$$f\left([0,\ +\infty)\right)=\left[1,\ +\infty\right)$$

$$f\left((-\infty,\ 0]\right)=\left[1,+\infty\right)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R})=\left[1,+\infty\right)$.

Δ4. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1$ πρέπει για να έχει λύση η δοθείσα εξίσωση να είναι:

$$\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α1. Θεωρία, στη σελίδα 260 του σχολικού βιβλίου (Θ. Fermat).

Α2. Θεωρία, στη σελίδα 169 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία-Ορισμός, στη σελίδα 280 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Β1. Το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f είναι $D_f = (1,5) \cup (5,\ 9]$.

Το σύνολο τιμών Α είναι $A = f\left(D_f\right) = (-2,5]$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^+} f(x) = 3$

B3.
α) Είναι:

$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$

$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)} = +\infty$,διότι $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (2,3)$

β) Είναι:

$\lim_{x\to 6}\frac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim_{x\to 6} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (5,7)$

γ) θέτουμε $f(x) = u$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f(x) = u_0 \Rightarrow \lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = 5 = u_0 \ .$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right) = \lim_{u\to u_0} f(u) = \lim_{u\to 5} f(u) = 3$$

B4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 3$ και $x_2 = 7$ αφού:

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 7} f(x)$)

B5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x) = 0$ είναι $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 8$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα x΄x οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0 \ .$$

ΘΕΜΑ 3º

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$ ως πολυωνυμική. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=1,\ f(0)=1$$

Επομένως $\lim_{x\to 0} f(x)= f(1)$ και άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ (ως συνεχής στο $\mathbb{R}$). Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,\ 0)$ και $(0,\ 1)$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x+1-1}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και άρα η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[-1,\ 1]$.

Γ3. Έστω $B\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη. Η εξίσωση της C_f στο σημείο Β είναι:

- Για $x\le 0$, έχουμε:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\left(x-x_0\right)$$

$$y-\left(-x_0^2+1\right)=-2x_0\left(x-x_0\right)$$

$$y+x_0^2-1=-2x_0x+2x_0^2$$

Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ θα είναι:

$$\frac{5}{4}+x_0^2-1=2x_0^2 \Leftrightarrow x_0=\pm\frac{1}{2}$$

Δεκτή τιμή $x_0=-\frac{1}{2}$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{3}{4}=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=x+\frac{5}{4}$$

- $x>0$, έχουμε:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\left(x - x_0\right)$$

$$y - \left(-x_0 + 1\right) = -\left(x - x_0\right)$$

$$y + x_0 - 1 = -x + x_0$$

$$y - 1 = -x$$

$$y = -x + 1$$

Η οποία δεν επαληθεύεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = x + \frac{5}{4}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η συνάρτηση f είναι «1-1» αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Για την αντίστροφη έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}\ .$$

Επομένως $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},\ x \geq 0$.

Δ2. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι:

$$\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \ \text{ για κάθε } x > 0$$

ή ισοδύναμα ότι:

$$\eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0,\ x > 0\ .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3,\ x \geq 0\ ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ +\infty\right)$ με:

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + x^2,\ x > 0\ .$$

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$g''(x) = -\eta\mu x + x > 0,\ x > 0$$

(αφού ισχύει $|\eta\mu x| \leq x$ για κάθε $x \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$).

Άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$. Έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0\ ,$$

δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$. ‘Εχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow \text{ημx} - x + \frac{1}{6}x^3 > 0 \Rightarrow \text{ημx} > x - \frac{1}{6}x^3\ .$$

Άρα για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right),$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα:

$$\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Δ3. Έστω $M\left(x(t),\ y(t)\right),\ x(t) \geq 0,\ t \geq 0$ το σημείο το οποίο κινείται στην καμπύλη $y = x^3,\ x \geq 0$. Έχουμε $y(t) = x^3(t)$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης για κάθε $t \geq 0$ είναι $y'(t) = 3x^2(t)x'(t)$ (1).

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία έχουμε $y'(t_0) = x'(t_0)$ Η σχέση (1) για $t = t_0$ γίνεται:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0)x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0)x'(t_0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x'(t_0)\left(1 - 3x^2(t_0)\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x'(t_0)\ \acute{\eta}\ 1 - 3x^2(t_0) = 0\right)$$

Επειδή $x'(t_0) > 0$ θα είναι:

$$3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x(t_0) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

με δεκτή τιμή $x(t_0)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Άρα $y\left(t_0\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ και επομένως το ζητούμενο σημείο είναι

$M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$

Δ4. Επειδή η f είναι «1-1» , έχουμε:

$$f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}\right)=f(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}=x\Leftrightarrow f(x)=x\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow x^3=x\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-\sqrt{x^2+2}\right)=0\Leftrightarrow\left(x=0,\ \sqrt{x^2+2}=x^2\right)$$

$\sqrt{x^2+2}=x^2\Leftrightarrow x^4-x^2-2=0$.

Θέτουμε $x^2=\omega>0$, οπότε $\omega^2-\omega-2=0$ με ρίζες $\omega=-1$ (απορρίπτεται) και

$\omega=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως οι ρίζες είναι:

$$x=0,\ x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΕΚΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Για κάθε $x \in R_1$ έχουμε :

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta.$$

Α3.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Για να διέρχεται η C_f από το σημείο $A(3,\ 2)$ πρέπει:

$$f(3) = 2 \Leftrightarrow \frac{3a-1}{4} = 2 \Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = 3$$

Β2. Για $\alpha = 3$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1},\ x \neq -1\ .$$

Έστω $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1 - 1}{x_1 + 1} = \frac{3x_2 - 1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow 3x_1x_2 + 3x_1 - x_2 - 1 = 3x_1x_2 + 3x_2 - x_1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_1 - x_2 = 3x_2 - x_1 \Leftrightarrow 4x_1 = 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1».

B3. Αφού η f είναι «1-1» υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}. Έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x - 1}{x + 1} \Leftrightarrow y(x+1) = 3x - 1 \Leftrightarrow x(y-3) = -y - 1$$

Αν $y \neq 3$, έχουμε $x = \frac{y+1}{3-y}$. Πρέπει , επιπλέον, να είναι:

$$x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{3-y} \neq -1 \Leftrightarrow y + 1 \neq -3 + y \Leftrightarrow 1 \neq -3$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής και επομένως έχουμε:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x} \;, \quad x \neq 3 .$$

B4. Έχουμε διαδοχικά:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{3-x} = \frac{3x-1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -3x^2 + 10x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2, \ +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = 1 - \frac{-1}{(x-2)^2} = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \text{, για κάθε } x \in (2, \ +\infty).$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, \ +\infty)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = -\frac{2}{(x-2)^3} < 0 \quad \text{,για κάθε } x \in (2, \ +\infty) \ .$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $(2, \ +\infty)$.

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(x + 1 - \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$$

Επομένως η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Τώρα επειδή:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$$

η C_f δεν έχει οριζόντιες και πλάγιες ασύτμπτωτες στο $+\infty$.

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \left| f(x) - (x+1) \right| dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \left| -\frac{1}{x-2} \right| dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= \left[\ln|x-2| \right]_{\lambda}^{\lambda+1} = \left[\ln(x-2) \right]_{\lambda}^{\lambda+1} = \ln(\lambda - 1) - \ln(\lambda - 2) = \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}, \ \lambda > 2$$

Γ4. Έχουμε:

$$\mathrm{E}(\lambda) > \ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2} > \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2} > 2 \Leftrightarrow \lambda < 3$$

Επομένως $2 < \lambda < 3$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0, \ 1)$ και στο $(1, \ +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων). Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$.

Για $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{x - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \text{ , αφού:}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}(x-1) = -1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ και επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$

Για $x_1 = 1$ (σύμφωνα με τον κανόνα του D'L Hospital):

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1} = \frac{\ln x + 1}{1} = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$ και επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_1 = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και στο $(1, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2} = \frac{h(x)}{(x-1)^2}$$

με $h(x) = x - \ln x - 1,\ x > 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$h'(x) > 0,\ x > 1$$

$$h'(x) < 0,\ 0 < x < 1$$

Άρα η h έχει ελάχιστο στο $x_1 = 1$ και επομένως $h(x) \geq h(1) = 0$.

Άρα:

- $h(x) > 0,\ x \in (0, 1)$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και επειδή η f είναι συνεχής στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

- $h(x) > 0,\ x \in (1,\ +\infty)$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Δ3. Για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = \frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} + \ln x = \frac{-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1-x}{x}} + \ln x = -\frac{\ln x}{1-x} + \ln x =$$

$$= \frac{-\ln x + \ln x - x\ln x}{1-x} = \frac{x\ln x}{x-1} = f(x)$$

Δ4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x\ln e^x}{e^x-1}}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot e^{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{xe^x}{e^x-1}}{xe^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\cdot\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}\right] \quad (1)$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}$ θέτουμε $u = e^x$ και έχουμε:

$$x \to +\infty \Leftrightarrow u \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u-1} = 1$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}$ θέτουμε $t = \frac{1}{x}$ και έχουμε (f συνεχής στο 0):

$$x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{t\to0}\frac{1}{e^{f(t)}} = \frac{1}{e^{f(0)}} = 1$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}} == \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} = 1\cdot1 = 1$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-Απόδειξη θεωρήματος, παράγραφος 2.6.

Α2. α) Ψευδής (Ψ)

β) 1ο παράδειγμα (από το σχολικό βιβλίο[1])

Η συνάρτηση $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

2ο παράδειγμα (από το σχολικό βιβλίο)

Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

3ο παράδειγμα (απότο θέμα Δ)

Η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x\eta\mu x)=0$$

$$f(0)=0$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\left(-x^{\frac{1}{3}}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^-}e^x\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$$

---

[1] Εφόσον υπάρχει στο σχολικό βιβλίο δεν απαιτείται απόδειξη της συνέχεια και της μη παραγωγισιμότητας στο $x_0=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Α3. Θεωρία-ορισμός παράγραφος 1.8 στο σχολικό βιβλίο.

Α4. **α)** Λάθος, **β)** Σωστό , **γ)** Λάθος , **δ)** Σωστό, **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι:

$$D_f = (0,+\infty) \text{ και } D_g = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

Για να ορίζεται η fog πρέπει $D_{fog} = \left\{x \in D_g \;/\; g(x) \in D_f\right\} \neq \varnothing$.

Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Άρα $D_{fog} = (0,1)$

Η fog έχει τύπο:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \ln(g(x)) = \ln\frac{x}{1-x},\ x \in (0,1)\ ,$$

Β2.

1ος τρόπος

Η συνάρτηση:

$$h(x) = \ln\frac{x}{1-x},\ x \in (0,1)$$

Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g με:

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)}$$

(Μπορούμε και $h'(x) = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x(1-x)}$)

Επομένως η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$,άρα και συνάρτηση «1-1», ,οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της h^{-1} αρκεί να βρούμε το σύνολο τιμών της h.

Είναι:

$$h\big((0,1)\big) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x),\ \lim_{x\to 1^+} h(x)\right)$$

Θέτουμε $u = \dfrac{x}{1-x}$, $0 < x < 1$ και έχουμε διαδοχικά:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1-x} = 0$, με $\dfrac{x}{1-x} > 0$ $(u \to 0^+)$

  $$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} u = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{1-x} = +\infty$

  $(\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1,\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x) = 0,\ 1-x > 0\ \ \gamma\iota\alpha\ \ 0 < x < 1)$

  $$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της h είναι $h\big((0,1)\big) = \mathbb{R}$, οπότε $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.

Για να βρούμε τον τύπο της h^{-1} έχουμε:

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln\frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y - xe^y = x \Leftrightarrow e^y = xe^y + x \Leftrightarrow$$

$$e^y = x(e^y + 1) \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y+1},\ y \in \mathbb{R}$$

Άρα:

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$$

2ος τρόπος:

Θα αποδείξουμε άμεσα ότι η h είναι «1-1»:

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1) = h(x_2)$ έχουμε ισοδύναμα:

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \Leftrightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1\left(1-x_2\right) = x_2\left(1-x_1\right) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης h^{-1} έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\begin{cases} y = h(x) \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = \dfrac{x}{1-x} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y - xe^y = x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^y = xe^y + x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = x(e^y + 1) \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{e^y}{e^y + 1}, \ y \in \mathbb{R} \text{ διότι } e^y + 1 > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ισχύει: $0 < \dfrac{e^y}{e^y + 1} < 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο:

B3. Η συνάρτηση: $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \ x \in \mathbb{R}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \ x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Η συνάρτηση φ' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$\frac{e^x(e^x + 1)^2 - 2e^x \cdot (e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{(e^x + 1)e^x\left[(e^x + 1) - 2e^x\right]}{(e^x + 1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}, \ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{\left(e^x+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$$

$$\varphi''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{\left(e^x+1\right)^3}>0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Rightarrow x>0$$

Ο πίνακας μεταβολών της φ'' είναι:

x	$-\infty$	0 $\qquad$ $+\infty$
$\varphi''(x)$	+	-
$\varphi(x)$	$\cup$	$\cap$

Σ.Κ.

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$ και κοίλη στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$

Η γραφική παράσταση της $\varphi(x)$ έχει σημείο καμπής το $A\left(0,\varphi(0)\right)$, δηλαδή το $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

Β4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

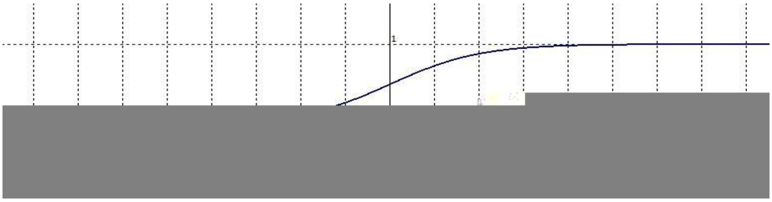
Άρα η γραφικη παράσταση της φ έχει στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωση την ευθεία $y=0$ (άξονα $x'x$).

Επίσης:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Άρα η γραφικη παράσταση της φ έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωση την ευθεία $y=1$.

Η γραφική παράσταση της φ φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\pi]$ με:

$$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x \ .$$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in [0,\pi]$ έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 (x - x_0)$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ αν και μόνο αν:

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)\sigma\upsilon\nu x_0 + \eta\mu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \frac{\pi}{2}, \ x \in [0,\pi]$$

Είναι $h(0) = 0$ και $h(\pi) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι η h δεν έχει άλλες ρίζες στο διάστημα $[0,\pi]$

1ος τρόπος για την μοναδικότητα των δύο ριζών (με μονοτονία)

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,\pi]$) με:

$$h'(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x, \ x \in [0,\pi]$$

Έχουμε:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ή } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ ή } x = \pi\right)$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} < x < \pi$

Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$ που είναι το 0 και το π.

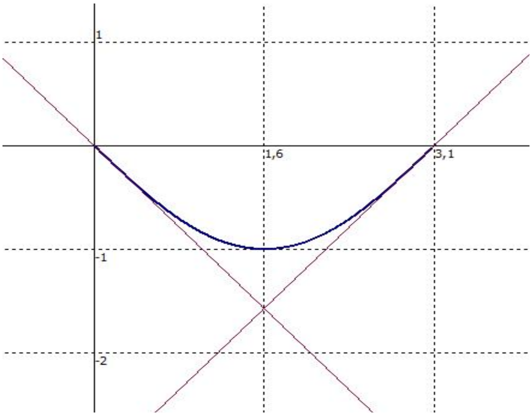
Άρα θα έχουμε δύο ακριβώς σημεία επαφής τα $M_1\left(0,h(0)\right)$, $M_2\left(\pi,h(\pi)\right)$

Οι δύο αντίστοιχες εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία M_1 και M_2 είναι:

$$(\varepsilon_1): y=-x$$

$$(\varepsilon_2): y=x-\pi$$

Γ2. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και οι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2):



$$\mathrm{E}_2=\int_0^{\pi}\left|f(x)dx\right|=-\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=2\ \tau.\mu$$

$$\mathrm{E}_1=(\mathrm{OAB})-\mathrm{E}_2=\frac{|\pi|\cdot\left|-\frac{\pi}{2}\right|}{2}-2=\frac{\pi^2}{4}-2\ \tau.\mu$$

Επομένως:

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

Γ3. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$f(x)-x+\pi=-\eta\mu x-x+\pi>0 \text{ (II) για κάθε } x\in\left[0,\pi\right)$$

1ος τρόπος (για τη σχέση (Ι))

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0,\pi\right)$ με $f''(x)=\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\pi\right)$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $\left(0,\pi\right)$ και η εφαπτομένη $\left(\varepsilon_2\right)$ της C_f βρίσκεται «κάτω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο $\mathrm{B}\left(\pi,0\right)$.

Επομένως ισχύει:

$$f(x)>x-\pi \Leftrightarrow -\eta\mu x-x+\pi>0,\ x\in\left[o,\pi\right)$$

2ος τρόπος (για τη σχέση (Ι))

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=-\eta\mu x-x+\pi,\ x\in\left[0,\pi\right]$$

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\pi\right)$ με $g'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1<0$ για κάθε $x\in\left(0,\pi\right)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\pi\right]$.Έχουμε:

$$0\le x<\pi \Leftrightarrow g(x)>g(\pi)\Leftrightarrow -\eta\mu x-x+\pi>0$$

3ος τρόπος (για τη σχέση (Ι))

Για κάθε $x\in\left[0,\pi\right)$ ισχύει:

$$\left|\eta\mu(\pi-x)\right|<\left|\pi-x\right| \Leftrightarrow \eta\mu(\pi-x)<\pi-x \Leftrightarrow \eta\mu x<\pi-x \Leftrightarrow -\eta\mu x-x+\pi>0$$

Άρα το ζητούμε όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\cdot\frac{1}{f(x)-x+\pi}\right]$$

και

$$\lim_{x\to\pi}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=\pi>0$$

$$\lim_{x\to\pi}\left(f(x)-x+\pi\right)=\lim_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x-x+\pi\right)=0$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$$

αφού $f(x)-x+\pi>0$.

Άρα :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\cdot\frac{1}{f(x)-x+\pi}\right]=\pi\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$$

4ος τρόπος του ερωτήματος Γ3

Θέτουμε $u=\pi-x$,οπότε $\lim\limits_{x\to\pi}u=\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)=0$ και το ζητούμενο όριο

γίνεται:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[(-\eta\mu x+x)\cdot\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}\right]=$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left[(-\eta\mu(\pi-u)+\pi-u)\cdot\frac{1}{-\eta\mu(\pi-u)+u}\right]=$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left[(-\eta\mu u+\pi-u)\cdot\frac{1}{u-\eta\mu u}\right]=\pi\cdot(+\infty)$$

Γ4.

1ος τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,\pi)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=\eta\mu x>0,\ x\in(0,\pi)$. Άρα η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$, οπότε και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται «κάτω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi,0)$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f(x)>x-\pi\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}>1-\frac{\pi}{x}\text{ για κάθε }x\in[1,e]\subseteq(0,\pi)$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>[x]_1^e-[\pi\ln|x|]_1^e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$$

2ος τρόπος

Για κάθε $x\in[1,e]\subseteq(0,\pi)$ ισχύει:

$$\eta\mu x\le1\Leftrightarrow-\eta\mu x\ge-1\Leftrightarrow\frac{-\eta\mu x}{x}\ge\frac{-1}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\ge-\frac{1}{x}$$

Επειδή η ισότητα δεν ισχύει παντού, είναι:

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>-[\ln|x|]_1^e\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>-1>e-1-\pi$$

αφού $e-1-\pi<-1 \Leftrightarrow e-\pi<0$

3ος τρόπος

$$\eta\mu e^{u} \leq 1 \Leftrightarrow -\eta\mu e^{u} \geq -1 \Leftrightarrow f\left(e^{u}\right) \geq -1$$

Επειδή η ισότητα δεν ισχύει παντού, είναι:

$$\int_0^1 f\left(e^{u}\right) du > \int_0^1 -1 du \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(e^{u}\right) du > -\left[u\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(e^{u}\right) du > -1$$

Θέτουμε $e^{u}=x \Leftrightarrow u=\ln x$ οπότε $du=\frac{1}{x}dx$ και έχουμε ισοδύναμα:

$$\int_0^1 f\left(e^{u}\right) du > -1 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > -1 > e-1-\pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $[-1,0)\cup[0,\pi]=[-1,\pi]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ (ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,0)$)

Η f είναι συνεχής στο $\left(0,\pi\right]$ (ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $\left(0,\pi\right]$)

Ακόμα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(e^{x}\eta\mu x\right) = 0$$

$$f(0)=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ επομένως η f είναι συνεχής και στο 0 δηλαδή η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)'=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)'=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$$

Είναι $f'(x)=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0,\ x\in(-1,0)$,οπότε $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,0)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με:

$$f'(x)=(e^{x}\eta\mu x)'=e^{x}\eta\mu x+e^{x}\sigma\upsilon\nu x=e^{x}\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$$

Για $x\in(0,\pi)$ έχουμε:

$e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x$ και αφού $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι:

$$\sigma\varphi x=-1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sigma\varphi\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$

Εξετάζουμε τώρα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα 0 (σημείο που η f δεν είναι παραγωγίσιμη) και το $\frac{3\pi}{4}$ (σημείο μηδενισμού της f').

Δ2. Είναι:

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, & x\in[-1,0)\\ e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right), & x\in(0,\pi]\end{cases}$$

- Αν $x\in[-1,0)$ είναι $f'(x)<0$
- Αν $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ ισχύει $f'(x)=e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)\neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$. Είναι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$ άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$.
- Αν $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ ισχύει $f'(x)=e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)\neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ με $f'(\pi)=-e^{\pi}<0$ άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Ο πίνακας μεταβολών της f' είναι ο επόμενος:

x	**-1** **0**	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Μονοτονία της f

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

Ακρότατα της f

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 , το $f(-1)=1$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$, το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο π , το $f(\pi)=0$

Σύνολο τιμών της f :

1^{ος} τρόπος: Το ολικό ελάχιστο της f είναι το $m=0$ και το ολικό μέγιστο το

$M=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ διότι ισχύει:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}>\frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}>2$$

Επιπλέον η f είναι συνεχής και άρα το σύνολο τιμών είναι

$[m,M]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

2^{ος} τρόπος:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left[-1,0\right]$, άρα:

$$f\left(\Delta_1\right) = \left[f(0), f(1)\right] = \left[0,1\right]$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, άρα:

$$f\left(\Delta_2\right) = \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, άρα:

$$f\left(\Delta_3\right) = \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Επομένως:

$$f\left(\Delta_1\right) \cup f\left(\Delta_2\right) \cup f\left(\Delta_3\right) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^\pi \left| f(x) - e^{5x} \right| dx = \int_0^\pi \left| e^x \eta\mu x - e^{5x} \right| dx \quad (1)$$

Έχουμε:

$$e^x \eta\mu x - e^{5x} = e^x\left(\eta\mu x - e^{4x}\right) < 0$$

διότι:

$$x \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x} \geq 1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } x = 0\text{)}$$

$$1 \geq \eta\mu x \quad \text{(η ισότητα ισχύει για } x = \frac{\pi}{2}\text{)}$$

Άρα:

$$e^{4x} > \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x - e^{4x} < 0 \Leftrightarrow e^x \eta\mu x - e^{5x} < 0$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$E = \int_0^\pi (e^{5x} - e^x \eta\mu x)dx = \int_0^\pi e^{5x}dx - \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx = \frac{1}{5}\left[e^{5x}\right]_0^\pi - \mathrm{I} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \mathrm{I},$$

όπου $\mathrm{I} = \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx$. Έχουμε:

$$\mathrm{I} = \int_0^\pi (e^x)' \eta\mu x dx = \left[e^x \eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x dx = -\int_0^\pi (e^x)' \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$= -\left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx$$

$$I = e^{\pi} + 1 - \mathrm{I} \Leftrightarrow 2\mathrm{I} = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow \mathrm{I} = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

Άρα $\mathrm{E} = \dfrac{e^{5\pi} - 1}{5} - \dfrac{e^{\pi} + 1}{2} \ \tau.\mu.$

Δ4. 1ος τρόπος: Έχουμε:

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{8\sqrt{2}}{16} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \quad (2)$$

Προφανής ρίζα της (2) είναι η $x = \dfrac{3\pi}{4}$.θα αποδείξουμε ότι είναι η μοναδική.

Από το σύνολο τιμών έχουμε:

$$f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \le 0$$

Άρα ισχύει μόνο $4x - 3\pi = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$

2ος τρόπος

Από το ολικό μέγιστο της f έχουμε:

$$f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow 16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) \le 8\sqrt{2}$$ (3) (Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \dfrac{3\pi}{4}$)

Επίσης έχουμε:

$$-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 \le 0$$ (4) (Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \dfrac{3\pi}{4}$)

Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη έχουμε:

$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 \le 8\sqrt{2}$.Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \dfrac{3\pi}{4}$.Επομένως η μοναδική ρίζα της δοθείσας εξίσωσης ειναι η $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Είναι το Α1 του Ημερησίου Λυκείου 2017

Α2. Είναι το Α3 του Ημερησίου Λυκείου 2017

Α3. Είναι το Α4 του Ημερησίου Λυκείου 2017

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 0)$ (ως πολυωνυμική)

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ (ως πολυωνυμική)

Πρέπει η f να είναι είναι συνεχής και στο 0.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2 + x + \beta\right) = \beta$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+5) = 5$$

$$f(0) = 5$$

Για να είναι η f συνεχής στο 0 πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 5 \Leftrightarrow \beta = 5$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = 2x+1,\ x<0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1,\ x>0$

Για $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+5-5}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x+5-5}{x} = 1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$

Β3. Η εξίσωση (ε) της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(1, f(1)\right)$ είναι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 6 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 5$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $D_f = [1, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$. Έχουμε:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\}$$

$$\begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{3-5x}{x-2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{3-5x}{x-2} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{5-6x}{x-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (5-6x)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{5}{6} \leq x < 2 \end{cases}$$

Άρα $D_{fog} = \left[\dfrac{5}{6},\ 2\right)$

Για τον τύπο της fog έχουμε για κάθε $x \in \left[\dfrac{5}{6},\ 2\right)$:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3-5x}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{3-5x}{x-2} - 1} = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}$$

Γ2. Η συνάρτηση :

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}},\ x \in \left[\frac{5}{6},\ 2\right)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\dfrac{5}{6},\ 2\right)$ (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{5-6x}{x-2}}} \cdot \left(\frac{5-6x}{x-2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{5-6x}{x-2}}} \cdot \frac{-6(x-2)-(5-6x)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{5-6x}{x-2}}} \cdot \frac{7}{(x-2)^2},\ x \in \left[\frac{5}{6},\ 2\right)$$

Είναι $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{5}{6},\ 2\right)$ και άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$. Η έχει ελάχιστο στο $\frac{5}{6}$, το $\varphi\left(\frac{5}{6}\right) = 0$.

Γ3. Αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$.θα είναι και συνάρτηση «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της φ^{-1} έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{5-6x}{x-2} \Leftrightarrow y^2x - 2y^2 = 5 - 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(y^2+6\right) = 5 + 2y^2 \Leftrightarrow x = \frac{5+2y^2}{\left(y^2+6\right)}$$

Άρα $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{5+2x^2}{\left(x^2+6\right)}$ με $D_{f^{-1}} = \left[0,+\infty\right)$ αφού είναι το σύνολο τιμών της φ

δηλαδή, επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2},2\right)$. Είναι:

$$f\left(\left[\frac{5}{2},2\right)\right) = \left[f\left(\frac{5}{2}\right), \lim_{x\to 2^-} f(x)\right) = \left[0,+\infty\right)$$

αφού $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} = +\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[-1,0\right),\left(0,\pi\right]$.Θα αποδείξουμε ότι είναι συνεχής και στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\eta\mu x = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, οπότε η f είναι συνεχής και στο 0.

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία θα βρούμε τα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγος και τα σημεία στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος. Έχουμε:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x}}(-x)'=-\frac{1}{2\sqrt{-x}},\ x\in[-1,0)$$

Είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-1,0)$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi]$ με:

$$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in(0,\pi]$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

- Για $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x}}{x\sqrt{-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{-x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\sqrt{-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x\sqrt{-x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επομένως τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x=0$ και $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Έχουμε:

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}<0,\ x\in[-1,0)\ \text{ και για κάθε }\ x\in(0,\pi]:$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>0\Leftrightarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x<0\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<x<\pi$$

Ο πίνακας μεταβολών της f η οποία είναι συνεχής παντού είναι ο επόμενος:

x	-1	0 $\qquad \frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Μονοτονία της f

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

Ακρότατα:

Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$, το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Επίσης παίρνει τις τιμές στα άκρα $f(-1)=1$ (μέγιστο) και $f(\pi)=0$ (ελάχιστο)

Δ3. Έστω $x\in(0,\pi]$.

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y - \eta\mu x_0 = \sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0)$$

Αφού η (ε) πρέπει να διέρχεται από το σημείο $M(0,3)$ θα έχουμε:

$$3-\eta\mu x_0 = \sigma\upsilon\nu x_0\left(0-x_0\right) \Leftrightarrow 3-\eta\mu x_0 = -x_0\sigma\upsilon\nu x_0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 3,\ x\in[0,\pi]$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$

Η h είναι συνεχής στο $[0,\pi]$(ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων) με:

$$h(0)=3>0$$

$$h(\pi)=-\pi+3<0$$

Άρα , από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ-ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

Α2. α) Ψ

β) Για να είναι το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f πρέπει να ορίζεται η εφαπτομένη στο σημείο Α και η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 (να αλλάζει κοίλα). Αν πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4$ και $x_0 = 0$ έχουμε:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 12x^2$.
- $f''(0) = 0$
- Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής το 0 αφού $f''(0) = 12x^2 \geq 0$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και γραφική παράσταση της f (η οποία υπάρχει στο σχολικό βιβλίο στην παράγραφο 2.8).

Α3. Το δ)

Α4. α) Σωστό , β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Λάθος, ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο και άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Β2. Επειδή το ΘΕΖΗ είναι τετράγωνο αν Ε το εμβαδόν του έχουμε:

$$E = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4 \text{ με } EB = x \geq 0,\ BZ = 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \ .$$

Άρα $E = f(x) = 2x^2 - 4x + 4$, $0 \leq x \leq 2$

Β3. Θα μελετήσουμε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με:

$$f'(x) = 4x - 4, x \in (0,2) \ .$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο επόμενος:

x	**0** **1**	**2**
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Μονοτονία της f

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$

Ακρότατα:

Η f έχει έχει ελάχιστο στο 1, το $f(1)=2$ και μέγιστο στα σημεία 0 και 2 με:

$$f(0)=f(2)=4$$

Β4. Θα εξετάσουμε αν υπάρχει $x_0\in[0,2]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=4e^{x_0}+1$

Η f είναι συνεχής στο $\Delta_1=[0,1]$ και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 θα είναι

$$f(\Delta_1)=[f(1),f(0)]=[2,4] \;.$$

Η f είναι συνεχής στο $\Delta_2=[1,2]$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 θα είναι $f(\Delta_2)=[f(1),f(2)]=[2,4]$.

Άρα $f([0,2])=[2,4]$. Επομένως για κάθε $x\in[2,4]$ ισχύει $2\le f(x)\le 4$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in[0,2]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=4e^{x_0}+1$.Έχουμε:

$$2\le 4e^{x_0}+1\le 4 \Leftrightarrow 1\le 4e^{x_0}\le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le e^{x_0}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow \ln\frac{1}{4}\le x_0\le \ln\frac{3}{4}$$

Δηλαδή το $x_0\in\left[\ln\frac{1}{4},\ln\frac{3}{4}\right]$ (με $\ln\frac{1}{4}<0$, $\ln\frac{3}{4}<0$). Αυτό είνα άτοπο αφού $x_0\in[0,2]$. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο x_0.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$

καθώς και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$, οπότε:

$$E=\int_0^3|f'(x)|dx=-\int_0^2 f'(x)dx+\int_2^3 f'(x)dx=$$
$$=-\big(f(2)-f(0)\big)+f(3)-f(2)=-2f(2)+2+f(3)$$

Αφού $\mathrm{E}=8$ έχουμε:

$$\mathrm{E}=8\Leftrightarrow -2f(2)+2+f(3)=8\Leftrightarrow f(3)-2f(2)=6 \quad \text{(I)}$$

Επειδή η f δεν ικανοποιεί τις υποέσεις του Θ.Ε.Τ. στο διάστημα $[0,3]$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ (άρα και συνεχής στο $[0,3]$) πρέπει να ισχύει $f(0)=f(3)=2$ (II)

Από τις σχέσεις (I) και (II) προκύπτει $f(2)=-2$.

Τώρα έχουμε (κανόνας του D΄L):

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\big(xf'(x)\big)=\lim_{x\to1}x\cdot\lim_{x\to1}f'(x)=1\cdot(-3)=-3$$

διότι η f είναι συνεχής (δοθείσα γραφική παράσταση της f') και άρα $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=f'(1)=-3$.

Ακόμα έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)-2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{f'(x)}=-\infty \quad ,$$

διότι $f'(x)<0$ «κοντά» στο 0 και $f'(0)=0$.

Γ2. Ισχύει: $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$ καθώς και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$ και $f'(2)=0$. Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2, το $f(2)=-2$.

Επίσης από το δοθέν σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$
- Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$
- $f''(1)=0$ (διότι η $C_{f'}$ δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(1,f'(1))$)

Ο πίνακας μονοτονίας-ακροτάτων της f είναι ο επόμενος:

x	**0** **2**	**3**
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Ο πίνακας για τα κοίλα της f είναι ο επόμενος:

x	**0** **1**	**3**
$f''(x)$	↘	↗
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Επομένως:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$
- Η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$, το $f(2) = -2$
- Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 0$ και $x_2 = 3$, το $f(0) = f(3) = 2$
- Η f είναι κοίλη στο $[0,1]$ και κυρτή στο $[1,3]$
- Η f έχει σημείο καμπής στο σημείο $(1, f(1))$

Γ3. Για να μην υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$ θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ τέτοι, ώστε $f(x_0) = 0$ και η f να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 (διαφορετικά αν $f(x_0) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$ υπάρχει). Τώρα ισχύουν:

- η f είναι συνεχής στο $[0,3]$
- $f(2)\cdot f(3) = (-2)\cdot 2 = -4 < 0$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

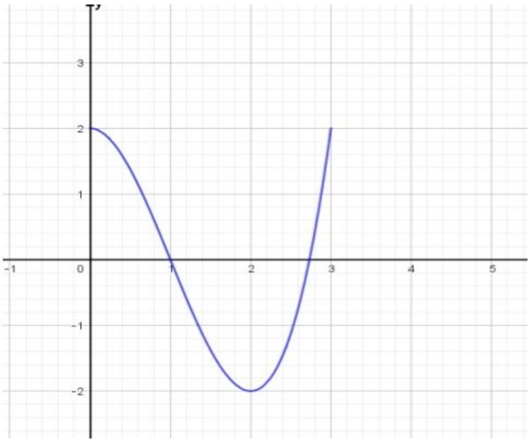
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$, άρα και συνάρτηση «1-1» το x_0 είναι μοναδικό.

Τώρα έχουμε:

- $2 < x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$
- $x_0 < x < 3 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Η Γραφική παράσταση της f αφού λάβουμε υπόψη μας τους παραπάνω πίνακες είναι:



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,2]$ (ως πολυωνυμική).Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^3 - 3x^2 + 2\right) = 2 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο 2, δηλαδή είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$

Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x, x \in (0,2)$.

Επομένως η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,2]$.

Δ2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\eta\mu x}{x}+a\right) = 2 \Rightarrow -1+a=2 \Rightarrow a=3$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\\ 3x^2-6x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

Θέτουμε $g(x)=\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=x\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.Άρα έχουμε:

$$x<0 \Leftrightarrow g(x)<g(0)=0$$

Άρα:

$$f'(x)=\frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}<0 \text{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$$

Η f είναι συχεχής και στο 0 (άρα και στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$). Άρα, επειδή είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Ακόμα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow (x=0, x=2).$$

Ο πίνακας προσήμου της f' είναι ο επόμενος:

x	-π/2	0 2	+00
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	↘	↘	↗

Άρα, αφού η f είναι παντού συνεχής:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$

Δ4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2}\left(x^3 - 3x^2 + 2\right)dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_0^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ έχουμε διαδοχικά:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ge f(x) \ge f(0) \Rightarrow 3 - \frac{2}{\pi} \ge f(x) \ge 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)dx \ge \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx \ge \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2dx \Rightarrow \left(3 - \frac{2}{\pi}\right)\cdot\frac{\pi}{2} \ge \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx \ge 2\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx \le \frac{3\pi}{2} - 1$$

Δ5. Για κάθε

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $-\frac{\pi}{2}x,\ -\frac{\pi}{2}e^{-x} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ για κάθε $x \in [0,1]$, προκειμένου να εκμεταλευτούμε το γεγονός ότι στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ η f είναι συνάρτηση «1-1»(ως γννησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$). Έχουμε:

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2}x \le 0$$

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le -x \le 0 \Rightarrow e^{-1} \le e^{-x} \le e^{0} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}e^{-1} \ge -\frac{\pi}{2}e^{-x} \ge -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2}e^{-x} \le -\frac{\pi}{2}e^{-1} < 0$$

Άρα η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{2}e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - x = 0$$

και έτσι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης στο $[0,1]$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $e^{-x} - x = 0$ στο $[0,1]$. Θέτουμε

$$K(x) = e^{-x} - x,\ x \in \mathbb{R}$$

- Η K είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $K(1) = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$

Άρα από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $K(x_0) = 0$.

Όμως η K είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με
$K'(x) = -e^{-x} - 1 < 0,\ x \in \mathbb{R}$, άρα η K είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, δηλαδή και συνάρτηση «1-1», οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ

ΘΕΜΑ Α (Το ΘΕΜΑ Α των ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$h'(x)=\frac{e^x\left(1+e^x\right)-e^xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα (Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$) .

Β2. Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x), \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Επομένως $f\left(\mathbb{R}\right)=\left(0,1\right)$.

Β3. Η h δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\dfrac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}}\in\mathbb{R}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ η h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=0$ (ο άξονας $x'x$). Επειδή ακόμα $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$ η h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$ (πλάγιες ασύμπτωτες δεν έχει, αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^x}{x\left(1+e^x\right)}=0$).

Β4. Έχουμε:

$$\mathrm{I}=\int_1^e\frac{u^2}{1+u}\cdot\frac{1}{u}du=\int_1^e\frac{u}{1+u}du=\int_1^e\frac{(u+1)-1}{u+1}du=$$

$$=\int_1^e 1du-\int_1^e\frac{1}{u+1}=\left[u\right]_1^e-\left[\ln|u+1|\right]_1^e=$$

$$=e-1-\ln(e+1)+\ln 2$$

ΘΕΜΑ Γ ((Το ΘΕΜΑ Β των ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ Δ (Το ΘΕΜΑ Γ των ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ)