Γιάννης Καραγιάννης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Γ΄ Λ υ κ ε ί ο υ

Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

Οικονομίας & Πληροφορικής

Σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας του Ι.Ε.Π.

Ε Π Α Ν Α Λ Η Ψ Η

- **ΘΕΜΑΤΑ**

Σχολικού Βιβλίου-Ψ.Ε.Β.-Προτεινόμενα-Πανελλαδικών

- **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ**

Ανακεφαλαιωτικά-Προσομοιωμένα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ-ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γιάννης Καραγιάννης
Τηλ. 2241068945
e-mail: iokaragi@sch.gr
ΡΟΔΟΣ

Σελίδες: 337
Σχήμα: 18,2x25,7
ISBN: 978-960-93-8657-9
Εκδότης: Γιάννης Καραγιάννης (ID:12897)

Φιλολογική Επιμέλεια: Τσομαρέλη Τριανταφυλλιά
Επιμέλεια εξωφύλλου: Γιάννης Καραγιάννης
Έκδοση: 1η
Εκτύπωση: Lichnos Print House

Στους μαθητές που καθημερινά μοχθούν για να πετύχουν τους στόχους τους.

Στους συναδέλφους που καθημερινά αγωνιούν για την διδασκαλία των μαθητών τους.

Φίλη μαθήτρια, Φίλε μαθητή,

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου γράφτηκε αποκλειστικά για σένα, για να σε βοηθήσει στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, ώστε μετά από τη συστηματική μελέτη του να είσαι έτοιμος να γράψεις άριστα. Για να γίνει αυτό απαιτείται η βαθιά κατανόηση των εννοιών και των θεωρημάτων-προτάσεων του σχολικού σου βιβλίου.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου έχει την φιλοσοφία ότι το βασικό υλικό που πρέπει να μελετήσεις είναι αυτό του σχολικού σου βιβλίου, του ψηφιακού εκπαιδευτικού βοηθήματος του Υπουργείου καθώς και τα θέματα που μέχρι σήμερα έχουν ζητηθεί στις Πανελλαδικές Εξετάσεις.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου θέλοντας να σε οδηγήσει στην απόλυτη επιτυχία, σου προτείνει και επιπλέον θέματα για εξάσκηση και βαθύτερη σκέψη, καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου, θέλοντας να σου δείξει το δρόμο για την επιτυχία, σου προτείνει προσομοιωμένα διαγωνίσματα στο επίπεδο των Πανελλαδικών Εξετάσεων.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου, θέλοντας να σε διευκολύνει στην επίτευξη του στόχου σου, δεν σου δίνει σε αυτό το βιβλίο τις απαντήσεις-υποδείξεις και λύσεις των θεμάτων αφήνοντας σε σένα την πρώτη προσπάθεια. Τις απαντήσεις, τις υποδείξεις και τις πλήρεις αναλυτικές λύσεις (όπως ακριβώς θα πρέπει να γράφονται στο γραπτό σου) θα τις βρεις στο **βιβλίο λύσεων** που συνοδεύει το βιβλίο αυτό.

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου θέλοντας να σου δώσει ακόμα μια πρόταση περιέχει επαναληπτικά θέματα που προτείνει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία .

Αγαπητέ μου συνάδελφε,

Η καθημερινή σου αγωνία είναι πως θα διδάξεις τους μαθητές σου οργανωμένα και μεθοδικά, με σωστή διαχείριση του πολύτιμου χρόνου σου, ώστε να καταφέρουν το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Ακριβώς αυτό

προσδοκά να καλύψει το παρόν σύγγραμα. Για να μην σπαταλάς ατελείωτες ώρες να βρεις υλικό κατάλληλο, έγκυρο και αξιόπιστο που να ανταποκρίνεται στο επίπεδο των θεμάτων των Πανελλαδικών Εξετάσεων αλλά και στο διαφοροποιημένο επίπεδο των μαθητών σου.
Διδάσκοντας το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου αυτού να είσαι σίγουρος ότι τα παραπάνω έχουν συντελεστεί.

Καλή συνέχεια

Γιάννης Καραγιάννης

Πριν ξεκινήσεις νε μελετάς....ΟΔΗΓΙΕΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Το βιβλίο αυτό μπορείς να το μελετήσεις **γραμμικά** (δηλαδή με τη σειρά των κεφαλαίων και των παραγράφων του) αλλά και **μη-γραμμικά** (δηλαδή επιλέγοντας εσύ τη σειρά των κεφαλαίων ή/και των παραγράφων σύμφωνα με τις ανάγκες σου).

Γραμμικά:

Με το τέλος της μελέτης κάθε κεφαλαίου από το σχολικό βιβλίο μπορείς:

- Να εστιάσεις στις ασκήσεις που προτείνονται, ανά θέμα, από το σχολικό σου βιβλίο στο συγκεκριμένο κεφάλαιο της ύλης (1^o, 2^o, 3^o) και κατόπιν στα επαναληπτικά θέματα (Κεφάλαιο 4^o).
- Να προσπαθήσεις τις ασκήσεις, ανά θέμα, που προτείνονται από το Ψηφιακό Βοήθημα του Υπουργείου στο συγκεκριμένο κεφάλαιο της ύλης (1^o, 2^o, 3^o) και κατόπιν στα επαναληπτικά θέματα (Κεφάλαιο 4^o).
- Να προσπαθήσεις, ανά θέμα, τις ασκήσεις που προτείνονται στα «Προτεινόμενα θέματα» (1^o, 2^o, 3^o) και κατόπιν στα επαναληπτικά θέματα (Κεφάλαιο 4^o).
- Τέλος, να προσπαθήσεις τα διαγωνίσματα που προτείνονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου καθώς και τα προσομοιωμένα και τα θέματα των Πανελλαδικών 2016-2017.

Όταν όλα αυτά γίνουν, θα καταλάβεις πόσο καλά μπορείς να διαπραγματευτείς θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων παλαιοτέρων ετών και μπορείς να αρχίσεις από το κάθε κεφάλαιο και την κατηγορία θέματος Α, Β, Γ και Δ.

Είσαι έτοιμος; Το πόσο έτοιμος είσαι θα φανεί από το πώς μπορείς να αντιμετωπίσεις τα προσομοιωμένα διαγωνίσματα-διαγωνίσματα ΨΕΒ και τα Διαγωνίσματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων που παρατίθενται στο 4^o Κεφάλαιο. Η διαδικασία αυτή θα καταδείξει το βαθμό ετοιμότητάς σου (όλα τα προσομοιωμένα διαγωνίσματα έχουν τρίωρη διάρκεια).

Επιπλέον, μπορείς να διαπραγματευτείς τα πραγματικά θέματα του 2016 και 2017 (σε όλους τους τύπους σχολείων) δίνοντας «πραγματικές εξετάσεις».

Αν το ενδιαφέρον σου είναι αυξημένο για το μάθημα μπορείς, αν το επιθυμείς, να δεις θέματα που προτείνονται από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία και ακόμη να ανατρέξεις στα 10 απαιτητικά θέματα (χωρίς να απογοητευτείς αν δεν τα καταφέρεις πλήρως).

Τέλος, τώρα πρέπει να δεις πόσο καλά τα έγραψες στο τετράδιό σου, δηλαδή δεν αρκεί ότι έλυσες τα θέματα αλλά μετράει και ο τρόπος της παρουσίασης, της δομής και της αιτιολόγησης. Για το σκοπό αυτό θα ανατρέξεις στο βιβλίο των λύσεων για να συγκρίνεις το γραπτό σου με τις λύσεις που δίνονται.

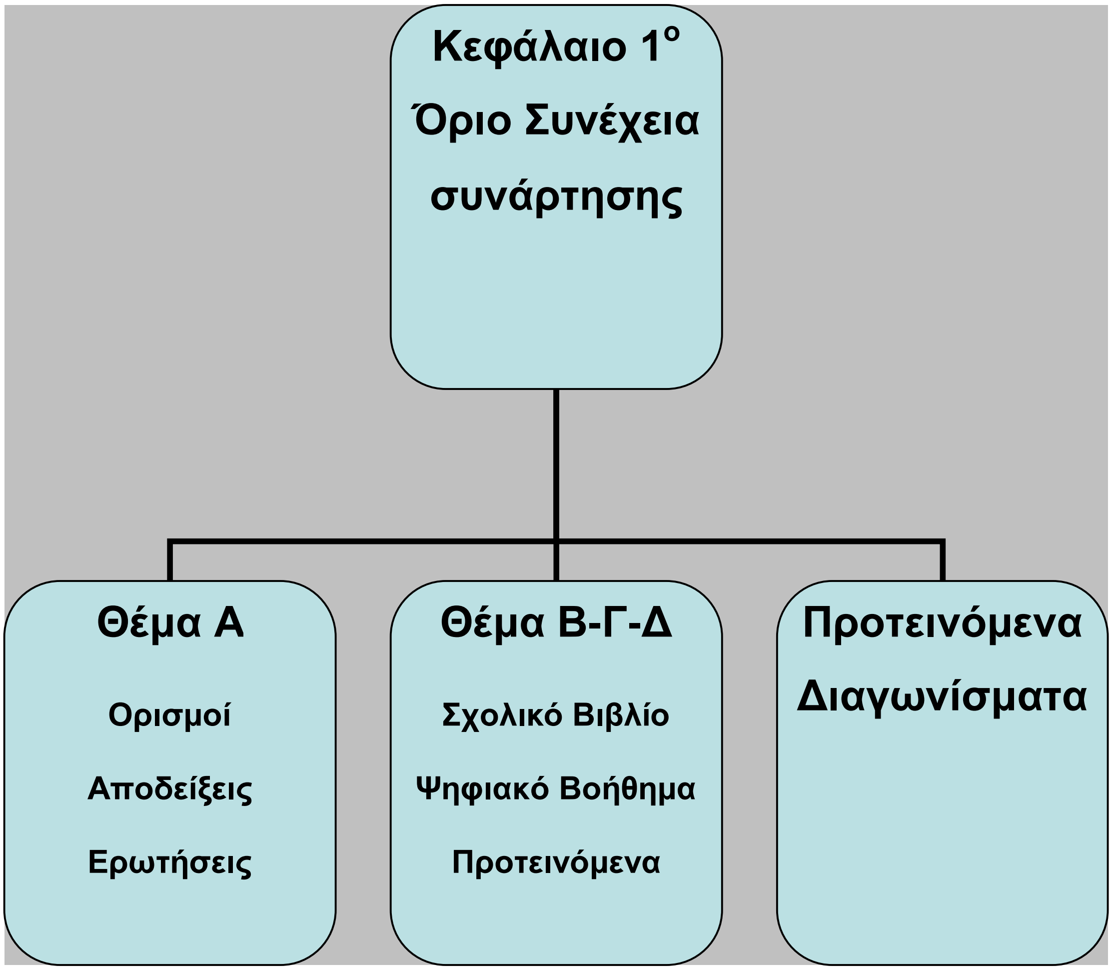
<u>Μη-Γραμμικά:</u>

Σε όποιο σημείο της μελέτης σου επιθυμείς, μπορείς να ανατρέχεις για «αξιολόγηση» σε όποιο Κεφάλαιο και κατηγορία θέματος ή και στα θέματα εφ΄όλης της ύλης θέλεις και σε όποια κατηγορία θεμάτων θέλεις (Σχολικού, ΨΕΒ, προτεινόμενα, θέματα Πανελλαδικών). Σου προτείνω να μην προτρέξεις να αντιμετωπίσεις πριν από τα άλλα (Σχολικού, ΨΕΒ, προτεινόμενα) τα προσομοιωμένα διαγωνίσματα αλλά αυτό να το κάνεις ως τελικό στάδιο. Είναι απαραίτητο να έχεις δει βασικές ασκήσεις του σχολικού σου βιβλίου και του ΨΕΒ. Μετά θα «ζυγίσεις» πού μπορείς και που θέλεις «προπόνηση». Έτοιμος θα είσαι όταν γράφεις **ΜΟΝΟΣ** σου, χωρίς βοήθεια, στο τετράδιό σου και επιτυγχάνεις τους στόχους σου.

Μπορείς να διαμορφώσεις μόνος σου το στόχο σου και να πορευτείς. Ανάλογα με αυτόν διαμορφώνεις τη μελέτη σου από το θέμα Α έως και το Θέμα Δ ...και κάτι παραπάνω.

Καλή μελέτη και...... σε βάθος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ


Κεφάλαιο 1ο
Όριο Συνέχεια συνάρτησης
Θέμα Α
Ορισμοί
Αποδείξεις
Ερωτήσεις
Θέμα Β-Γ-Δ
Σχολικό Βιβλίο
Ψηφιακό Βοήθημα
Προτεινόμενα
Προτεινόμενα Διαγωνίσματα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Οι πιο σημαντικοί ορισμοί

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α;

2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει:

- στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο,
- στο $x_1 \in A$ (ολικό) ελάχιστο.

5. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : \mathrm{B} \to \mathbb{R}$, δύο συναρτήσεις τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται:

- γνησίως αύξουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;
- γνησίως φθίνουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;

7. Πότε μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1−1»;

8. Τι ονομάζουμε αντίστροφη της συνάρτησης $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$;

9. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

10. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής

- σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);
- σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

11. Τι οναμάζεται ακολουθία;

Α.2. Διατυπώσεις -Γεωμετρικές Ερμηνείες Θεωρημάτων και Προτάσεων

1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα.

3. Να διατυπώσετε το θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα .

4. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα .

Α.3. Θεωρήματα και Προτάσεις για απόδειξη

1. Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1};

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

2. Αν $P\left(x\right)=a_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+a_1x+a_0$ ένα πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}P\left(x\right)=P\left(x_0\right).$$

3. Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x

και $x_0\in\mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

4. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

Α.4. Ερωτήσεις Αντικειμενικού τύπου

Σχολικού Βιβλίου

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

Ι.

1. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε:		
$(gof)(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$.	Α	Ψ
$(fog)(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$.	Α	Ψ
2. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=l\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.	Α	ψ
3. Είναι: $$\lim_{x\to 0}\left[x\left(\frac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=0.$$	Α	Ψ
4. Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, τότε: $$\lim_{x\to 0}f(x)>1.$$	Α	Ψ
5. Ισχύει: **α.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$.	Α	Ψ
β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.	Α	Ψ
6. Αν $0\le f(x)\le 1$ κοντά στο 0, τότε: $$\lim_{x\to 0}\left(x^2f(x)\right)=0$$	Α	Ψ
7. Αν $f(x)\le\frac{1}{x^2},\ x\in(a,+\infty)$, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι: $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$	Α	Ψ

8. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, τότε πάντα είναι ίσο με: $f(6)\cdot g(6)$.	Α	Ψ
9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=1$, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-1$.	Α	Ψ
10. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.	Α	Ψ
11. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x\neq 4$ είναι: $f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1.	Α	Ψ
12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ και $f(-1)=4,\ f(1)=3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,\ 1)$ τέτοιος, ώστε: $f(x_0)=\pi$.	Α	Ψ

ΙΙ.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m$ με $l,\ m\in\mathbb{R}$ και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι:

Α. $l<m$ **Β.** $l\le m$ **Γ.** $l\ge m$ **Δ.** $l=m$ **Ε.** $m<l$

2. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-2x^2\right)^3}{\left(x^2+1\right)^3}$ είναι ίσο με:

Α. 8 **Β.** 1 **Γ.** 0 **Δ.** $+\infty$ **Ε.** -8

3. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^3-x^2-1\right|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α. $+\infty$ **Β.** $-\infty$ **Γ.** 1 **Δ.** -1 **Ε.** 0

4. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α. $x_0=0$ **Β.** $x_0=2$ **Γ.** $x_0=-1$ **Δ.** $x_0=1$

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \qquad \text{και} \qquad g(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

Α. Η g είναι συνεχής στο 2 .

Β. Η f είναι συνεχής στο 1.

Γ. Η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής .

Δ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα:

Α. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ **Β.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$ **Δ.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

Ε. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(x^3+x+1\right)\right]$ **ΣΤ.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(x^3+x-1\right)\right]$

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[0,3]$, με

$$f(0)=2,\ f(1)=1 \text{ κα } f(3)=-1.$$

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς **δεν** προκύπτει ***κατ' ανάγκη*** από τις υποθέσεις;

Α. Υπάρχει $x_0\in(0,\ 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$. **Β.** $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1$.

Γ. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. **Δ.** $[-1,2]\subseteq f(\Delta)$.

Ε. Η μέγιστη τιμή της f στο [0,3] είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

Ψηφιακό Βοήθημα

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1=x_2$, τότε $f(x_1)=f(x_2)$.

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x)<f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

3. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων $f,\ g$ όταν $x\to x_0$, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}\text{, εφόσον }\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$$

4. Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

5. Ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1.$$

6. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

7. Κάθε συνάρτηση που είναι «1-1» είναι γνησίως μονότονη.

8. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-l\right)=0$$

9. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου:

$$A=\lim_{x\to a^+} f(x) \ \text{και}\ B=\lim_{x\to \beta^-} f(x).$$

10. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$.

11. Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε ισχύει:

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=x,\ x\in A.$$

12. Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l,\ \text{αν και μόνο αν}\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l.$$

13. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty.$$

14. Αν $a>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.

15. Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

16. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

17. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

18. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «1-1», αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

19. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στο $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

20. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει:

$$ho(gof) = (hog)of\ .$$

21. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι «1-1», αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

22. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

23. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

24. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

25. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty,\ \nu \in \mathbb{N}$.

26. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ «κοντά» στο x_0.

27. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0\ .$$

28. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

29. Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$.

30. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι:

$$[f(a), f(\beta)] \text{ ή } [f(\beta), f(\alpha)]\ .$$

31. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

32. Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$ **β.** $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

γ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **δ.** $f(x)=\ln\left(1-e^x\right)$

2. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

α. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}+1$ **β.** $f(x)=x|x|$

γ. $f(x)=\begin{cases}-x+3, & x<1\\ x+1, & x\geq 1\end{cases}$ **δ.** $f(x)=|\ln x|$

και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

3. Για ποιές τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

α. $f(x)=x^2-4x+3$ **β.** $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ **γ.** $f(x)=e^x-1$

4. Για ποιές τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:

Α. $f(x)=x^3+2x+1$ και $g(x)=x+1$

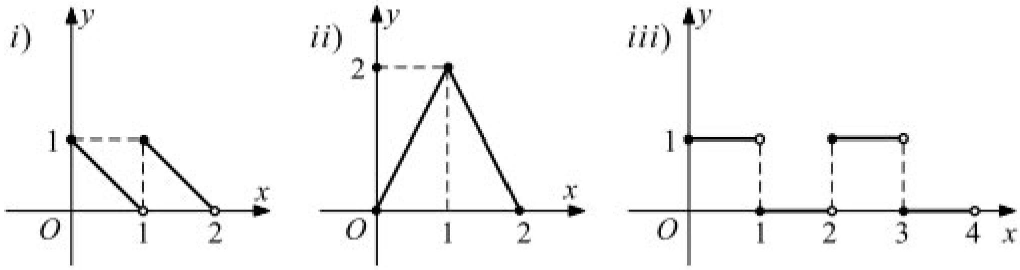
Β. $f(x)=x^3+x-2$ και $g(x)=x^2+x-2$

5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

α. $f(x)=\dfrac{|x+1|+|x-1|}{2}$ **β.** $f(x)=\dfrac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2},\ x\in[0,\ 2\pi]$

Από τη γραφική παράσταση της f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

6. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι :



7. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

Α. $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ **Β.** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$ και $g(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$.

Γ. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=1+\frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x}{1-x}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}.$$

9. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

10. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση gof, αν:

Α. $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$. **Β.** $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Γ. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ και $g(x)=\varepsilon\varphi x$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = \sqrt{x-2}\,.$$

Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις:

$$gof \text{ και } fog\,.$$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x+1$ και $g(x) = ax+2$. Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $fog = gof$;

13. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

Α. $(fog)(x) = x^2 + 2x + 2$, αν $g(x) = x+1$.

Β. $(fog)(x) = \sqrt{1+x^2}$, αν $g(x) = -x^2$.

Γ. $(gof)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις:

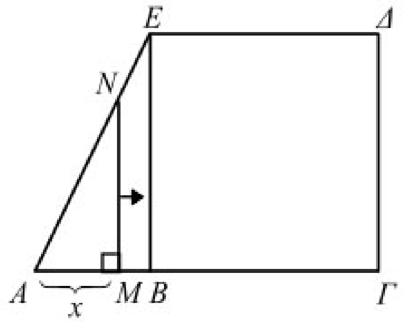
$$f(x) = \frac{ax+\beta}{x-a}, \text{ με } \beta \neq -\alpha^2 \text{ και } g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

Να αποδείξετε ότι:

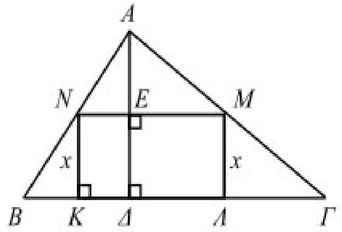
Α. $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ και

Β. $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0,\ 1]$.

15. Στο επόμενο σχήμα είναι ΑΒ = 1, ΑΓ = 3 και ΓΔ =2. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = AM$, όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.



16. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης ΒΓ= 10 cm και ύψους ΑΔ = 5 cm. Να εκφράσετε το εμβαδό Ε και την περίμετρο Ρ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.



17. Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν οτι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις:

$$A(x) = 2,89x + 70,64 \text{ (για τους άνδρες) και}$$
$$\Gamma(x) = 2,75x + 71,48 \text{ (για τις γυναίκες),}$$

όπου x σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

Α. Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του;

Β. Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

18. Σύρμα μήκους $l = 20cm$ κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και $20 - x$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x.

19. Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός P της πόλης είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη:

$$N = 10\sqrt{2\left(x^2 + x\right)}$$

χιλιάδες αυτοκίνητα.

Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t+4}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

Α.Να εκφράσετε τον αριθμό N των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του t.

Β. Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα;

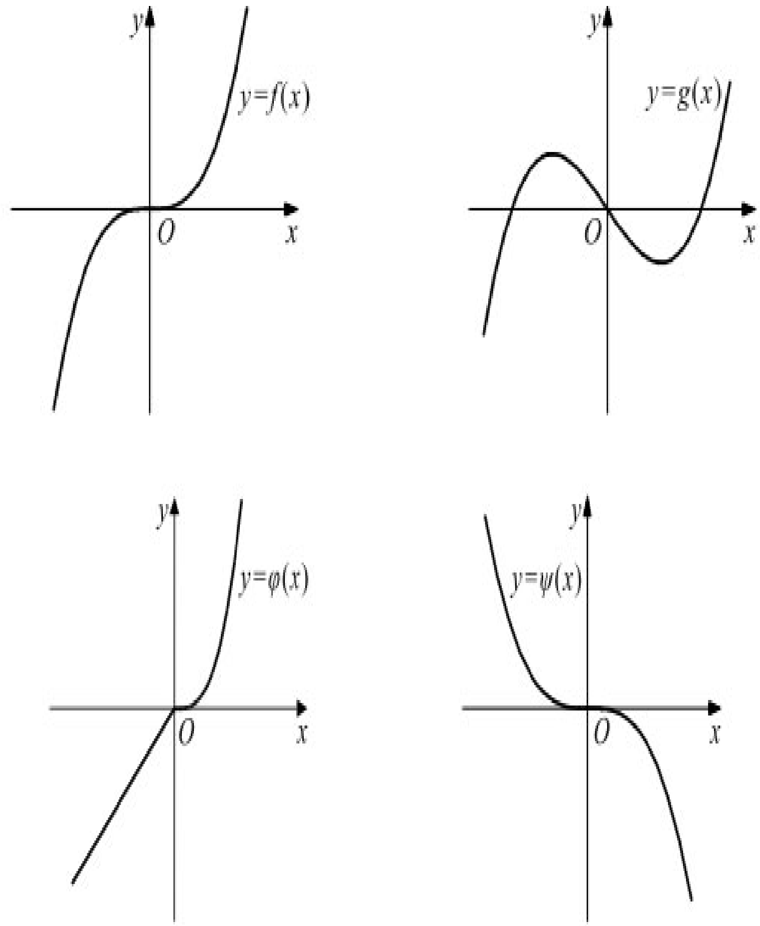
20. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και για κάθεμία απ’ αυτές να βρείτε την αντίστροφή της.

α. $f(x)=3x-2$ **β.** $f(x)=x^2+1$ **γ.** $f(x)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)+1$

δ. $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$ **ε.** $f(x)=\ln\left(1-x\right)$ **στ.** $f(x)=e^{-x}+1$

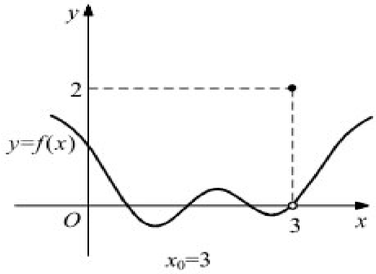
ζ. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ **η.** $f(x)=\left|x-1\right|$

21. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,\ g,\ \varphi,\ \psi$.

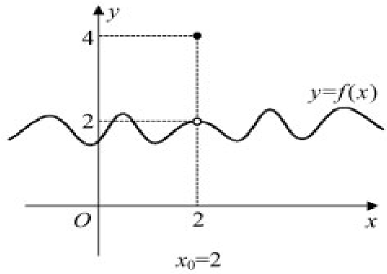


Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις $f,\ g\ ,\varphi\ ,\ \psi$ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

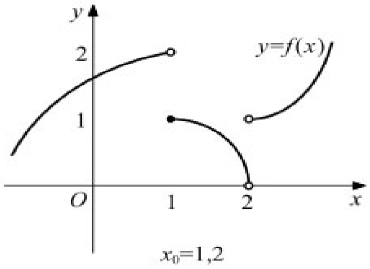
22. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και το $f\left(x_0\right)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



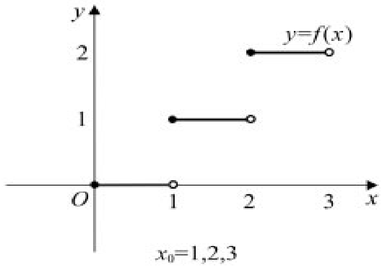
$x_0=3$



$x_0=2$



$x_0=1,2$



$x_0=1,2,3$

23. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\left[-2,\ +\infty\right)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2$

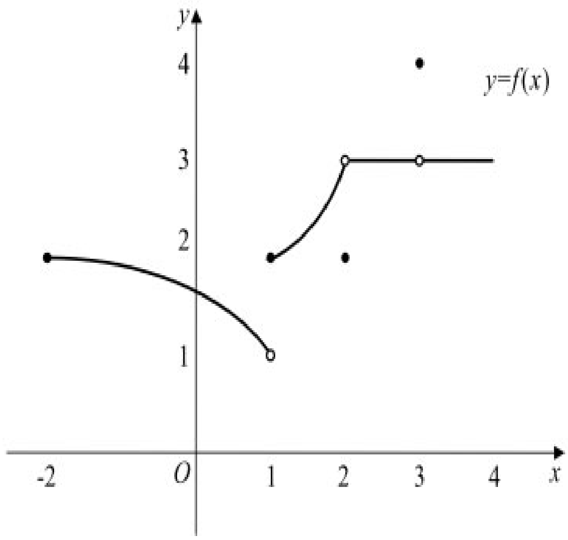
ii) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

iv) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

v) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

vi) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$



24. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

α. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2},\ x_0=2$ **β.** $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases},\ x_0=1$

γ. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -x+1, & x>1 \end{cases},\ x_0=1$ **δ.** $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x}}{x},\ x_0=0$

25. Ομοίως όταν:

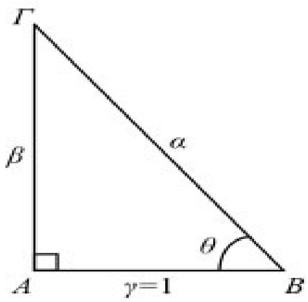
Α. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1},\ x_0=1$ ή $x_0=-1$

Β. $f(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x-1},\ x_0=\dfrac{1}{3}$

26. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με γ =1.

Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$ **β.** $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\alpha^2-\beta^2\right)$ **iii.** $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$



27. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x\right),$$

να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-ax+\beta,$$

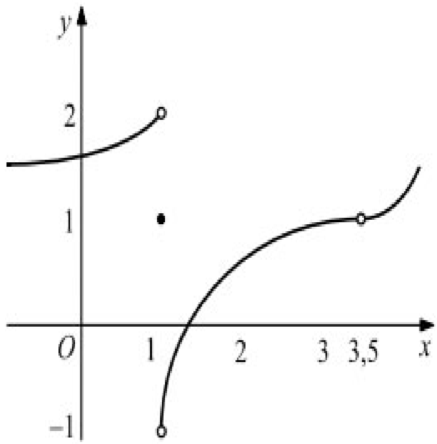
να βρείτε τις τιμές των $a,\ \beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

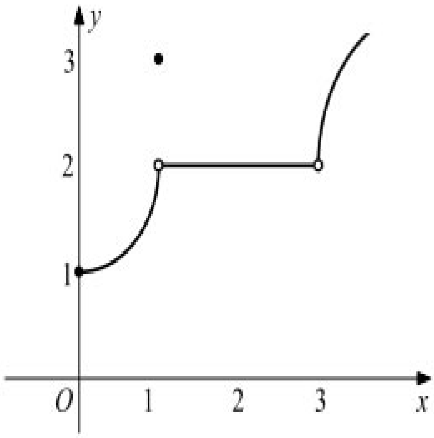
29. Να βρείτε τα όρια :

Α. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ **Β.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$ **Γ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$.

30. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων.

Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





31. **Α.** Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$xf(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 .$$

Β. Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|\,|xg(x) - \eta\mu x| \le x^2 .$$

32. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} (x-\kappa)(x+\kappa), & x \le 2 \\ \kappa x + 5 & , x > 2 \end{cases} ,$$

να προσδιορίσετε το κ , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} a^2x^2+\beta x-12, & x<1 \\ 5 & , x=1 \\ \alpha x+\beta & , x>1 \end{cases},$$

να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

33. Α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις:

$$f(0)<g(0) \text{ και } f(1)>g(1),$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=g(\xi).$$

Β. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις :

α. $\dfrac{x^4+1}{x-1}+\dfrac{x^6+1}{x-2}=0$ **β.** $\dfrac{e^x}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=0$

34. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

α. $f(x)=e^x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ **β.** $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$

35. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, όταν :

α. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-4}{f(x)}=+\infty$ **β.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x+2}=-\infty$ **γ.** $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)(3x^2-2)\right]=+\infty$

Β. 2. Ψηφιακό Βοήθημα

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

Α. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-|3-x|}}{\ln x}$ **Β.** $f(x)=\sqrt{1-3^{-x^2-2x-3}}$

2. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ **β.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x+3}$

γ. $f(x)=\log\left(|x|-3\right)$ **δ.** $f(x)=2^{x-\sqrt{x}}$

3. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

α. $f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)^{\sqrt{x}-2}$ **β.** $f(x)=\varepsilon\varphi\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ **γ.** $f(x)=\sigma\varphi\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^3+x-2 \quad \text{και} \quad g(x)=x^2+5x-6.$$

Να βρεθούν:

Α. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

Β. Τα σημεία τομής των C_f και C_g με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

Γ. Τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g.

Δ. Τα διαστήματα στα οποία η C_g είναι κάτω από τον $x'x$.

6. Α. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

Να αποδείξετε ότι $f\neq g$ και να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f=g$.

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x^2+|x|-2} \quad \text{και} \quad g(x)=\sqrt{4-x^2}\ .$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}\ .$$

7. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\ g(x)=\ln x,\ h(x)=\eta\mu x$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$gof,\ goh,\ hog\ .$$

8. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

Α. $f(x)=x^2-4x+5$ στο $\mathbb{R}$ **Β.** $g(x)=\ln x+\eta\mu(x+2)$ στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

9. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

Α. $f(x)=-3x^2+2x+1$ **Β.** $g(x)=|7-x|-10$

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{4-\sqrt{16-2x^3}}$$

Α. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την και

Β. Να προσδιορίσετε τα ακρότατά της.

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{5x}{2+|x|}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ 0]$ και $[0,+\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln x+\sqrt{e^x}+x^2$$

Α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της .

Β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2+\ln x+\sqrt{e^x}-1<\sqrt{e}\ .$$

13. Α. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ και ισχύει $f(x)>0,\ g(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x)=\frac{\ln x}{\eta\mu x}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\ \beta\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ με $\alpha<\beta$ ισχύει:

$$\alpha^{\eta\mu\beta}<\beta^{\eta\mu\alpha}$$

14. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συνάρτησεις είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού τους.

Α. $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ **Β.** $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+x^3$

15. Να εξετάσετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού τους.

Α. $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{2-x}}$ **Β.** $g(x)=|x-3|-2$ **Γ.** $g(x)=|x-1|-4x$

16. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες στο πεδίο ορισμού τους και να βρείτε την αντίστροφή τους.

Α. $f(x)=2e^{x+3}+1$ **Β.** $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{1+x}}$

17. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

Α. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{\sqrt{x^2-3}-1}$ **Β.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{9x^2-6x+1}-|x-5|}{1-|x^3+7|}$

Γ. $\lim\limits_{x\to -4}\left(2e^x\sqrt{x-5}+27\frac{|x+2016|}{x^2+2}\right)$ **Δ.** $\lim\limits_{x\to -4}\left(2e^x\sqrt{x-5}+27\frac{|x+2016|}{x^2+2}\right)$

18. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τετοια, ώστε:

$$x^5\le f(x)\le x^6+3x^4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τα όρια:

Α. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ **Β.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ **Γ.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

19. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, όταν:

A. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x}}, & x>0 \end{cases}$ **B.** $f(x)=\dfrac{|\eta\mu x|}{x}$

20. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{2ax^2+5\beta x-6}{x-3},\ a,\ \beta\in\mathbb{R}$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=14$$

A. Να αποδείξετε ότι για $x\neq 3$ είναι:

$$18a+5\beta=6\ .$$

B. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\ \beta$, για $x\neq 3$.

21. Να βρείτε τα όρια:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$ **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

22. A. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x)\ge x^3+x+1 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)\ .$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^4-x+2017\le f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xf(x)\right).$$

23. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

A. $f(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)-1, & x\ge 0 \\ x^{-1}\cdot\eta\mu x, & x<0 \end{cases}$ **B.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}, & x\in[0,1) \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases}$

24. **Α.** Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f:[-5,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x)=\sqrt{x+5}-f(x)-2 \text{ για κάθε } x\in[-5,+\infty)$$

Β. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g:\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία πληροί την επόμενη σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu x-1\le x^3-xf(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το $f(0)$.

Γ. Έστω ότι η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$. Να υπολογίσετε το $h(1)$ αν γνωρίζετε ότι ισχύει:

$$x-x^4\le(x-1)h(x)\le-3x+3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

25. **Α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln x^6=-x+6$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,\ e)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^3+x=x^2+5$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ. Αν $a\in\mathbb{R}_+^*$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$a\eta\mu x+\pi=x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\ a+\pi]$.

26. Έστω συνάρτηση $f:[0,6]\to\mathbb{R}$ **,** η οποία είναι συνεχής στο $[0,6]$ με:

$$f(0)=f(6)\textbf{.}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$g(x)=f(x+2)-f(x)$$

και να αποδείξετε ότι αυτή είναι συνεχής.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$g(0)+g(2)+g(4)=0$$

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,4)$ ώστε:

$$f(\xi+2) = f(\xi).$$

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$e^x = 1 - \ln x$$

έχει μοναδική ρίζα.

27. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$$

Α. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7,\ x \in \mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 0.$$

Γ. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

29. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να ορίσετε την f^{-1}.

30. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 2\ln\left(\sqrt{x-1} + 1\right) + 3$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Γ. Να ορίσετε την f^{-1}.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(1+x)=2.$$

31. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-3x+2$$

Α. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x\in\mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$3x2^{x}+2^{x}<1.$$

32. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=3x^{2011}+2x-5,\ x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα, τη $x=1$.

Γ. Να βρείτε το πρόσημο της f.

33. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{f(x)}=+\infty$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{4x+3}=-\infty$ **γ.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(3x+4)\right]=+\infty$

34. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,\ 8)$ και $B(5,\ 12)$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$.

Γ. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,\ 5)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$$

35. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \ln\left(3e^x + 1\right) - 2$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να ορίσετε την f^{-1}

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x\right) < f^{-1}\left(\ln 5 - 2\right) - 2 .$$

36. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = -2x^3 - 3x - 1$$

Α. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}\left(x\right) = 2 .$$

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}\left(x\right) \geq x - 1 .$$

37. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(f(x)\right) + f(x) = 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 3$$

Α. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

Β. Να βρείτε το $f(3)$.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = 3 .$$

Δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f(x)\right)+f(x)-2}.$$

38. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=2$$

Α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M\left(1,\,1\right)$.

Β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to1}\frac{\left|3f(x)-2\right|-1}{x^2-1}.$$

39. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

Δ. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to1}f(x)\ \text{και}\ \lim_{x\to-1}f(x).$$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο:

$$g\left(x\right)=\ln\frac{x+2}{2-x}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

Β. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει:

$$\left(hog\right)\left(x\right)=x.$$

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

B.3. Προτεινόμενα

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & \text{αν } x<0 \\ \lambda, & \text{αν } x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Α. Να δείξετε ότι $\kappa=2$ και $\lambda=4$.

Β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=2\ln(8x+1)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)}+f(x)=e^x+x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(\ln x)=f(1-x^2).$$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{x^2}-e^x+x^2-x>0.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3 \text{ και } g(x)=\frac{1}{x^2}+2.$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

Γ. Να ορίσετε την f^{-1} .

Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη .

Ε. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog .

4. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

Δ. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -1} f(x).$$

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x, \; x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$3^{\ln x} + 4^{\ln x} < 7 \cdot 5^{\ln x - 1}.$$

6. **Α.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2 - x}$$

Β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left|1-x^2\right| + \left|x^2-3\right| - 14}{x^2 - 2x - 3}$$

Γ. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0=1$, όπου:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x-1}}, & \alpha\nu\ x>1\\[2mm] \dfrac{x^2-x}{\eta\mu 3x}, & \alpha\nu\ x\le 1\end{cases}$$

7. Α. Αν f, g οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x}-1 \text{ και } g(x)=(x-2)^2$$

να βρείτε τα επόμενα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(fog)(x)}{x^2-1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{x}$.

Β. Να βρείτε τα α και β, ώστε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^3-\beta x^2+x-1}{x^2-x-2}=-2$$

Γ. Δίνονται οι συναρτήσεις:

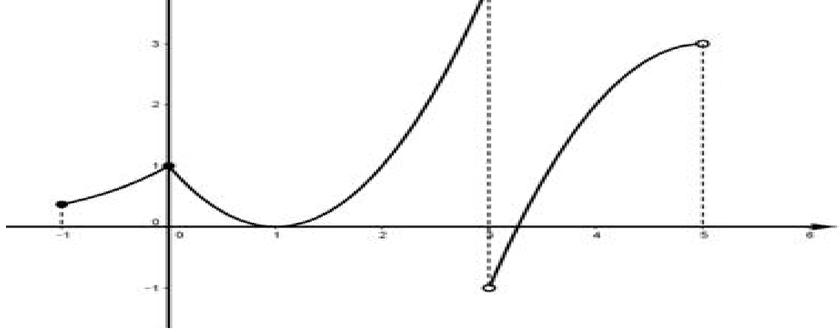
$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} g(x)$$

για όλες τις τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

8. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f



Με βάση το σχήμα να βρείτε:

Α. Το πεδίο ορισμού της. **Β.** Το σύνολο τιμών της.

Γ. Τις τιμές $f(0), f(3)$ **Δ.** Τη μονοτονία της.

Ε. Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν είναι συνεχής (*να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).*

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\alpha x-1}{x+1},\ x\neq -1,$$

όπου το a είναι ένας πραγματικός αριθμός .

Α. Να βρείτε την τιμή του a, ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(3,\ 2)$.

Αν $a=3$ τότε:

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Γ. Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3-x},\ x\neq 3.$$

Δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσων f και f^{-1}.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\ln\left(3e^{x}+1\right)-2$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να ορίσετε την f^{-1}.

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x)< f^{-1}(\ln 5-2)-2.$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(fof)(x)+2f(x)=2x+1,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\ \ \text{και}\ f(2)=5\,.$$

Α. Να βρείτε το $f(5)$.

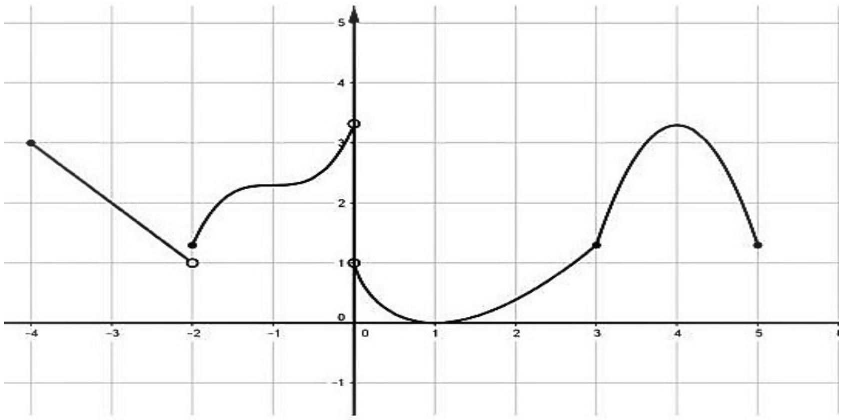
Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}\left(2x^2+7x\right)-1\right)=2\,.$$

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-4,\ 0)\cup(0,\ 5]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

Β. Να βρείτε το όρια:

$$\textbf{α.}\ \lim_{x\to -2^-} f(x)\ \ \text{και}\ \ \textbf{β.}\ \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

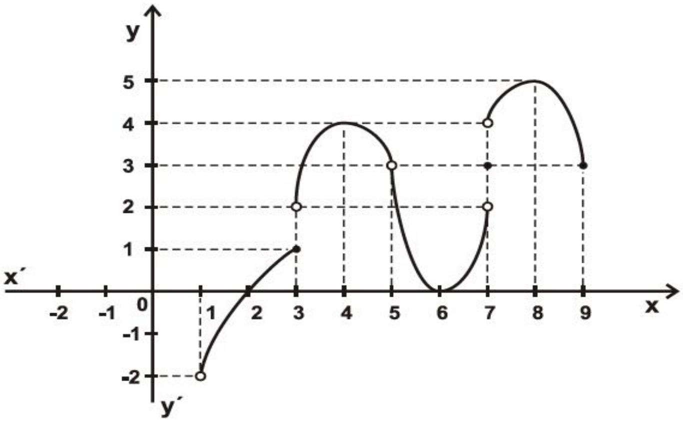
Γ. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x)=x+1$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog .

β. Να εξηγήσετε πως με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης fog .

13. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

Β. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14. Έστω f συνεχής στο $[a,\beta]$ και έστω $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^{+}$ με $\alpha \neq \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in [a,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$af(a) + \beta f(\beta) = (\alpha + \beta) f(c)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,\ 1]$, για την οποία ισχύει:

$$x^2 + f^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in [-1,\ 1].$$

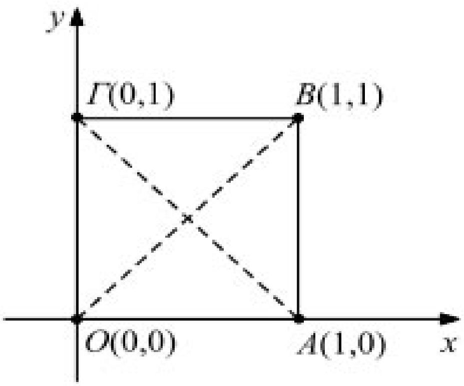
Α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,\ 1)$.

Γ. Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

Δ. Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

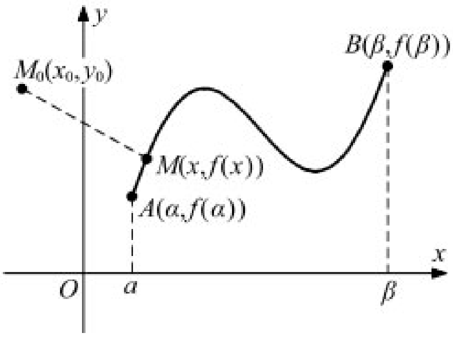
2. Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ του επόμενου σχήματος και μία συνεχής στο $[0,\ 1]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.



Α. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

Β. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.

3. Στο επόμενο σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $[a,\ \beta]$ και το $M_0(x_0,\ y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου.



Α. Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $dx=(M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0,\ y_0)$ από το σημείο $M(x,\ f(x))$ της C_f για κάθε $x\in[a,\ \beta]$.

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[a,\ \beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

4. **Α.** Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)$ **β.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$

Β. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x\right)$$

να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

5. Να αποδείξετε ότι:

Α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ ειναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Β. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Γ. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x)\geq 0$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ.

6. Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$, για την οποία ισχύει:

$$x^2+f^2(x)=1 \text{ για κάθε } x\in[-1,1]$$

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

β. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

γ. Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

Β. Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)=x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

7. Να βρείτε τα όρια :

α. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\nu+1}-(\nu+1)x+\nu}{x-1}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$

8. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

α. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x^2+10x+25}}{|x+5|}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$

γ. $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \ \text{και} \ \lim_{x\to 0} g(x)$$

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-ax+\beta\ ,$$

να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\ .$$

Γ.2. Ψηφιακό Βοήθημα

1. Α. Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f(x)=2+x,\ x\in\mathbb{R} \text{ και } \left(gof\right)(x)=1-x^2,\ x\in\mathbb{R} .$$

Β. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$\left(gof\right)(x)=3x+2,\ x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\} \text{ και } g(x)=\frac{x+2}{x-2},\ x\neq 2 .$$

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση. Αν η C_f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία με τετμημένη -2 και τεταγμένη 1 αντίστοιχα.

Α. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

Β. Αν g γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, να εξετάσετε την μονοτονία της gog και της fog.

3. Έστω συνάρτηση:

$$f(x)=-2x^7-3x+5 \text{ με } D_f=\left[0,+\infty\right).$$

Α. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία.

Β. Να απδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x^2+\frac{3}{4}\right)>0 \text{ στο } \left[0,+\infty\right).$$

4. Α. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^5(x)-e^x=2-f^3(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

Να απδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$g(x)+e^{\frac{x}{3}-2}=(gog)(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

Να εξετάσετε αν η g είναι «1-1».

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=3+\sqrt{x-3}$$

Α. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

Β. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f,\ f^{-1}$.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=f^{-1}(x)\ .$$

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln(x-1)-3$$

Α. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

Β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f,\ f^{-1}$, και με την βοήθεια αυτών να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=f^{-1}(x)\,.$$

7. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία $A(2,5)$ και $B(3,2)$

Α. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης

Β. Να βρείτε τους αριθμούς $f^{-1}(5)$ και $f^{-1}(2)$.

Γ. Να λυθεί η ανίσωση :

$$f^{-1}(3+f(x^2+2x))>2$$

8. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^5+x^3+x-3$$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».

Β. Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^5+x^3+x=3\ .$$

Γ. Να λυθεί η ανίσωση:

$$e^{5x}+e^{3x}+e^{x}<3\ .$$

9. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\left(f(x)\right)+f^3(x)=2x+3,\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(2x^3+x\right)=f(4-x)$$

10. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2+2ax+\beta+2}{x^2-1}$$

Αν το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$, να βρείτε τα $a,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases}2ax^2-\beta x+2, & x\le -1\\ -3\alpha x+2\beta+6, & x>-1\end{cases}$$

Να βρείτε τα $a,\ \beta\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=3$.

11. **Α.** Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν :

$$\lim_{x\to 2}\left[-2f(x)+3g(x)\right]=2 \text{ και } \lim_{x\to 2}\left[5f(x)-7g(x)\right]=-4,$$

να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 2} f(x),\ \lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Β. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν :

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3,\ \lim_{x\to 2}\left[g(x)\left(x^3-8\right)\right]=4,$$

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$.

Γ. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R} \text{ και } 4f^3(x)+xf^2(x)-2x^2f(x)=3x^3 .$$

Να βρείτε το a και το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

12. Α. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$ και τέτοια ώστε:

$$\left| \frac{xf(x)}{2+\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu(x+x^2) \right| \le x^4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε την τιμή $f(0)$

Β. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = 0$ και τέτοια ώστε:

$$f(x-3y) = f(x)\cdot f(3y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} .$$

α. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = \alpha$ και τέτοια ώστε:

$$f(x\cdot y) = f(x) + f(y) + 2 \text{ για κάθε } x, y \in (0,+\infty) .$$

Α. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

Γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

14. Α. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x) + f(x+3) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,3]$, ώστε να ισχύει $f(x_0) = f(x_0+2)$.

Β. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{e}{x-1}$$

ορισμένη στο $[2,5]$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2011 + f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $[2,5]$.

Γ. Αν $a,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, ώστε:

$$\eta\mu^2(x_0 + 2\beta) + \eta\mu^2(x_0 + 3\gamma) = \sigma\upsilon\nu^2(x_0 + a) + \frac{1}{2}$$

15. Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x(e^x+3)+2e^x}{x(x+2)}=\frac{e^{-x}-1}{x-1}$$

έχει δύο τουλάχιστον ετερόσημες ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-2,-1)$

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε:

$$\frac{g(\rho_1)}{\rho_2}=\frac{g(\rho_2)}{\rho_1},$$

όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του προηγουμένου ερωτήματος.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{x}-e^x, x\in(-\infty,\ 0)\ .$$

Α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2xe^x-x-2=0$$

έχει μοναδική αρνητική ρίζα.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2xe^x=2-x$$

είναι αδύνατη, στο $(-\infty,0)$.

17. Α. Έστω η συνάρτηση $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(-1,2)$, ώστε:

$$f(x_0)=\frac{2f(-1)+f(0)+3f(2)}{6}$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και x_1, $x_2[a,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[a,\beta]$, ώστε:

$$3f(x_1)+f(x_2)=4f(x_0)\ .$$

18. Α. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε:

$$f^5(x)+2f^3(x)+f(x)=xe^x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

Β. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε:

$$f^2(x)+(x+1)\cdot f(x)+e^{2x}=3e^x\cdot f(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln(x+1)=f(0)-x^2$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad .$$

19. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R}^*$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$, τότε:

Α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$).

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Δ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2=e^{-x-1},\ x\in\mathbb{R}^*$$

20. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,\ -1)$.
- $\rho_1=-1$ και $\rho_2=5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x)=0$.

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Β. $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,\ 5)$

Γ. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = -\infty$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,\ +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1.$$

Α. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$,η εξίσωση:

$$f(x) = a$$

έχει μοναδική ρίζα

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}.$$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Β. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 0.$$

Δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

23. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,\ 0)$ και $B(2,\ 3)$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(2e^x+1\right)=3.$$

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(3x+5\right)\le 0.$$

24. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,\ 3]$ για την οποία ισχύει:

$$3x^2+4f^2(x)=27 \text{ για κάθε } x\in[-3,\ 3].$$

Α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,\ 3)$.

Γ. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Δ. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}.$$

25. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}+3 \text{ για κάθε } x>0.$$

Να βρείτε:

Α. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}$

Β. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}x^7\eta\mu\dfrac{2}{x}$.

Γ. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Δ. Το $f(0)$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left(fof\right)(x)+2f(x)=2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(2)=5.$$

Α. Να βρείτε το $f(5)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}\left(2x^2+7x\right)-1\right)=2.$$

27. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)=a^{2x}+2a^x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^*.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Β. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x},\ a<2.$$

Δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x},\ a>3.$$

28. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2} \text{ και } \frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}.$$

Β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Γ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}.$$

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)-\xi=0.$$

29. **Α.** Αν είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-4}{x}=2,$$

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Γ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2 x+x^2 g(x)}.$$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3f(x)+2f^3(x)=4x+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

Β. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x$.

Δ. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f\left(2e^{x-1}\right)=f\left(3-x\right)$$

31. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x+1}-1 \text{ και } g(x)=2-x.$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Β. Να ορισθεί η συνάρτηση fog .

Γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Δ. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $fofog$.

32. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ \lambda, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$$

Α. Να βρείτε τα κ,λ.

Β. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Γ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=2\ln(8x+1)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

33. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,2) \\ \dfrac{\kappa x+1}{2(x^2-4)}, & x\in(2,+\infty) \end{cases}$$

και η $g:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\cdot g(x)+2x}{3x}=5 \text{ και } g(x+3)=g(x)+f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε:

Α. Το κ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Β. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Γ. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Δ. Το όριο $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

Γ.3. Προτεινόμενα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)+1} \text{ και } g(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f,g

Β. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$f+g \text{ και } \frac{f}{g}$$

Γ. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$fog \text{ και } gof$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x}$$

Α. Να εξετάσετε σε ποιο σύνολο οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες.

Β. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Γ. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

3. Δίνεται μία ορισμένη και συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[1,10]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,10]$ τέτοιο, ώστε:

$$3f(2)+5f(6)+4f(9)=12f(\xi)$$

4. Αν $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής , να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $\xi\in[0,2]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f(0)}{2}+\frac{f(1)}{3}+\frac{f(2)}{6}$$

5. Αν $f:[1,4]\to\mathbb{R}^*$ συνεχής με:

$$f(1)\cdot f(2)\cdot f(4)=8,$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in[1,4]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi$.

6. Αν f συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2,x_3\in[a,\beta]$ υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\sqrt[3]{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)}$$

7. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

Α. $f(x)=x^5+3x^3+1, x\in\mathbb{R}$ **Β.** $g(x)=\sigma\upsilon\nu x-2x,\ x\in[0,\pi]$

8. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x)=\ln x+e^{x-2}-2016$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$2\xi\ln\xi=2-3\xi$$

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(1)=\frac{1}{2},\ f(x\cdot y)=f(x)\cdot f\left(\frac{3}{y}\right)+f(y)\cdot f\left(\frac{3}{x}\right),\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x,y\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(3)=\dfrac{1}{2}$ **β.** Η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) = f\left(\dfrac{3}{x}\right),\ x \neq 0$ **β.** $f(x \cdot y) = 2f(x) \cdot f(y)$

Γ. Να βρείτε τη συνάρτηση f **.**

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και περιττή με $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με αντίστοιχες εταγμένες 1 και -1.

12. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f:[-2,1] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2x^2 - 3\eta\mu\frac{\pi x}{2} - 5\sigma\upsilon\nu^2(\pi x) + 4$$

μπορεί να πάρει τις τιμές $0,\ -1,\ 2,\ \sqrt{5}$.

13. Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2 + 1 = \frac{100}{x^4 + \eta\mu x + 1}$$

έχει τουλάχιστον 2 λύσεις.

Β. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$e^x = |P(x)|$$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση.

14. Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Β. Η f είναι περιττή.

Αν επιπλέον η f έχει μοναδική ρίζα το 0, να αποδείξετε ότι:

Γ. Η f είναι συνάρτηση «1-1»

Δ. $f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(x+y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

15. Δίνεται η γνησίως μονότονη και συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\ ,\ f(2)=3$$

και η γραφική παράσταση της διέρχεται από το σημείο $A(-2,-1)$.

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(-e^x)-x\right)=3$$

έχει μοναδική ρίζα .

Β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f^{-1}(\eta\mu x)-4\right)<-1.$$

16. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{3f(x)}+f^3(x)=x^3\cdot e^6+(\ln x+2)^3\ ,\ \text{για κάθε } x>0$$

Α. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Β. Να ορίσετε την αντίστροφη της f .

17. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)\cdot 2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

στο διάστημα $[-2,\ 2]$ παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ $f(-2)$ και $f(2)$ αν και είναι ασυνεχής.

18. Να δείξετε ότι:

Α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Β. Αν δύο συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Γ. Αν δύο συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x)\geq 0$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$,τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f,g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.2. Ψηφιακό βοήθημα

1. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει:

$$(fof)(x)=-x \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση f είναι «1-1».

Β. Η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Γ. Η συνάρτηση f είναι περιττή.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \text{ .}$$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Γ. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

4. Α. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x^{2011}}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$$

Β. Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left|f(x)-\eta\mu x\right|\le 1-\sigma\upsilon\nu 2x,$$

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

5. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$x-1\le f(x)\le|x-1| \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=l,\ l\in\mathbb{R}$ να βρείτε:

Α. το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **Β.** το l

6. Α. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x)=\frac{|x^5-7|-7}{x}$$

και πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0\ .$$

Β. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{|x^5-7|}{x}\cdot f(x)\right]=0$$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x^2-2x^2}$$

και πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}^*$

Να βρείτε τα όρια:

Α. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **Β.** $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$

8. Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ γα την οποία ισχύει:

$$x^2+2f^2(x)=2 \text{ για κάθε } x\in\Delta=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$$

Α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x)=0 \text{ στο διάστημα } \Delta$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

αν $f(0)=1$

Γ. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

Δ. Να γίνει η γραφική της παράσταση.

9. Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,3]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(1)+2f(2)=3f(\xi)$$

10. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:(1,2)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-3}{x-2}=2 \text{ και}$$

$$2\eta\mu(x-1)\le(x-1)\cdot f(x)\le x^2-1 \text{ για κάθε } x\in(1,2) \text{ .}$$

Α. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$h(x)=f(x)-\frac{1}{x-1}+1 \text{ .}$$

Γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)+1}$$

έχει με την ευθεία $\varepsilon: \ y=x-1$ μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)-2f(x)=x^2-2x+3 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=-1.$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η εξίσωση $f(0)=0$ είναι αδύνατη.

Β. $f(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ. Η ευθεία $y=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,3)$.

12. Για τις συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι η σύνθεση fog είναι «1-1»

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1».

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$g\left(f(x)+x^3\right)=g\left(f(x)+3x-1\right)$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες θετικές και μια ρίζα αρνητική.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=3\ln 2x+e^{3x}+4x-2$$

Α. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f.

Β. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=e^{\frac{3}{2}}$$

Δ. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu-3\ln\left(2\mu^2+2\right)-4\left(\mu^2+1\right)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu$$

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

$$\left|3\eta\mu x-2xf(x)\right|\le\frac{1}{2}x^2, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$

Β. Να βρείτε το $f(1)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,\ 1)$.

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x)+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-\lambda \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \ (1)$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

Α. Να βρείτε τα κ και λ

Β. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=1$ να βρείτε την f.

Γ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

16. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\frac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Δ.3. Προτεινόμενα

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \frac{1}{x},\ x \geq 1$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(f(x)) = \frac{5}{2}.$$

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

Δ. Αν $1 \leq a \leq \beta$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^{2016}+1}{\alpha^{1008}} + \frac{\beta^{2018}+1}{\beta^{1009}} \geq 4$$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x + 1,\ x \geq 0$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x^2 - 4) = f^{-1}(3)$$

Γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Δ. Αν $0 \leq a \leq 1$, να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(\frac{1-a}{a}\right)^5 + \frac{1-a}{a} + (x-1-a)^2 = 0$$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x + x,\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

4. Δίνεται συνάρτηση f με:

$$(fof)(x) = x+2,\ x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + 2ax + 2a^2,\ x \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει ελάχιστο το $f(-1)$.

Α. Να βρείτε το a.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\eta\mu x\right) + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \text{ στο διάστημα } (0,\ 2\pi)$$

Για $a=1$,

- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις της f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

6. Δίνεται η «1-1» συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f\left(\mathbb{R}\right) = \left(0, +\infty\right)$,
- $f(x) \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f^{-1}(x) \geq 2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2x}$ για κάθε $x > 0$

Α. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xe^x + \text{συνx}}{e^{-f(x)} + 1}$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to 1} f^{-1}(x) = f^{-1}(1)$$

7. ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ (που μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις αφού πρώτα αποδειχθεί).

«Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και οι γραφικές παραστάσεις C_f, $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f, f^{-1} τέμνονται , *τότε τα κοινά τους σημεία βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$.*

Απόδειξη

Έστω ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, $C_{f^{-1}}$ *των συναρτήσεων* f, f^{-1} τέμνονται στο σημείο $M(\kappa, \lambda)$ το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία $y = x$, δηλαδή $\kappa \neq \lambda$. Ακόμα έχουμε $f(\kappa) = \lambda$ (1) , $f^{-1}(\kappa) = \lambda \Leftrightarrow f(\lambda) = \kappa$ (2), αφού το σημείο Μ είναι κοινό σημείο της C_f, $C_{f^{-1}}$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\kappa > \lambda$, τότε έχουμε διαδοχικά:

  $\kappa > \lambda \Rightarrow f(\kappa) > f(\lambda) \Rightarrow \lambda > \kappa$, που είναι άτοπο.

- Αν $\kappa < \lambda \Rightarrow f(\kappa) < f(\lambda) \Rightarrow \lambda < \kappa$, που είναι άτοπο.

Επομένως $\kappa = \lambda$ και άρα το κοινό σημείο Μ των C_f, $C_{f^{-1}}$ ανήκει στην ευθεία $y = x$.

Άρα αν μας ζητείται να βρούμε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ (Ι) (αν έχουμε βρει την $f^{-1}(x)$). Αν όμως έχουμε (ή μπορούμε να αποδείξουμε) ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της , τότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$f(x) = x, \ (x \in D_f \cap D_{f^{-1}})$$

που πιθανόν να είναι πιο εύκολη από την (Ι) για να βρούμε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ χωρίς να βρούμε την f^{-1}.

8. ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ (που μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις αφού πρώτα αποδειχθεί).

«Αν $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο Α, τότε η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο $f(A)$.»

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α. Έστω $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Έστω ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια, ώστε:

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \ .$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε διαδοχικά:

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Rightarrow f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Rightarrow y_1 \geq y_2 \ ,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως:

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

και άρα η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η περίπτωση που η $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α (τότε και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(A)$.

Η πρόταση αυτή ενδεχομένως να μας χρειαστεί όταν μας ζητείται η μονοτονία της f στο Α και είναι δύσκολη (ή και αδύνατη) η κατασκευή με τις ανισότητες. Τότε πιθανόν η εύρεση της μονοτονίας της αντίστροφης στο $f(A)$ να είναι ευκολότερη.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+2f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την αντίστροφή της **(προσέξτε το σημείο αυτό στη λύση).**

ΛΥΣΗ

i. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ (1). Είναι $f^3\left(x_1\right) = f^3\left(x_2\right)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$f^3\left(x_1\right) + 2f\left(x_1\right) = f^3\left(x_2\right) + 2f\left(x_2\right) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1» και επομένως η f αντιστρέφεται.

ii. Αφού η δοθείσα σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτουμε όπου x το $f^{-1}\left(x\right)$ και έχουμε:

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3 + 2f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(x\right) \Leftrightarrow x^3 + 2x = f^{-1}\left(x\right) \ (3)$$

Άρα η συνάρτηση $f^{-1}\left(x\right) = x^3 + 2x, x \in \mathbb{R}$ (Ι) είναι η αντίστροφη της f; Όχι διότι η σχέση (3) ισχύει μόνο για κάθε $x \in f\left(A\right)$ και όχι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (είναι πιθανή αντίστροφη της f).

Άρα οφείλουμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $g(x) = x^3 + 2x$ να αποτελεί την αντίστροφη της f.

Αν $y_o \in \mathbb{R}$, τότε αν $x_0 = 2y_0 + y_0^{\ 3}$ έχουμε διαδοχικά:

$$f^3\left(x_0\right) + 2f(x_0) = x_0 = 2y_0 + y_0^{\ 3}$$
$$f^3\left(x_0\right) + 2f(x_0) - 2y_0 - y_0^{\ 3} = 0 \Leftrightarrow \left(f(x_0) - y_0\right)\left(f^2\left(x_0\right) + f\left(x_0\right)y_0 + y_0^{\ 2} + 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) = y_0$$

Επομένως:

$$f^{-1}\left(x\right) = x^3 + 2x,\ x \in \mathbb{R}$$

είναι η αντίστροφη της f.

10. Αν για τη συνάρτηση $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)\ f(x) + \text{ημ}\dfrac{\pi x}{4}}{(x-2)^2} = 2,$$

να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x)+f(x)+2x=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Δ. Να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$,ώστε:

$$f^{-1}\left(f(-34)-x^2\right)>0$$

Ε. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M\left(x,y\right)$ για τα οποία ισχύει:

$$f\left(x^2-2x\right)+f(y^2-2y)=0\ ;$$

12. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε να ισχύει:

$$f^2(x)-x^2f(x)=x^2+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

13. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x}{x-x^2}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Β. Να ορίσετε τη συνάρτηση $fofof$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Δ. Έστω $x>1$ και το σημείο $A(1,0)$. Να βρε΄τε σημείο της γραφικής παράστασης της f, ώστε η απόσταση (AM) να είναι η ελάχιστη.

Ε. Να βρείτε συνάρτηση g ορισμένη στο $A=\mathbb{R}-\left\{0,1\right\}$ για την οποία ισχύει:

$$g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x-1}{x}, \text{ για κάθε } x\in A.$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

Α. Ψηφιακού Βοηθήματος

1^{ο}

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\ \beta]$. Αν:

♦ η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και

♦ $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\ \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2. 1) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα .

Μονάδες 3

2) Πότε μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν $f,\ g,\ h$ είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ. Μία συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x)+1}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(g\left(x^3+1\right)\right) = f\left(g\left(4x^2+2x\right)\right)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Μονάδες 10

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(fog)\left(x^3+4\right) > (fog)\left(3x^2\right).$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(e^x - 1\right) - x$$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν είναι:

$$h(x) = \ln\frac{1}{x},$$

να αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = h(x_0)$.

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$.

Μονάδες 4

2^{ο}

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο:

$$P(x)=a_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$ με $x_0\in\mathbb{R}$.

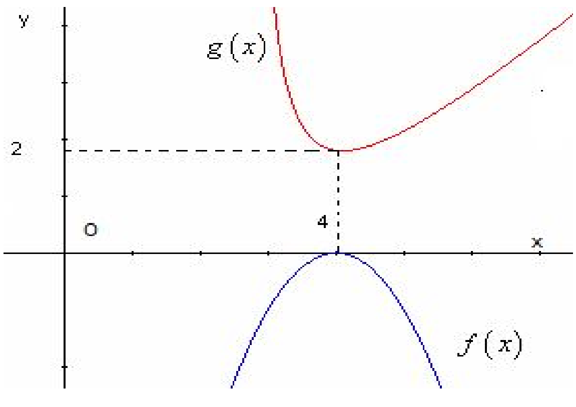
Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Δίνεται το παρακάτω σχήμα, τότε $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.



β. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Η f είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

δ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,\ 4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$.

ε. Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^{-1}(-2015)=4\ ,\ f^{-1}(1949)=-1\ ,$$

τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R},$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x\ .$$

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τα όρια:

$$\textbf{α)}\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x} \quad \text{και} \quad \textbf{β)}\ \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 2+\ln^2 x, & 0<x\le e \\ ax+\ln(x-e+1), & e<x \end{cases}$$

α. Να βρείτε τον αριθμό $a \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Αν $a = \frac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,\ 2e)$.

Μονάδες 5

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$f\left(e^{f(x)}\right) = 4\ln x + 3$, για κάθε $x > 0$ και $(fof)\left(e^{f(x)}\right) = \ln\left(\ln x^4 + 3\right)^2 + 1$,

για κάθε $x > e^{-\frac{3}{4}}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(fof)(x) = f\left(e^{x-2014}\right)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0,\ +\infty)$.

Μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f\left(-x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\ \beta$ ισχύει:

$$\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β. Προτεινόμενα

1ο

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Πότε μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1» ;

Μονάδες 8

Α.2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 7

Α.3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση f που είναι «1-1» σε ένα διάστημα Δ είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ.

β. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f: A \to \mathbb{R}$, τότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f.

γ. Αν μία συνάρτηση είναι «1-1» τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

δ. Αν για μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ισχύει $-2015 \le f(x) < 2015$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2015 και ελάχιστη τιμή το -2015.

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ των αξόνων $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 5Χ2=10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,-2)$. Αν για την συνάρτηση f ισχύει:

$$f(x)=\ln x-g(x) \text{ για κάθε } x>0$$

Β.1 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$.

Μονάδες 10

Β.2 Να λύσετε την ανίσωση:

$$2\ln x<2+g\left(x^2\right)$$

στο $(0,\ +\infty)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f\left(1+f(x)\right)=2x-6+f(x)\ (1),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f αντιστρέφεται. **ii.** $f(3)=2$

Μονάδες 8+7

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(1+f\left(x^2+x+1\right)\right)=f\left(1+f(3)\right)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f\left(x-y\right)=f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Δ.1 Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ ή $f(0)=1$.

Μονάδες 7

Δ.2 Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την συνάρτηση f .

Μονάδες 8

Δ. 3 Αν $f(0) \neq 0$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

2ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 6

Α3. Εξετάστε αν ο επόμενος ισχυρισμός-πρόταση είναι *Αληθής* ή *Ψευδής.*

«Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη».

Στην περίπτωση που η πρόταση είναι αληθής να την αποδείξετε ενώ αν είναι Ψευδής να δώσετε αντιπαράδειγμα. Ισχύει το αντίστροφο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$, τότε κατ΄ανάγκη $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

β. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ «κοντά» στο $x_0\in\mathbb{R}$.

δ. Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[a,\beta\right]$, τότε η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $\left[a,\beta\right]$.

ε. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $\left[a,\beta\right]$ και έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\alpha,\beta\right)$ ισχύει $f\left(\alpha\right)\cdot f\left(\beta\right)<0$ **.**

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-x}$$

Μονάδες 8

Β2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left|1-x^2\right|+\left|x^2-3\right|-14}{x^2-2x-3}$$

Μονάδες 8

Β3. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0=1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x-1}}, & \alpha\nu\ x>1\\[2mm] \dfrac{x^2-x}{\eta\mu 3x}, & \alpha\nu\ x<1\end{cases}$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν $f,\ g$ οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x}-1 \quad \text{και} \quad g(x)=(x-2)^2,$$

να βρείτε τα επόμενα όρια:

α. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(fog)(x)}{x^2-1}$ **β.** $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f^{-1}(x)-1}{x+2}$

Μονάδες 4x2=8

Γ2. Να βρείτε τα α και β ώστε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax^3-\beta x^2+x-1}{x^2-x-2}=-2$$

Μονάδες 9

Γ3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια:

$$\lim_{x\to 1}f(x) \ \text{και} \ \lim_{x\to 0}g(x)$$

Μονάδες 4x2=8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-2xy\text{, για κάθε } x,y\in(0,\infty)$$

$$f(x)>0\text{, για κάθε } x\in(0,\infty) \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\beta>0$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές:

$$f(0),\ f(1),\ f(2).$$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1».

Μονάδες 8

Δ3. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x^2)}{x^2}, & \alpha\nu\ x>0\\ \beta, & \alpha\nu\ x=0\\ x^5\eta\mu\dfrac{2015}{x^{2015}}-a, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$$

, να βρείτε το α και το β, ώστε η g να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

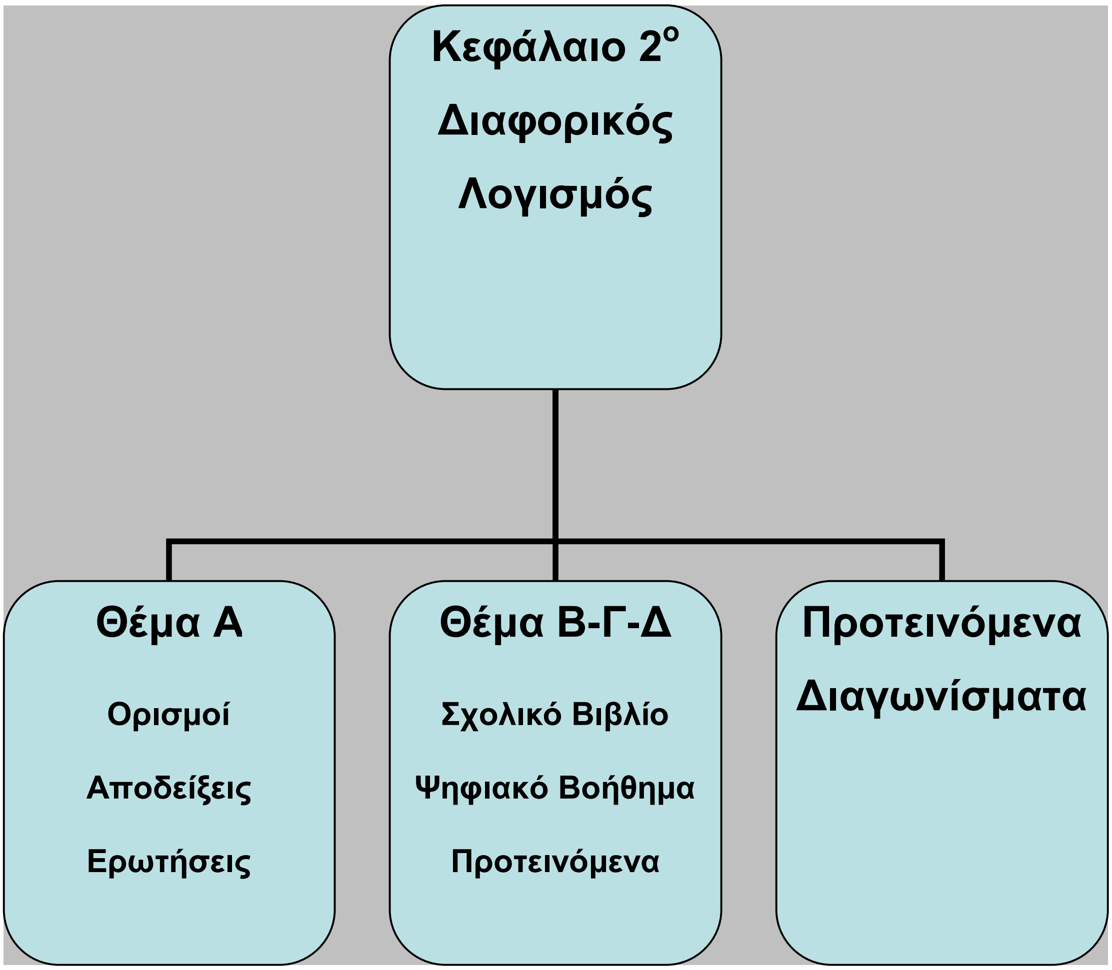
Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$xf(x+1)=(x+1)f(x)$$

έχει μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 6


Κεφάλαιο 2ο
Διαφορικός
Λογισμός
Θέμα Α
Ορισμοί
Αποδείξεις
Ερωτήσεις
Θέμα Β-Γ-Δ
Σχολικό Βιβλίο
Ψηφιακό Βοήθημα
Προτεινόμενα
Προτεινόμενα
Διαγωνίσματα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Οι πιο σημαντικοί ορισμοί

1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A\big(x_0, f(x_0)\big)$;

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

3. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0, όταν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0;

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

5. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

6. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ΄ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι:

α. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο *Δ;*

β. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο *Δ;*

7. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

8. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

9. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; (αντιστοίχως στο $-\infty$);

10. Πότε λέμε ότι ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Α.2. Διατυπώσεις -Γεωμετρικές Ερμηνείες Θεωρημάτων και Προτάσεων

1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

4. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital.

Α.3. Θεωρήματα και Προτάσεις για απόδειξη

1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

2. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

3. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu},\ \nu\in\mathbb{N}\text{-}\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή:

$$\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}.$$

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x},\ x>0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

7. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(f+g\right)'\left(x_0\right) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

8. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$\left(x^{-\nu}\right)' = -\nu x^{-\nu-1}.$$

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = \mathbb{R} - \left\{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\right\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή:

$$\left(\varepsilon\varphi x\right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

10. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει:

$$f'(x) = \alpha x^{a-1}, \text{ δηλαδή } \left(x^a\right)' = \alpha x^{a-1}.$$

11. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = a^x \ln a, \text{ δηλαδή } \left(a^x\right)' = \alpha^x \ln a.$$

12. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}.$$

13. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

14. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c\,.$$

15. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η
  f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

16. Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

17. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα $(\alpha,\ \beta)$ με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Να αποδείξετε ότι:

α. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

β. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ. Αν $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο $(\alpha,\ \beta)$.

Α.4. Ερωτήσεις Αντικειμενικού τύπου

Σχολικού Βιβλίου

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

Ι.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,\ 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$. Α Ψ

2. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[a,\ \beta]$ με $f(\beta) < f(a)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$. Α Ψ

3. Αν οι $f,\ g$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[a,\ \beta]$, με: Α Ψ

$$f(a) = g(a) \text{ και } f(\beta) = g(\beta),$$

τότε υπάρχει $x_0 \in (a,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

4. Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α. το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. Α Ψ

β. το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. Α Ψ

5. α. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

β. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

6. Η συνάρτηση: Α Ψ

$$f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \text{ με } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

7. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = fog$ έχει στο x_0 σημείο καμπής. Α Ψ

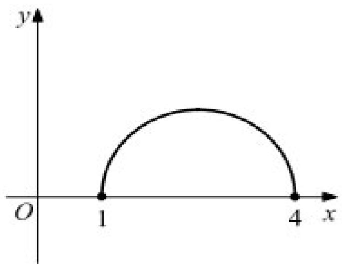
8. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. Α Ψ

9. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

α. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ Α Ψ

β. $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$ Α Ψ

10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα,



τότε:

α. το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $(1,\ 4)$. Α Ψ

β. το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $[1,\ 4]$. Α Ψ

γ. $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\ 4)$. Α Ψ

δ. υπάρχει $x_0 \in (1,\ 4)$: $f'(x) = 0$. Α Ψ

11. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$ έχει:

α. μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,\ 1)$. Α Ψ

β. μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1,\ 0)$. Α Ψ

γ. τρεις πραγματικές ρίζες. Α Ψ

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις ισχύουν: Α Ψ

$f(0)=4,\ f'(0)=3,\ f'(5)=6,\ g(0)=5,\ g'(0)=1,\ g'(4)=2$,

τότε:

$$(fog)'(0)=(gof)'(0).$$

ΙΙ.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **Β.** $\dfrac{4}{3}$ **Γ.** $\sqrt{3}$ **Δ.** 0 **Ε.** $\dfrac{3}{4}$

2. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α. $\dfrac{1}{x^2}$ **Β.** $-\dfrac{2}{x^2}$ **Γ.** $-\dfrac{1}{x^2}$ **Δ.** $-\dfrac{2}{x}$ **Ε.** 0

3. Αν $f(x)=5^{3x}$, τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α. $3x5^{3x-1}$ **Β.** $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ **Γ.** $3\cdot 5^{2x}$ **Δ.** $3\cdot 5^{3x}$ **Ε.** $5^{3x}\cdot\ln 125$

4. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$, τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

Α. $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ **Β.** $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Γ. $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ **Δ.** $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

5. Αν $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$, τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α. 1 **Β.** -1 **Γ.** 0 **Δ.** 27 **Ε.** Δεν υπάρχει

6. Αν οι εφαπτομένες των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

Α. 0 **Β.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** 2

7. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{ax}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

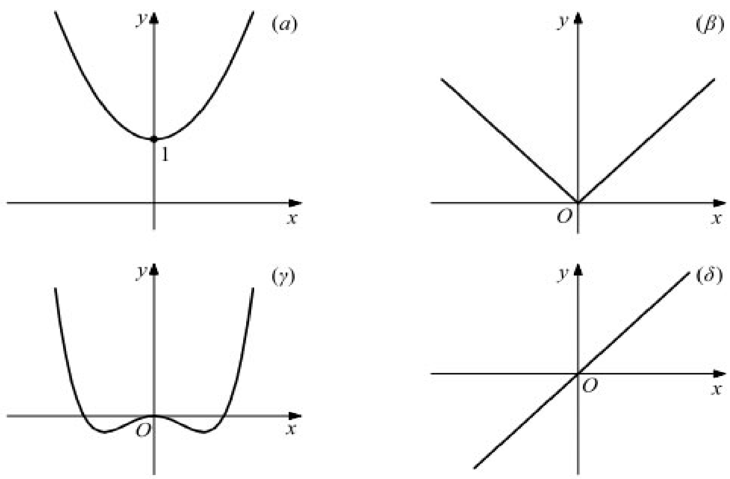
Α. $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ **Β.** $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ **Γ.** $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$ **Δ.** $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ **Ε.** $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$

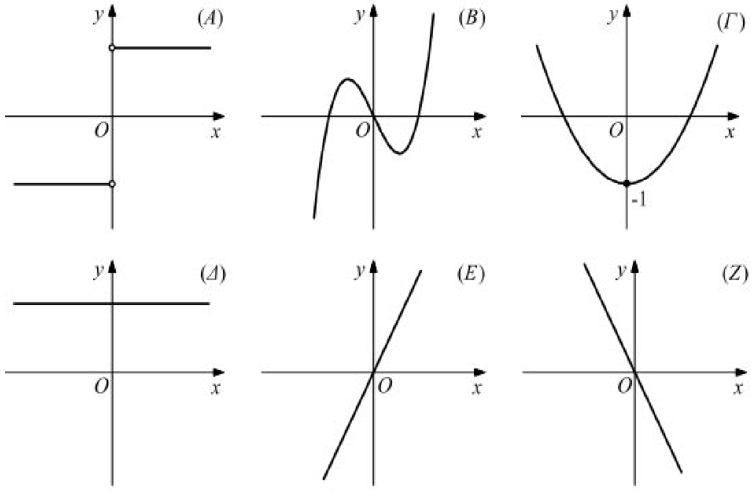
8. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,\ 1]$ και $f(0)=0$, τότε:

Α. $f(1)=-1$ **Β.** $f(-1)>0$ **Γ.** $f(1)>0$ **Δ.** $f(-1)=0$

ΙΙΙ.

1. *Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.*





2. *Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο* $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ
1. $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$	**Α.** $y=2$
2. $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x}$	**Β.** $y=x-1$
3. $f(x)=2+\dfrac{3}{x-2}$	**Γ.** $y=-x+1$
	Δ. $y=x$
	Ε. $y=-x$

Ψηφιακό Βοήθημα

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

2. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)\neq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι «1-1» στο Δ.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0\in\Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f.

4. Αν $f(x)=a^x$, $a>0$, τότε $f'(x)=a^x$.

5. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

6. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

7. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha,\beta]$.

8. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$.

9. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

10. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$ στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε κατ' ανάγκη έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

11. Ανάμεσα σε δυο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

12. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχή σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι «1-1» στο Δ.

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f'(x)=x\cdot\left(x-1\right)^2\cdot\left(x-2\right),$$

τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=0$ τοπικό μέγιστο.

14. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f'(x)=x\cdot\left(x-1\right)^2\cdot\left(x-2\right),$$

τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=1$ τοπικό μέγιστο.

15. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f'(x)=x\cdot\left(x-1\right)^2\cdot\left(x-2\right),$$

τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=2$ τοπικό ελάχιστο.

16. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

17. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

18. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο σημείο x_0, αλλά δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

19. Αν για μια συνάρτηση f και για ένα σημείο $x_0\in D_f$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

20. Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

21. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f κυρτή στο Δ, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

22. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

23. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε $f''(x_0) = 0$.

24. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, δεν έχουν ασύμπτωτες.

25. Αν για τη συνεχή και δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

26. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (a, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β, το $f(\beta)$.

27. Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ με } P(x), Q(x) \text{ πολυώνυμα βαθμού } \nu \geq 1$$

και $Q(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου ο βαθμός του αριθμητή ισούται με το βαθμό του παρονομαστή. Τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. *Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της από τη στήλη Β.*

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\eta\mu 2x$	α) $\eta\mu(2x)$
2) $\eta\mu^2(x)$	β) $2\sigma\upsilon\nu(2x)$
3) $\eta\mu(x^2)$	γ) $\sigma\upsilon\nu(x^2)$
4) $\eta\mu^3(x)$	δ) $2x\sigma\upsilon\nu(x^2)$
	ε) $3\eta\mu^2(x)$
	στ) $3\eta\mu^2(x)\sigma\upsilon\nu(x)$

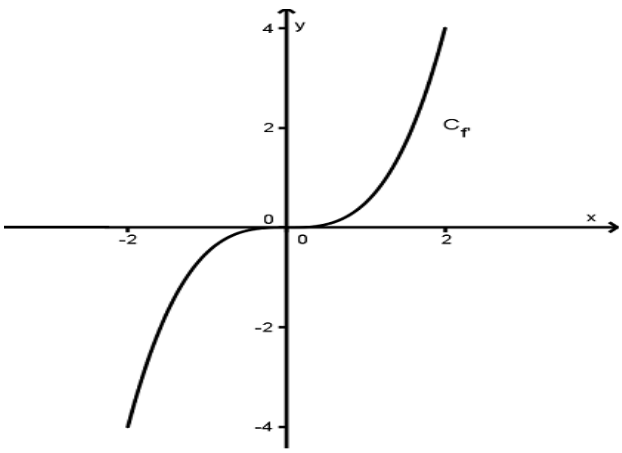
2. *Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την ασύμπτωτή της στο* $+\infty$ *από τη στήλη Β.*

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $f(x)=2x+3+\dfrac{1}{\ln x}$	α) $y=2x+1$
2) $g(x)=x-5+\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$	β) $y=x-5$
3) $h(x)=2x+1+\dfrac{x+2}{x+1}$	γ) $y=2x+2$
	δ) $y=x-4$
	ε) $y=2x+3$

3. *Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της από τη στήλη Β.*

Στήλη Α f	**Στήλη Β** f'
1) e^{3x}	α) $3e^x$
2) e^{x^3}	β) e^{3x}
3) $3e^x$	γ) $3x^2e^{x^3}$
4) e^{x+3}	δ) $3e^{3x}$
	ε) e^{x+3}
	στ) e^{3x^2}
	ζ) $e^x + e^3$

4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:



Το σημείο $A\big(0, f(0)\big)$ είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της f . **2.** θέση τοπικού ελάχιστου της f .

3. σημείο καμπής της C_f .

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = -3$. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$, τότε η f έχει:

α. καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$.
β. μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.
γ. δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.
δ. περισσότερες από δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

2. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε το $f(0)$ είναι:

α. τοπικό μέγιστο της f
β. τοπικό ελάχιστο της f
γ. δεν είναι ακρότατο της f.

3. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ με $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$.

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι κατ ανάγκη σωστή;

α. Η $y = 5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β. $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

γ. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 4] = 1$.

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Αν $x+1 \le f\left(x\right) \le x^2+x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :

α. $f\left(0\right)=1$

β. $1 \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge x+1,\ x<0$

γ. $1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1,\ x>0$

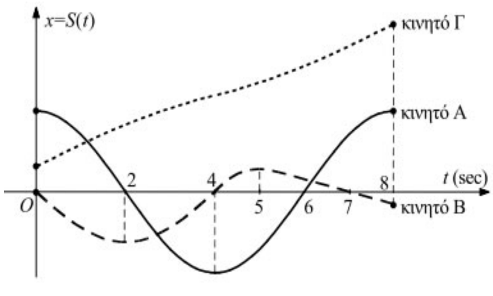
δ. $f'\left(0\right)=1$

2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

α. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0-h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=-f'\left(x_0\right)$

β. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}=2f'\left(x_0\right)$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 8 sec. Να βρείτε :



Α. Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;

Β. Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;

Γ. Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t=2\,\text{sec}$, ποιο τη χρονική στιγμή $t=4\,\text{sec}$ και ποιο τη χρονική στιγμή $t=6\,\text{sec}$;

Δ. Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0sec έως 4sec;

Ε. Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;

ΣΤ. Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

4. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi,\ \frac{1}{\xi}\right)$. Αν Α, Β είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

Α. Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Β. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi \in \mathbb{R}^*$.

5. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

α. $f(x)=x^{\ln x}$ **β.** $f(x)=2^{5x-3}$

γ. $f(x)=(\ln x)^x,\ x>1$ **δ.** $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

6. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε:

$$f(0)=4,\ f'(-1)=2,\ f''(2)=4,\ f^{(3)}(1)=6$$

7. Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=a$, να αποδείξετε ότι:

α. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(x)-af(a)}{x-a}=f(a)+af'(a)$

β. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{e^x f(x)-e^a f(a)}{x-a}=e^a\left(f(a)+f'(a)\right)$

8. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ **β.** $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,\ 0)$ σε καθεμιά περίπτωση χωριστά.

9. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα

$g(x)=f\left(x^2+x+1\right)-1,\ x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε οτι η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(1,\ f(1)\right)$ εφάπτεται της C_g στο $B\left(0,\ g(0)\right)$.

10. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(\eta\mu x)=e^x\sigma\upsilon\nu x,\quad \text{για κάθε } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Α. Να βρείτε την $f'(0)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(0,\ f(0)\right)$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

11. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.

12. **Α.** Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\eta\mu\frac{x}{2}=x,$$

αληθεύει μόνο για $x=0$.

13. **Α.** Να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leq\frac{1}{2}\ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Β. Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x)=\frac{x}{1+x^2},$$

να αποδείξετε ότι για όλα τα $a,\ \beta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left|f(\beta)-f(a)\right|\leq\frac{1}{2}\left|\beta-\alpha\right|$$

14. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,\ 4]$ και ισχύει:

$$2 \le f'(x) \le 5 \text{ για κάθε } x \in (0,\ 4).$$

Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $9 \le f(4) \le 21$.

15. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ και ισχύει $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1,\ 1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,\ 0]$ και $[0,\ 1]$.

16. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία, τα $A(0,\ 1)$, $B(1,\ 2)$.

17. Να αποδείξετε ότι :

Α. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$$

είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

Β. Η εξίσωση:

$$x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$$

είναι ισοδύναμη με την:

$$f(x) = a$$

και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

18. Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x,$$

είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Β. $\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$, για κάθε $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x,\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

είναι γνησίως αύξουσα.

Β. $2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

20. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu x - x + 3,\ x \in [0,\ \pi]$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,\ \pi)$.

21. **Α.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3.$$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(x) = x\ln x \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

22. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

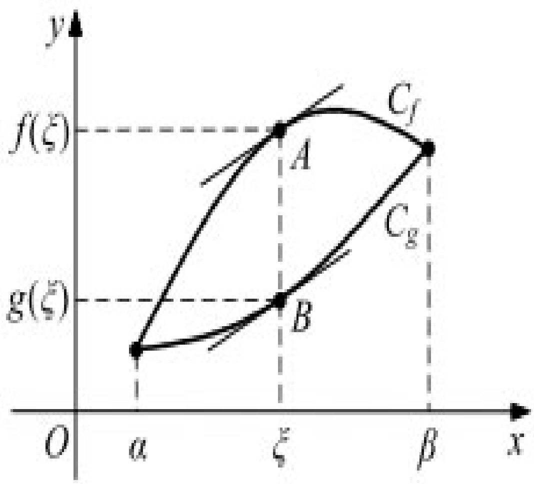
i. **α)** $e^x>1+x$ **β)** $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$

ii. **α)** $\sigma\upsilon\nu x>1-\frac{1}{2}x^2$ **β)** $\eta\mu x>x-\frac{1}{6}x^3$

iii. **α)** $(1+x)^\nu\geq 1+\nu x,\ \nu\in\mathbb{N}$ με $\nu\geq 2$

β) $(1+x)^\nu\geq 1+\nu x+\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2,\ \nu\in\mathbb{N}$ με $\nu\geq 3$

23. Στο επόμενο σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα $[\alpha,\ \beta]$. Το σημείο $\xi\in[\alpha,\ \beta]$ είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή .



Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi,\ f(\xi))$ και $B(\xi,\ g(\xi))$ είναι παράλληλες.

24. Δίνεται η συνάρτηση:

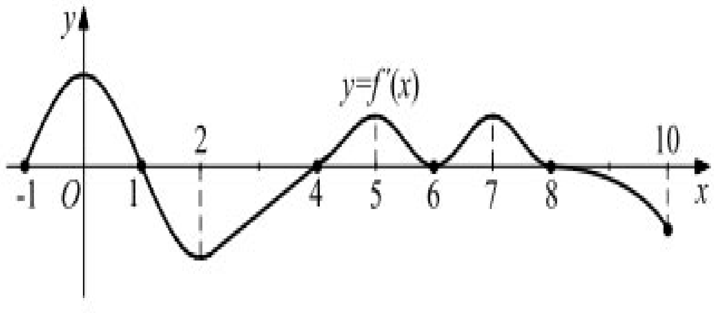
$$f(x)=\sqrt{x}$$

και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$.

Α. Να βρείτε το σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

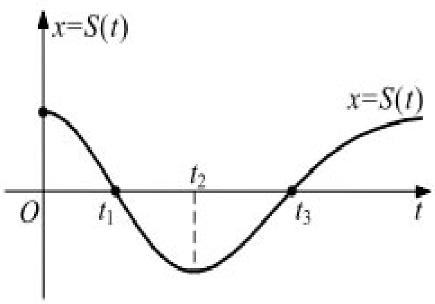
Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

25. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

26. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα.



Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:

Α. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά;

Β. Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

27. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^3-3x^2+2.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Β. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία:

$$A\left(x_1,\ f(x_1)\right),\ B\left(x_2,\ f(x_2)\right),\ \Gamma\left(x_3,\ f(x_3)\right)$$

είναι συνευθειακά.

28. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,\ 2]$, για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 1\\ 1+\dfrac{\ln x}{x}, & x>1\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, ενώ

Β. Η g είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

30. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \left(1-e^{-x}\right)\ln x, & x\in(0,\ 1]\end{cases}$$

Α. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x} \text{ και } \lim_{x\to 0}x\ln x.$$

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $0(0,\ 0)$.

31. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α. $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$ **β.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ **γ.** $f(x)=x^4-2x^2$

32. Ομοίως τις συναρτήσεις :

α. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ **β.** $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

33. Αν $f,\ g$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=g(0)$ και $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x)<g(x)$ στο $(-\infty,\ 0)$ και $f(x)>g(x)$ στο $(0,\ +\infty)$.

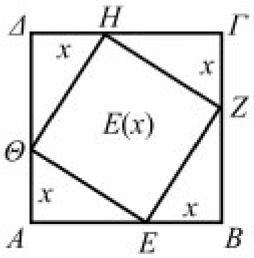
34. **Α.** Αν $a,\ \beta>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x+\beta^x\geq 2$, να αποδείξετε ότι $a\cdot\beta=1$.

Β. Αν $a>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $a^x\geq x+1$, να αποδείξετε ότι $a=e$.

35. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10cm^2/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r=85$ cm.

36. Έστω Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0),\ A(x,0),\ B(0,\ln x),\ x>1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Τ, όταν $x=5$.

37. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ,



Α. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

Β. Να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν Ε(x) του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο.

38. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

39. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=2e^{x-a}-x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y=-x^2+2$.

41. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων:

α. $f(x)=e^{-x^2}$ **β.** $g(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ **γ.** $h(x)=x|x|$

δ. $\varphi(x)=\sqrt{|x|}$ **στ.** $\psi(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$

Β.2. Ψηφιακό Βοήθημα

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x-2} + x - 3\,.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της f.

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 4x^3 + 2(\lambda - 1)x - \lambda\,.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0,\ 1)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(x^2\right).$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

Β. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{4}{x},\ x \neq 0$$

Α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ με $x_0 \neq 0$.

Β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

Γ. Αν A και B τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος AB.

5. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x, & x\ge 0 \\ 5\eta\mu x, & x<0 \end{cases}.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2-3x+1.$$

Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

Α. Να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

Β. Να σχηματίζει γωνία 135^0 με τον άξονα $x'x$.

Γ. Να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Δ. Να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x$.

7. Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

α. $x^{\eta\mu x},\ x>0$ **β.** $2^{x\cdot\ln x},\ x>0$ **γ.** $\sqrt{5x^8+1}$

8. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1\le f(x)\le x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \textbf{(1)},$$

τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$

9. Έστω $f:\mathbb{R}\to(0,\ +\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^{\,2}}$ **β.** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

10. Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $0(0,\ 0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες $Ox,\ Oy$ και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του $\alpha,\ \beta$, ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

11. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

12. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=e^x\cdot \eta\mu x.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x)+2f'(x)=2f''(x).$$

13. Να αποδείξετε ότι:

$$2\ln\left(x-1\right)\le x-3+\ln 4 \text{ για κάθε } x>1.$$

14. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A\left(1,\ 1\right)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^4+24x^2+4x-40=0$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2-4x+3.$$

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία:

$$\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7.$$

Β. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $0\left(0,\ 0\right)$.

Γ. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A\left(2,\ 0\right)$;

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + \kappa \cdot x - 1,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

Α. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,\ f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του κ.

Β. Αν $\kappa = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.

18. Α. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + 24x^2 + 5x - 7,\ a \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του a, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β. Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1,\ f(1))$;

19. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **β.** $e^{x^2} \geq 1 - x$, για κάθε $x \geq 0$.

Β.3. Προτεινόμενα

1. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{Z}$ είναι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη; Δύο φορές παραγωγίσιμη;

2. Έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \ldots + a_n \sin(nx)\right| \leq |\sin x|$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\left|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n\right| \leq 1$$

3. **Α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$3^x + 4^x = 5^x$$

έχει μοναδική λύση.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$a^x + b^x = c^x \text{ με } 0 < a < b < c$$

έχει μοναδική λύση.

4. **Α.** Αν $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Β. Αν $f:[0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = f\left(x + \frac{a}{2}\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,a)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln x,\ x > 0 .$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μοναδική ρίζα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$

Β. Για τη ρίζα x_0 της εξίσωσης $f(x) = 0$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{xe^x - 1}{x - x_0} = f'(x_0)$$

6. Να υπολογίσετε το όρια:

Α. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - e^x}{\sqrt{x+2} + e^x}$ **Β.** $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x + \ln x}{e^x + x + 3\ln x}$

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

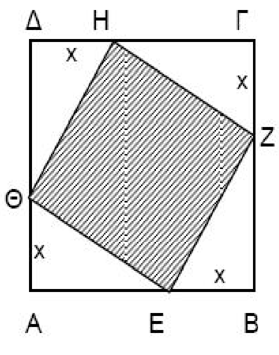
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \beta, & x \le 0 \\ x + 5, & x > 0 \end{cases}$$

Α. Να αποδείξετε ότι $\beta = 5$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

8. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του επόμενου σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Α. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .

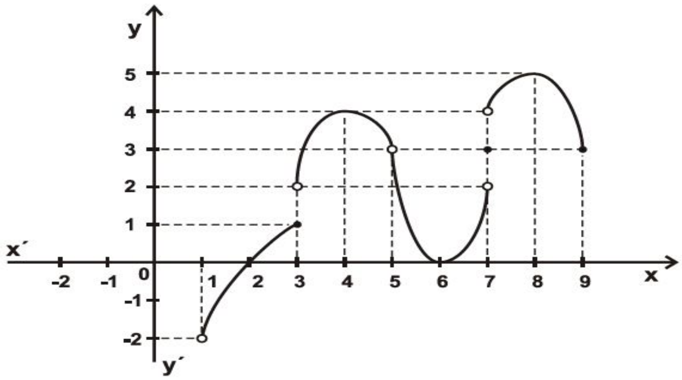
Β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ 0 \le x \le 2$$

Γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1\ cm^2$

9. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Β. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Α. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Γ. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασηs της f.

Δ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

Α. Να βρείτε την τιμή του a, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Β. Αν $a=1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Γ. Για την παραπάνω τιμή του a, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$.

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & x\le 0 \\ -x+1, & x>0 \end{cases}$$

Α. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f.

Β. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[-1,\ 1]$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\ln x,\ x>0 \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x}{1-x},\ x\neq 1.$$

Α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog

Β. Αν :

$$h(x)=\left(fog\right)(x)=\ln\frac{x}{1-x},\ x\in\left(0,1\right),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Γ. Αν:

$$\varphi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R},$$

να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

14. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$$

είναι συνεχής στο 0.

Είναι παραγωγίσιμη στο 0 για την τιμή του α που βρήκατε;

15. Α. Έστω $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left[0,1\right]$ τέτοιο, ώστε:

$$f\left(\xi\right)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right).$$

Β. ‘Εστω $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $f(0)=f(1)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left[0,1\right]$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi\right)=f(\xi)$$

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{|x|},\ x\in[-1,\beta]-\{0\},\ \beta\geq 1$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Β. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, αν και μόνο αν, $\beta\geq 1+\sqrt{2}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^3-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

Γ. Αν $g(x)=\sqrt[3]{x},\ x\geq 0$ να βρείτε την fog.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Α. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$a^{a+1} > (a+1)^a \text{ για κάθε } a > e \ .$$

Γ. Να αποδείξετε ότι για $x > 0$ ισχύει:

$$2^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x = x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

2. Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x$$

είναι κυρτή, ενώ η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln x$$

είναι κοίλη.

Β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,\ 1)$ και της C_g στο $B(1,\ 0)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι:

α. $e^x \geq x+1$, $x \in \mathbb{R}$. **β.** $\ln x \leq x-1$, $x \in (0,\ +\infty)$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

Δ. Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

3. Α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

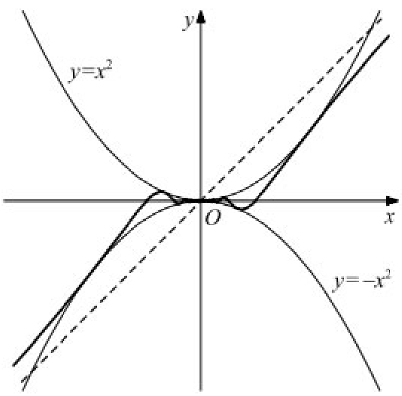
$$f(x) = e^x - \lambda x,\ \lambda > 0 .$$

Β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Να αποδείξετε ότι:

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι η ευθεία $y = 0$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,\ 0)$.

Β. Ο άξονας $x'x$ έχει με την C_f άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της C_f.

Γ. Η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

5. Έστω μια συνάρτηση φ τέτοια, ώστε:

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0 \text{ και } \varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \ (1).$$

Να αποδείξετε ότι :

Α. Η συνάρτηση:

$$\psi(x)=\left[\varphi'(x)\right]^2+\left[\varphi\left(x\right)\right]^2$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

Β. $\varphi\left(x\right)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ. Έστω δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες, ώστε:

$$f\left(0\right)=0,\ f'\left(0\right)=1 \text{ και } f''\left(x\right)+f\left(x\right)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$g\left(0\right)=1,\ g'\left(0\right)=0 \text{ και } g''\left(x\right)+g\left(x\right)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

α. Οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=f(x)-\eta\mu x \text{ και } \psi(x)=g(x)-\sigma\upsilon\nu x$$

ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος Α.

β. $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει:

$$f\left(1+h\right)=2+3h+3h^2+h^3 \text{ για κάθε } h\in\mathbb{R} ,$$

να αποδείξετε ότι :

α. $f(1)=2$ **β.** $f'(1)=3$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<0\\ \eta\mu x+1, & x\geq 0\end{cases} ,$$

να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $A\left(0,1\right)$ και σχηματίζει με τον άξονα των $x'x$ γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

8. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

στο $x_0=0$.

9. Αν ισχύει:

$$x+1 \le f(x) \le x^2+x+1 \quad \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

, να αποδείξετε ότι:

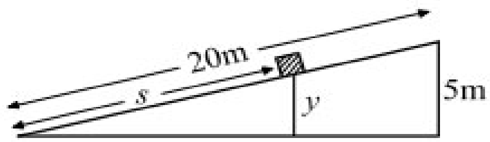
α. $f(0)=1$

β. $1 \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge x+1$ για κάθε $x<0$ και

$1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1$ για κάθε $x>0$

γ. $f'(0)=1$

10. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y.



11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^4-20x^3-25x^2-x+1$$

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$4x^3-60x^2-50x-1=0$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,\ 1)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=(x-1)\eta\mu x$$

Να αποδείξετε ότι :

Α. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Β. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 1 - x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

13. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το R ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2 \text{ για όλα τα } x,y \in \mathbf{R}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

14. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-a)^2 \cdot (x-\beta)^2 \cdot (x-\gamma)^2 \quad , \text{ με } \alpha < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

15. Με ένα σύρμα μήκους 4m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

Α. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.

Β. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

Γ.2. Ψηφιακό Βοήθημα

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^{2x}+5x$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5.$$

2. Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)\cdot e^{y}+f(y)\cdot e^{x}, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Α. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με:

$$f'(x_0)=f(x_0)+e^{x_0}.$$

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $a,\ \beta$ ισχύει:

$$\alpha^{x}+\beta^{x}\geq 5e^{x}-3, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να δείξετε ότι $a\cdot\beta=e^{5}$.

4. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,\ 1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,\ 1)$ με $f(0)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\ 1)$.

Α. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση:

$$h(x)=f^{2}(x)\cdot e^{g(x)}$$

στο διάστημα $[0,\ 1]$.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

5. Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε:

Α. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \lambda x \right).$$

Β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1.$$

6. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } f''(0) = 2011.$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}.$$

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$.

8. Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\left[0,\ 3\right]$.

Να δείξετε ότι:

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3).$$

9. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,\ 0)$, $B(x,\ \ln x)$, $\Gamma(x,\ 0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x = 2\ cm$. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5 cm/\sec$.

10. Α. Να αποδείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $\left(x - \rho\right)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.

Β. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 - 3x - 1,$$

να έχει παράγοντα το $\left(x - 1\right)^2$.

11. Έστω $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,\ 2)$.

12. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,\ 3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,\ 3) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

13. Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$$f\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=2\cdot e^x \text{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Α. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,\ f(0))$ είναι η $y=2x+2$.

Γ. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $x=2\ cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

14. **Α.** Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

β. Αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

Β. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x.$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

15. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\ \dfrac{1}{\pi}\right]$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\sigma\varphi\frac{1}{x}=3x,$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\ \dfrac{1}{\pi}\right)$.

16. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\textbf{α. } \lim_{x\to 0^+} x^x \quad , \quad \textbf{β. } \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x .$$

17. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και } x\cdot f'(x)=-3f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0 .$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$.

Β. Να βρείτε τον τύπο της f.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

18. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=2x^3-15x^2+24x .$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

19. Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } P'(1)=2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\ \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

21. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\textbf{α. } \lim_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad , \quad \textbf{β. } \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,\ 6]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,\ 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,\ 6)$ με $f(1)=f(6)$.

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,\ 6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A(x_0,\ f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2 \in (1,\ 6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0.$$

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2-\eta\mu x.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

24. Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(2)=5,\ f(1)=3 \text{ και } f(x)\le 2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,\ 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi)=0.$$

Γ.3. Προτεινόμενα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x\neq 0,\ x\neq 1 \ \ \kappa\alpha\iota\ \ x\neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x=1 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

και $$g(x)=f(x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x>0\ .$$

Α. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Β. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

β. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1}\leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)},\ \text{αν}\ \ x>1\ \ \text{και}\ \ e^{-x^2+1}\geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}\ ,\ \text{αν}\ \ 0<x<1$$

Γ. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $(0,\ +\infty)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A(2,\ g(2))$ και $B(1,\ g(1))$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}(7-3x)\leq e^{-x^2}(x-1),\ \text{για κάθε}\ x\in\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)\quad \text{και}$$

$$e^{-x^2}\geq e^{-1},\ \text{για κάθε}\ x\in\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x^2 + x$$

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $a \in (-1,\ 0)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$e^a + 2a + 1 = 0 .$$

Β. Να δείξετε ότι:

$$f(x) \geq a^2 - a - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου a ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

Γ. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \frac{2017}{2016} .$$

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^2+1) + f(x^2+2) < f(x^2) + f(x^2+3) \text{ , για κάθε } x > 0$$

Ε. Έστω ένα σημείο $M(x(t),\ y(t))$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0, με $x(t_0) \in (-1,\ 0)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M , ως προς το χρόνο, να μηδενίζεται.

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2+1) \cdot \ln x,\ x > 0 .$$

Α. Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 .$$

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο

$A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

Δ. α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$, $x = e$.

4. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο $f'(0) \neq 0$, για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} - e \cdot f\left(x\right) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να βρεθεί το $f\left(0\right)$.

Γ2. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Γ3. Αν επιπλέον ισχύει ότι:

$$\frac{f\left(x\right) - f\left(0\right)}{x} > 0, \text{ για κάθε } x \neq 0,$$

να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x^2\right) - f\left(1 + 2\ln x\right) \geq 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

5. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln\left(x+1\right) - 1$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Γ3. Αν για τους αριθμούς $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln\left(2\alpha + \beta\right) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln\left(\alpha + 2\beta - 1\right) \leq 2,$$

να υπολογίσετε τους $a,\ \beta$.

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x)=\frac{\ln x+1}{x},\ x>0 \quad \text{και} \quad f(x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x+g(a),\ x\in\mathbb{R} \ \text{όπου}\ a>0.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Για τις διάφορες τιμές του a, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γ. Για $a=1$

α. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $M(0,\ -2)$ άγονται ακριβώς δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης C_f της f.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $N(x(t),\ y(t))$ της C_f, με $x(t)\in(0,\ 1)$, όπου κατά τη χρονική στιγμή t_0, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι διπλάσιος από αυτόν της τετμημένης του, αν υποθέσουμε ότι αυτοί οι ρυθμοί μεταβολής τη χρονική στιγμή t_0 είναι μη μηδενικοί.

Δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x+1)-g(x)\right].$$

7. Έστω μία συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1)=0,\ f'(1)=1 \ \text{και}$$

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=2\ln x+3,\ \text{για κάθε}\ x>0$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-x(2\ln x+1),\ x>0$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0,\ +\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln x,\ x>0.$$

Γ. α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Αν ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t)>1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{fof} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με $1\ cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία $x(t_0)=2\ cm$.

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|<\sqrt{f(a)\cdot f(\beta)} \text{ για κάθε } a,\ \beta\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right] \text{ με } a<\beta .$$

8. Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,\ 2]$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\left[f\left(x\right)\right]^2-xf\left(x\right)+x^2-3=0 \text{, για κάθε } x\in[-2,\ 2]$$

Α. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x=a$ ($0<\alpha<2$), να αποδείξετε ότι $f\left(a\right)=2a$ και στη συνέχεια να προσδιοριστεί το a.

Β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της f δεν έχει σημεία καμπής.

Γ. Αν επιπλέον η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε:

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$2f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x+1}{2}\right)+f\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

είναι αδύνατη.

β. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα και να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα καθώς και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g$ με g παραγωγίσμιμη στο $\left(1,\ +\infty\right)$, για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x)=x(x+a)-x+1 \text{ με } a,\ x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)-1\geq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } g'(x)\ln x=\frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x>1$$

Α. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

Β. Αν $g(e)=-1$, να δείξετε ότι:

$$g(x)=-\ln^2 x,$$

για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Γ. $g(x)=-(\ln x)^2$ σε όλο το διάστημα $(0,\ +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0\in(0,\ 1)$, για την οποία η διαφορά $f(x)-g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων Μ, Ν με $M(\xi,\ f(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και $N(\xi,\ g(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi\in(0,\ +\infty)$, στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα.

Δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\dfrac{g(x)}{f(x)}}\right]$$

10. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,\ 4]$. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

Α. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi)=-f'(\xi).$$

Γ. Η εξίσωση:

$$f'(x)=\left(e^x+x^2\right)f(x),$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

11. Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$\frac{2}{\pi} x \le \sin x \le x$$

Β. Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f(0) = 0,\ f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β. Αν επιπλέον ισχύει $f'(0) \ge 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x^2)}{f(x)} = +\infty .$$

12. Α. Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε:

$$|f'(x)| \le \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0 .$$

Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x+\sqrt{x}) - f(x) \right) = 0$$

Β. Έστω $p(x)$ πολυώνυμο n βαθμού. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = p(x)$ έχει το πολύ $n+1$ λύσεις.

13. Α. Να δείξετε ότι για κάθε $a > 1$ και $0 < x < y$ ισχύει ότι:

$$a x^{a-1}(y-x) < y^a - x^a < a y^{a-1}(y-x)$$

Β. α. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(a) + f(\beta) \ge 2 \cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right), \text{ για κάθε } \alpha,\ \beta \in \Delta .$$

Αντίστοιχα, αν f κοίλη σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(a)+f(\beta)\le 2\cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right),\text{ για κάθε } \alpha,\ \beta\in\Delta.$$

(Ανισότητες jensen)

β. Να δείξετε ότι για κάθε $x, y>0$ ισχύει ότι:

$$(x+y)^{x+y}\le 2^{x+y}\cdot x^x\cdot y^y$$

14. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=1.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x=e^{\frac{a^2}{2}}$$

15. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x-1},\ x\ge 1 \text{ και } g(x)=\frac{3-5x}{x-2},\ x\ne 2.$$

Α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog .

Β. Αν είναι:

$$\varphi(x)=(fog)(x)=\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}},\ x\in\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$$

να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

16. Α. Έστω $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f(x)=|x-1|\cdot g(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή $g(1)$.

Β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f(2+x)-f(2-x)=2x,\ x\in\mathbb{R},$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$.

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha \in (-1,\ 0)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$e^{\alpha} + 2\alpha + 1 = 0.$$

Β. Να δείξετε ότι:

$$f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου α ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

Γ. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \frac{2017}{2016}.$$

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x^2+1\right) + f\left(x^2+2\right) < f\left(x^2\right) + f\left(x^2+3\right),\ \text{για κάθε}\ \ x > 0$$

Ε. Έστω ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0, με $x(t_0) \in (-1,\ 0)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M, ως προς τον χρόνο, να μηδενίζεται.

18. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το $\mathrm{A}(-1,\ -1)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι:

α. Ισχύει:

$$\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| \leq |x-y| \leq \left|f(x) - f(y)\right|,\ \text{για κάθε}\ x,\ y \in \mathbb{R}.$$

β. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(\xi)+2\xi=0$$

19. Α. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2}-x^2-1=0,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Β. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Αν:

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Δ. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f(x+3)-f(x), \text{ όταν } x\in[0,\ +\infty).$$

20. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x)\cdot f'(x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1$$

Α. Να δείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\ .$$

Β. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο;

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right).$$

Γ. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[1,\ +\infty)$.

Δ. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$$

στο $\mathbb{R}$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x^3.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Γ. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

22. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x.$$

Δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^x\right)}{e^{f(x)}}.$$

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1» και να βρείτε την f^{-1}.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(2^{x^2-9}+3-x\right)=f\left(2^{x-3}+9-x^2\right)$$

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0-2)e^{x_0}+x_0=0$$

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=\frac{e^{2x-2}-1}{e^{x-1}}$$

Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)>2x$$

για κάθε $x>0$.

24. Δίνονται οι επόμενες συναρτήσεις:

$$f(x)=(1-x)e^x, x>0 \text{ και } g(x)=(1+x)e^{-x}, x>0$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Οι f και g είναι φθίνουσες.

Β. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$$

25. Να αποδείξετε ότι:

Α. $\eta\mu x > x-\frac{1}{6}x^3,\ x>0$

Β. $(x+2)+(x-2)e^x>0,\ x>0$

Γ. $\varepsilon\varphi x > x+\frac{x^3}{3},\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

Δ. $(x+2)\ln(x+1)>2x,\ x>0$

26. Να αποδείξεε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^a\cdot e^{-x}\right)=0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

27. Να βρείτε τις σταθερές a και β ώστε το όριο:

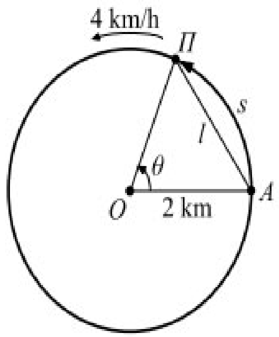
$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\sigma\upsilon\nu x)-\beta\eta\mu x}{x^3}$$

να ισούται με 1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο Α και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας ρ = 2km με ταχύτητα υ = 4km/h. Αν S είναι το μήκος του τόξου ΑΠ και ℓ το μήκος της απόστασης ΑΠ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιμή t:



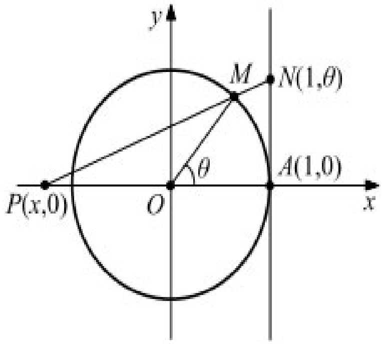
Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $\theta = \dfrac{S}{2}$ και $l = 4\eta\mu\dfrac{\theta}{2}$, **β.** $S = 4t,\ \theta = 2t$ και $l = 4\eta\mu t$.

Β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ℓ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ℓ, όταν:

α. $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, **β.** $\theta = \pi$ και **γ.** $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$;

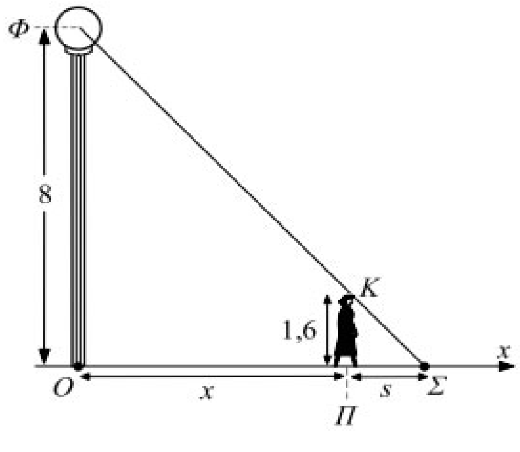
2. Στο επόμενο σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1cm και η ε εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο Α. Το τόξο ΑΜ είναι θ rad και το ευθ. τμήμα ΑΝ είναι θ cm. Η ευθεία ΜΝ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $P(x,\ 0)$.



Να δείξετε ότι :

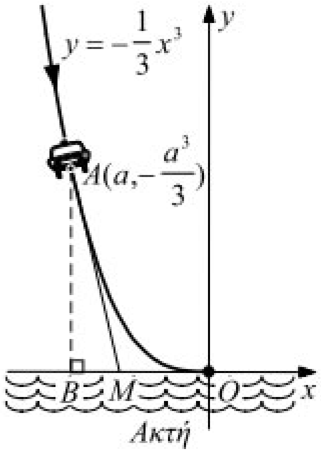
Α. $x=\dfrac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}{\theta-\eta\mu\theta}=x(\theta)$ **Β.** $\lim\limits_{x\to 0}x(\theta)=-2$

3. Μία γυναίκα ύψους 1,60m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8m με ταχύτητα 0,8m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;

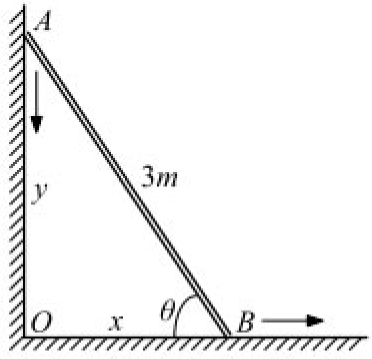


4. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3,\ x\le 0$,

πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη − 3.



5. Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec.



Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:

Α. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

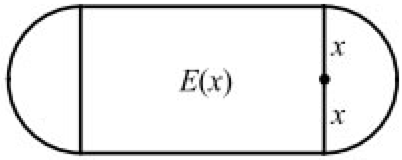
Β. Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.

6. Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [α,β] και στη συνέχεια ότι:

$$e^{a}<\frac{e^{\beta}-e^{a}}{\beta-\alpha}<e^{\beta} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}$$

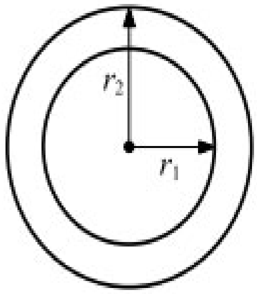
Για τη συνάρτηση $g(x)=\ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0<a<\beta$.

7. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



8. Έστω Ε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος.

Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή t =0 είναι r_1 = 3cm και r_2 = 5cm και ότι για t > 0 η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s.

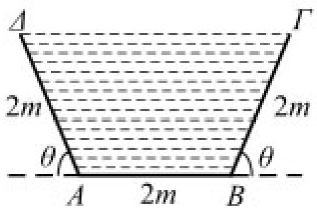


Να βρείτε:

Α. Πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

Β. Πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

9. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

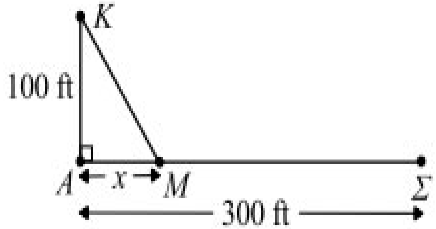


Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με:

$$\mathrm{E} = 4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Β. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

10. Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100ft [1] μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.

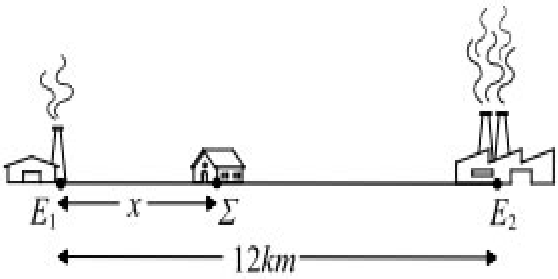


Α. Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο:

$$\mathrm{T}(x) = \frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$$

Β. Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

11. Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και 8P αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d, να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).



(1ft = 30,48 cm)

Δ.2. Ψηφιακό βοήθημα

1. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) < x^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση:

$$g(x) = 3f(x) - x^3$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

Β. $f(2) - f(1) < 3$,

Γ. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,\ 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) < 3.$$

2. **Α.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$g(x) = x - \ln x.$$

Β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x.$$

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

3. **Α.** Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2},$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$.

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$f(x)=e^x\cdot\ln x,$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

4. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και
- $f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=f(x)\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^{\lambda x}}{x+1},\ x>-1\ \text{ και }\ \lambda>0\,.$$

Α. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

Β. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

6. **Α.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^x+2^x=5^x\,.$$

Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=-2f(x)\ \text{ για κάθε }\ x\in\mathbb{R}\,.$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=e^{2x}\cdot f(x),$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=1$.

γ. Αν $h,\ \varphi$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με:

$$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x),\ \text{ για κάθε }\ x\in\mathbb{R}\ \text{ και }\ h(0)=\varphi(0),$$

τότε να δείξετε ότι $h=\varphi$.

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \cdot e^x$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$.

Ε. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2 + 4x + 3\right) \cdot e^x \geq 7x + 3, \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

8. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln\left(x + 1\right) - 1.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Ε. Αν για τους αριθμούς $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{\alpha + 2\beta - 1} - \ln\left(2\alpha + \beta\right) + e^{2\alpha + \beta - 2} - \ln\left(\alpha + 2\beta - 1\right) \leq 2,$$

να υπολογίσετε τους $a,\ \beta$.

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2x}},\ x > 0$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να δείξετε ότι: $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x^2+1\right)\cdot \ln x,\ x>0 .$$

Α. Να δείξετε ότι:

$$2x\cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 ,$$

για κάθε $x>0$.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=0 .$$

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο

$A\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

Δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln\left(x^2+1\right)$$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right).$$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^3-x^2>\ln\frac{x^4+1}{x^6+1}.$$

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2\cdot e^x$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x),\ \text{για κάθε } x>0 .$$

13. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},\ 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$

με: $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(\xi,\ f(\xi)\right)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

Β. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B\left(\gamma,\ f(\gamma)\right)$ να διέρχεται από το $O\left(0,\ 0\right)$.

14. Α. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(a)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right),\ \text{για κάθε } \alpha,\ \beta\in\Delta.$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{2-x^2}{x+1},\ x>-1$$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β. Αν $a>\frac{1}{e},\ \beta>\frac{1}{e}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2 a}{\ln a+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{a\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{a\cdot\beta}\right)+1}$$

Δ.3. Προτεινόμενα

1. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R},\ \mathrm{A} = (0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)}\left(f^2(x) - 2f(x) + 3\right) = x$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 3\right),\ x \in \mathbb{R}$$

Β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1}ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x = 1$.

Γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία, $A\left(x,\ f^{-1}(x)\right)$ και $B\left(f^{-1}(x),\ x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων $A,\ B$ γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

2. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1,\ +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + x\ln x}{x\ln x}\ ,$$

για κάθε $x > 1$ με $f(e) = e^e$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=e^x\cdot\ln x,\ x>1$$

καθώς και ότι οι συναρτήσεις;

$$g(x)=e^x,\ h(x)=\ln x,$$

δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1,\ +\infty)$.

Β.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών

της.

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x)=\frac{\lambda}{x}\quad \text{με}\quad \lambda\in\mathbb{R},\ x>1.$$

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e,\ f(e))$.

Δ. Να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{f(x)}{e^{e-1}}\geq(1+e)x-e^2$ για κάθε $x>1$ και

β. $\int_2^3 f(x)dx\geq e^{e-1}\cdot\dfrac{5+5e-2e^2}{2}$

Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\quad,\ \text{για κάθε}\ x_1,\ x_2\in(1,\ +\infty)\ \text{με}\ x_1<x_2$$

3. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)+f(1-x)=0,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\ \text{και}\ f'(x)\neq 0\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)=2f(1).$$

Γ. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=20e^x+4x^5-5x^4-20x^2+20x,\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα , τότε:

α. Να βρείτε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)=f\left(x^2+x\right)$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x\cdot e^x\right)>f\left(e^x-1\right).$$

Γ. Έστω η συνάρτηση:

$$g\left(x\right)=x+c-2\sqrt{c\cdot x}\ \text{, με } x,\ c>0 \text{ και } c \text{ σταθερά.}$$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $c>0$ ισχύει:

$$f(c^3+4c^2+5c+2)>f(8c\sqrt{2c}).$$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη ώστε:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$

Α. Να δείξετε ότι:

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0$$

Β. Να δείξετε ότι:

$$f^{(n)}(0)=0$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Γ. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+3x-1}{x^2}$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να χαράξετε τη γραφική παράστασή της.

Ε. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^3+(1-\lambda)x^2+3x-1=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)}=(a\cdot x)^{\frac{1}{x}} \text{ για κάθε } x>0\text{, όπου } a>0$$

Α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Β. Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτομένες στο $A(x_0, f(x_0))$ καθώς το $a>0$ μεταβάλλεται διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Γ. Αν $a=1$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x)=\ln\left(x\cdot f(x)\right),\ x>1$$

τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώςσημείο.

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f\left(x+y\right)=f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι:

Α. $f'(x)\cdot f(y)=f(x)\cdot f'(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Β. Υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο , ώστε:

$$f'(x)=cf(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ. $f(x)=e^{cx}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Αν f συνεχής για $x\geq 0$ με $f(0)=0$ και παραγωγίσιμη για $x>0$ με την f' γνησίως αύξουσα , να αποδείξετε ότι για $x>0$ ισχύουν:

Δ1. $f(x)=xf'(\theta x),\ 0<\theta<1$

Δ2. $f(x)<xf'(x)$

Δ3. Η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

είναι γνησίως αύξουσα.

10. Α. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $\left[a,\beta\right]$ με $f'(\alpha)\neq f'(\beta)$ και κ ένας αριθμός μεταξύ των $f'(\alpha)$ και $f'(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c\in\left(a,\beta\right)$, τέτοιο ώστε $f'(c)=\kappa$.

(Θεώρημα Darboux)

Β. Έστω $f:\left[0,2\right]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\left[0,2\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0,2\right)$ με:

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=1$$

Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει $c_1\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(c_1)=1$.

β. υπάρχει $c_2\in\left(1,2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(c_2)=0$.

γ. υπάρχει $c\in\left(0,2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(c)=\dfrac{1}{3}$.

11. Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0]\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

είναι συνεχής.

12. Α. Αν η $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{+}$ και $0\le x\le 1$, να αποδείξετε ότι:

$$a^{x}\cdot\beta^{1-x}\le ax+(1-x)\beta$$

Β. α. Αν η δύο φορές παραγωγίσμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι κοίλη,

να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_\nu}{\nu}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+...f(x_\nu)}{\nu}$$

με $x_1,\ x_2,...,\ x_\nu\in(\alpha,\beta)$

β. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[\nu]{\eta\mu x_1\cdot\eta\mu x_2...\eta\mu x_\nu}\le\eta\mu\frac{x_1+x_2+...+x_\nu}{\nu}$$

αν $x_1,\ x_2,...,\ x_\nu\in(0,\pi)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln\frac{2}{2-x^2},\ \ |x|<\sqrt{2}$$

Α. Να εξετάσετε αν υπάρχει η αντίστροφη της f στο διάστημα $(0,\sqrt{2})$.

Β. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και να υπολογίσετε

το $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$.

Γ. Να υπολογίσετε το $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$ χωρίς να ορίσετε τον τύπο της αντίστροφης.

14. Έστω μια συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και C_g η γραφική της

παράσταση. Επίσης έστω h η συνάρτηση:

$$h(x)=e^{g(x)}+e^{-g(x)},\ x\in\mathbb{R}$$

και C_h η γραφική της παράσταση.

Α. Να υπολογίσετε την $h''(x)$.

Β. Αν η g για $x>0$ είναι γνησίως αύξουσα με:

$$g'(x) \neq 0 \text{ και } g(0)=1,$$

να εξετάσετε αν η h για $x>0$ είναι αντιστρέψιμη.

Γ. Αν η C_g έχει στη θέση x_1 σημείο καμπής με εφαπτομένη παράλληλη στην πρώτη διχοτόμο, να εξετάσετε αν η C_h έχει στη θέση x_1 σημείο καμπής.

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x)=\frac{2}{1+e^{f(x)}},\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad f'(0)=1$$

Α. α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Β. α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

β. Να βρείτε την εφαπρομένη της C_f στο σημείο $M\left(0, f(0)\right)$.

γ. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\le x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ. α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)+e^{f(x)}=2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)<2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

γ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Δ. α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\ge \ln(x+1)$$

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

Α. Ψηφιακού Βοηθήματος

1ο

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

β. Αν η συνάρτηση f δεν είναι στο συνεχής x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0, τότε δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της $f+g$ στο x_0.

δ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right), \text{τ}$$

τότε υπάρχει καιτο όριο της g στο x_0.

ε. Αν $f(x)=x^x$, $x>0$, τότε:

$$f'(x)=x\cdot x^{x-1}$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση:

$$f\left(f(x)\right) = 2g(x) - x$$

Β1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της:

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Μονάδες 5

Β3. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = x_0$

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f\left(x + x_0 - 2\right)\right) + x + x_0 = 2f\left(x + x_0 - 2\right) + 2$$

Μονάδες 5

γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f\left(\ln x + x_0 + 1\right)\right) + \ln x + 1 < x_0$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{x}, & -1 \le x < 0 \\ a^2 \ln(x+e) + 2a + (\beta^2 + \dfrac{1}{2})e^x, & x \ge 0 \end{cases}$$

Γ1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $a = -1$ και $\beta = 0$,

α. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)+1}{x+1}.$$

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετετο όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,\ 1)$.

Δ1. **α.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-1}{x}$$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(2x)-1}{x}=4f'(0)$$

Μονάδες 4

Δ2. Αν επιπλέον για την f ισχύει:

$$f^2(x)-4f(x)=x^2-3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

Δ3. Αν:

$$f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτμένων της C_f, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Έστω σημείο M της C_f με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων Ο με ταχύτητα $2cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ.

Μονάδες 6

Β. Προτεινόμενα

1ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

Α2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle.

Μονάδες 7

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(a)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[a,\beta]$.

β. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

γ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ. Αν για τη συνεχή και δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

ε. Αν για μια συνάρτηση f και για ένα σημείο $x_0\in D_f$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 13

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} + f(x) = 0 \quad .$$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x \cdot \ln x + 2x - 3, \ x \geq 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f για $x \geq 1$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε:

$$(e-1)f'(\xi) + 2 = 3e \, .$$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2012$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x - 1, \ x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ .

Μονάδες 4

Για $\lambda = 0$

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) - \sqrt{x} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

2ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

β. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Αν $f'(x)=x(x-1)^2\cdot(x-2)$ τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=0$ τοπικό μέγιστο.

δ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f\cdot g$ στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν

και τα όρια των συναρτήσεων f και g στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$.

ε. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[a,\beta]$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\sqrt{e^{x-1}-1}$$

Β1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 4

Β2. Να ορίσετε την συνάρτηση fog.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη ενώ η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1}.

Μονάδες 8

Β4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g\left(\sqrt{x^3+x}\right)=g\left(\sqrt{4x^2}\right)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0$$

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

Μονάδες 7

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της καθώς και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Γ4. Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a^x - \ln(x+1),\ x > -1$$

, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$

Δ1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

Μονάδες 6

Δ2. Για $a = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

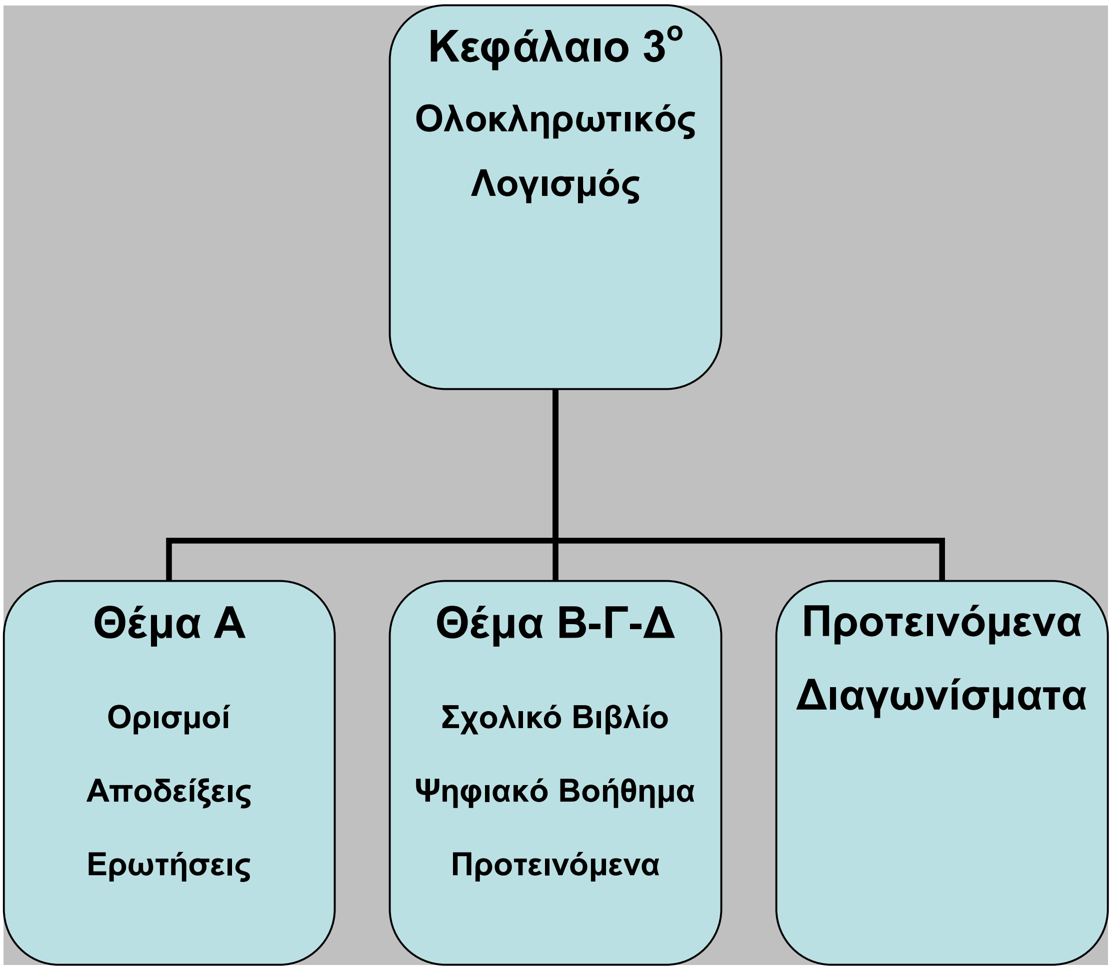
Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta,\gamma \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα

Μονάδες 8


Κεφάλαιο 3ο
Ολοκληρωτικός Λογισμός
Θέμα Α
Ορισμοί
Αποδείξεις
Ερωτήσεις
Θέμα Β-Γ-Δ
Σχολικό Βιβλίο
Ψηφιακό Βοήθημα
Προτεινόμενα
Προτεινόμενα Διαγωνίσματα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Οι πιο σημαντικοί ορισμοί

1. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ;

2. Τι ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f από το a στο β;

3. Αν g συνεχής στο $[a,\ \beta]$, ποιος τύπος δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ αν:

α. $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$;

β. $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$;

γ. η g δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\ \beta]$;.

Να αποδείξετε τους τύπους σε κάθε περίπτωση με τη βοήθεια ενός σχήματος.

4. Ποιος είναι ο τύπος που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων $f\,,g$ στο $[a,\ \beta]$ και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$;

Να αποδείξετε τους τύπους σε κάθε περίπτωση με τη βοήθεια ενός σχήματος.

Α.2. Διατυπώσεις -Γεωμετρικές Ερμηνείες Θεωρημάτων και Προτάσεων

1. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx$, αν $f\left(x\right)\geq 0$ με f συνεχή στο $[a,\ \beta]$;

2. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_{\alpha}^{\beta} cdx$, αν c > 0 ($\alpha>\beta$);

3. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx$, με f, g συνεχείς στο $[a,\ \beta]$;

4. Να διατυπώστε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Α.3. Θεωρήματα και Προτάσεις για απόδειξη

1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

2. Να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

3. Έστω $f,\ g$ συνεχείς στο διάστημα $[a,\ \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f,\ g$ και τις ευθείες $x=a,\ x=\beta$.

α. Αν $f(x)\geq g(x)\geq 0$, να δείξετε ότι:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

β. Αν $f,\ g$ είναι μη αρνητικές στο $[a,\ \beta]$ και $f(x)\geq g(x)$, να δείξετε ότι:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

4. α. Έστω g συνεχής στο $[a,\ \beta]$ με $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,\ \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{E}(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

β. Έστω f, g συνεχείς στο $[a,\ \beta]$ και η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\ \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx.$$

Α.4. Ερωτήσεις Αντικειμενικού τύπου

Σχολικού Βιβλίου

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας[1].

Ι.

1. Ισχύει: $\int_a^\beta \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$.	Α	Ψ
2. Ισχύει: $\int_a^\beta \left(f(x)\cdot g(x)\right)dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx$.	Α	Ψ
3. Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$.	Α	Ψ
4. Αν $\int_a^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,\ \beta]$.	Α	Ψ
5. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\ \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$	Α	Ψ
6. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ΄ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\ \beta]$.	Α	Ψ
7. Ισχύει: $\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(x^4+1\right)dx < \int_{-a}^{a}\left(x^4+x^2+1\right)dx$ για κάθε $a>0$.	Α	Ψ
8. Ισχύει: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1-\eta\mu^2 x\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)dx$.	Α	Ψ
9. Ισχύει: $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt$.	Α	Ψ
10. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\left(x^3-x\right)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x$ και τον άξονα των x.	Α	Ψ

[1] *Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται θεωρούμε ότι είναι καλώς ορισμένα, δηλαδή οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι συνεχείς.*

ΙΙ.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν $f'(x)=\eta\mu\pi x$ και $f(0)=0$, τότε το $f(1)=1$ ισούται με:

Α. $-\frac{1}{\pi}$ **Β.** $\frac{1}{\pi}$ **Γ.** $-\frac{2}{\pi}$ **Δ.** $\frac{2}{\pi}$

2. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\left|x^2-1\right|dx$ είναι ίσο με:

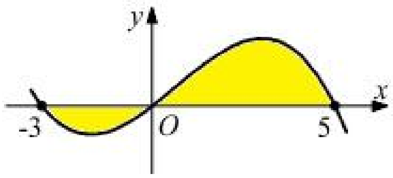
Α. $\frac{4}{3}$ **Β.** 0 **Γ.** $-\frac{4}{3}$ **Δ.** $\frac{2}{3}$ **Ε.** $\frac{5}{3}$

3. Έστω $f,\ g$ δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[a,\ \beta]$. Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[a,\ \beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

Α. $f'(x)\le g'(x),\ x\in[a,\ \beta]$ **Β.** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\le\int_{a}^{\beta} g(x)dx$

Γ. $\int f(x)dx\le\int g(x)dx$ **Δ.** $\int_{a}^{\beta} f(x)dx\le\int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$

4. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του επόμενου σχήματος



Είναι ίσο με:

Α. $\int_{-3}^{5} f(x)dx$ **Β.** $\int_{5}^{-3} f(x)dx$

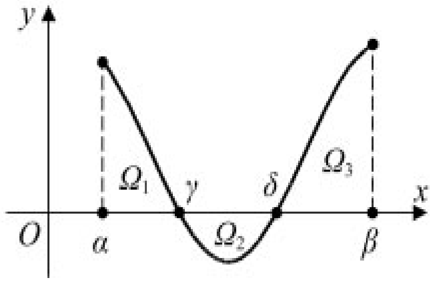
Γ. $\int_{-3}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{5} f(x)dx$ **Δ.** $\int_{0}^{-3} f(x)dx+\int_{0}^{5} f(x)dx$

5. Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in[-1,\ 1]$ και $f(0)=g(0)+2$, τότε για κάθε $x\in[-1,\ 1]$ ισχύει :

Α. $f(x)=g(x)-2$ **Β.** $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx=4$

Γ. $f(x)\le g(x),\ x\in[-1,\ 1]$ **Δ.** Οι $C_f,\ C_g$ έχουν κοινό σημείο στο $[-1,\ 1]$

6. Έστω η συνάρτηση f του επόμενου σχήματος:



Αν $E(\Omega_1)=2,\ E(\Omega_2)=1,\ E(\Omega_3)=3$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι:

Α. 6 **Β.** –4 **Γ.** 4 **Δ.** 0 **Ε.** 2

ΙΙΙ.

1. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα ;

Α. $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ **Β.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx$ **Γ.** $\int_0^\pi \varepsilon\varphi x dx$ **Δ.** $\int_0^1 \ln x dx$

Ε. $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}dx$ **ΣΤ.** $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$

2. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$I=\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=-\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2}du=-I$$

(θέσαμε $x=\frac{1}{u}$, οπότε $dx=-\frac{1}{u^2}$). Άρα $I=-I$, οπότε $I=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού $I=\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx>0$, επειδή $\frac{1}{1+x^2}>0$ για κάθε $x\in[-1,\ 1]$.

Ψηφιακό Βοήθημα του Υπουργείου

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Ισχύει η σχέση:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left(f'(x)\cdot g(x)\right)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

2. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\int_a^\beta f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 .$$

3. Ισχύει:

$$\left(\int_a^\beta f(x)dx\right)' = 0 .$$

4. Ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta cdx = c(a-\beta) \text{ με } \beta > \alpha .$$

5. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g'(x)dx .$$

6. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,τότε το $\int_a^\beta f(x)dx$ παριστάνει εμβαδόν.

7. Αν f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι παντού ίση με τη g στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx .$$

8. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $\alpha,\beta \in \Delta$, τότε:

$$\int_a^\beta f(x)dx < 0 .$$

9. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$,τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$.

10. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και για κάθε $x \in [a,\beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού 0 στο διάστημα αυτό, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0 .$$

11. Αν $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, τότε το πεδίο ορισμού της F είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της f .

12. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a,\beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(a)-G(\beta) .$$

13. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx=\int_a^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx .$$

14. Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

15. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_\beta^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+c,\ c\in\mathbb{R}$$

16. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και $\int_a^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$.

17. Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε και $\int_a^\beta f(x)dx\neq 0$.

18. Αν $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε $a\in\Delta$.

19. Αν f,g είναι συνεχείς στο $[a,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_a^\beta g(x)dx .$$

20. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ και ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0 \ .$$

21. Αν $f(x)=\int_2^4\sqrt{2+t^2}dt$, τότε $f'(3)=0$.

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Να υπολογίσετε το κ έτσι, ώστε:

$$\int_1^{\kappa} \frac{x^2-4}{x^2+1}dx - \int_{\kappa}^{1} \frac{5}{x^2+1}dx = 3$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α. $\int_0^2 \left(3x^2-2x+1\right)dx$ **β.** $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx$

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x\right)dx$ **δ.** $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 \frac{x^3+7x}{x^2+5}dx + 2\int_2^1 \frac{x}{x^2+5}dx = \frac{3}{2}.$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$2\int_a^{\beta} f(x) f'(x)dx = \left(f(\beta)\right)^2 - \left(f(a)\right)^2.$$

5. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0,\ 0)$ και $B(1,\ 1)$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x)dx$, εφόσον η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$.

6. **Α.** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ **β.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu x + x\right)\eta\mu x - \eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu x + x\right)\right]dx$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_0^2 \left(x^2 - |x-1|\right)dx$. **β.** $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, αν $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x \le 0 \\ \eta\mu x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

γ. $\int_0^3 \left|x^2 - 3x + 2\right|dx$.

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ **β.** $\int_0^1 xe^{-x}dx$ **γ.** $\int_0^1 x\ln\left(9+x^2\right)dx$ **δ.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$

10. Αν είναι:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu^2 x dx,\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx,$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I+J,\ I-J,\ \ I,\ \ J.$$

11. Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει:

$$\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right)\eta\mu x dx = 2$$

Αν $f(\pi) = 1$, με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το $f(0)$.

12. Έστω οι συναρτήσεις f, g, με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha,\ \beta]$. Αν ισχύει:

$$f(\alpha) = g(a) = 0 \text{ και } f'(\beta) = g'(\beta),$$

να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^{\beta} \left(f(x)g''(x) - f''(x)g(x)\right)dx = g'(\beta)\left(f(\beta) - g(\beta)\right)$$

13. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = 3x^2$$

Α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,\ 3)$.

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο A και τον άξονα των x.

14. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=\sqrt{x-1} \text{ και } g(x)=\frac{x+1}{3}.$$

Β.2. Ψηφιακό Βοήθημα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{2x^3+3x}{x^2+1}$$

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν $x\to-\infty$.

2. **Α.** Να βρείτε την παράγουσα της συνάρτησης $f(x)=2x$, όταν η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $f(x)=2x$ στο σημείο με τεταγμένη $-2e$.

Β. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρείτε την αρχική συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

α. $f(x)=e^x+2x+\sigma\upsilon\nu x,\ D_f=\mathbb{R}$

β. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\eta\mu x+x^3,\ D_f=(-1,+\infty)$

γ. $f(x)=3\cdot4^x\ln4+2,\ D_f=\mathbb{R}$

δ. $f(x)=e^x\sigma\upsilon\nu x-e^x\eta\mu x,\ D_f=\mathbb{R}$

3. Ο συνολικός αριθμός Ν των πωλήσεων (σε χιλιάδες) ενός μοντέλου κινητού τηλεφώνου στους πρώτους 6 μήνες της κυκλοφορίας του εμφανίζει ρυθμό μεταβολής

$$N'(t)=-\frac{5}{9}t+\frac{10}{3},\ \ (0\le t\le 6 \text{ σε μήνες}).$$

Να βρείτε τον συνολικό αριθμό των πωλήσεων στο τέλος του $6^{ου}$ μήνα με δεδομένο ότι τον $3^{ο}$ μήνα οι συνολικές πωλήσεις ήταν 7,5 χιλιάδεςτηλέφωνα.

4. Να υπολογισθούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

α. $\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx$ **β.** $\int_1^2 \frac{2x^2 - x + 1}{x^2}dx$ **γ.** $\int_1^2 \left(2x - \sqrt{x}\right)dx$

δ. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx$ **ε.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sigma\upsilon\nu 2x - 2\eta\mu 2x\right)dx$ **στ.** $\int_1^e \ln^2 x dx$

ζ. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}dx$ **η.** $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4}dx$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκλήρωματα:

α. $\int_0^1 |x^2 - 1|dx$. **β.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x\right)dx$ **γ.** $\int_0^1 (x+3)\cdot e^x dx$.

δ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \cdot e^x dx$ **ε.** $\int_e^{e^2} \ln x dx$ **ζ.** $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}dx$.

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \le x < 0 \\ 1 + \eta\mu x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Α. Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{\pi} f(x)dx.$$

7. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu^3 x dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu^2 x dx$$

8. Α. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με τύπο:

$$f(x) = x \cdot e^x \ ,$$

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Β. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με τύπο:

$$f(x) = \ln x \ ,$$

τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$.

Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με τύπο:

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

και τον άξονα $x'x$.

9. Α. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x \ .$$

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \le 1 \\ 3x^2+3, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$.

10. Α. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g όπου:

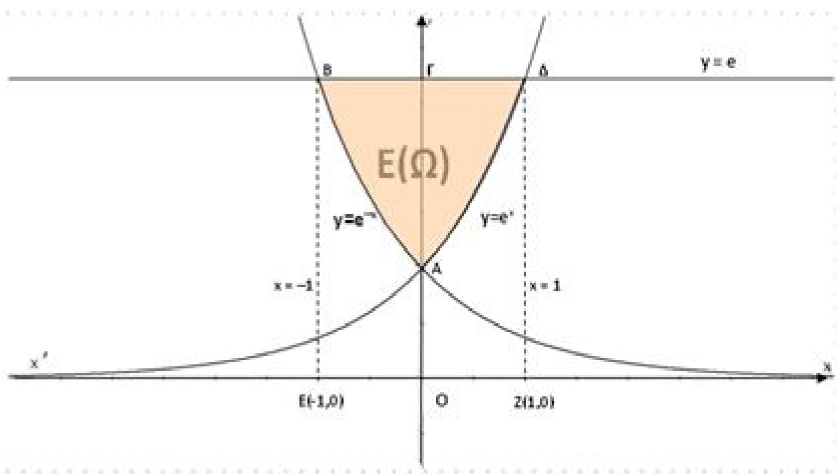
$$f(x) = x^3 \text{ και } g(x) = 7x - 6 \ .$$

Β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = e^x + 2x \ ,$$

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

11. Να βρεθεί το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του γραμμοσκιασμένου χωρίου του επόμενου σχήματος.



12. Α. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 .$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

Β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$2\ f(x) = 9 - x^2$$

και τον άξονα $x'x$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1 \text{ και } g(x) = 2x^2 + 4x - 3 \ .$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f'(x) = f(x) + 2e^x \ ,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = 2xe^x .$$

Β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1) = 0$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 F(x)dx \ .$$

14. Δίνεται η συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \ln(16 - x^2),\ x \in (-4,\ 4),$$

και Φ μια παράγουσα της φ στο $(-4,\ 4)$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \Phi(x-2)$$

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

Γ. Αν $f(4)=0$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(4, f(4)\right)$.

Δ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

15. Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x)=F(x)-8x^5,\ F(2)=0$$

με την F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

Β. Να βρείτε τη συνάρτηση f' .

Γ. Να βρείτε τον τύπο της f .

Δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν:

$$-4f(x)f'(x)+x^3+2=f^6(x)-3xf^4(x)+3x^2f^2(x),\ f^2(x)\neq x \text{ και } f(0)=1$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f^2(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\ .$$

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_{f^2} στο σημείο $M\left(0, f^2(0)\right)$.

Γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^{e-1}\left(f^4(x)-2xf^2(x)\right)dx+\int_0^{e-1}x^2dx\ .$$

Β.3. Προτεινόμενα

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=x^2,\ x>0.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η ορίζεται η $f^{-1}:\left[0,\ +\infty\right)\to\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_0^1 f^{-1}\left(x\right)dx=1.$$

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 \ln(x^2+1)dx,\quad \int_1^e \ln x dx,\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x^2-1\right)\sigma\upsilon\nu 3x dx,\ \int_0^{\pi} e^{2x}\eta\mu(2x+1)dx$$

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α. $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

Β. $\int_2^3 \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

Γ. $\int_0^1 \frac{x^3+x^2-2x}{2x+3}dx$

Δ. $\int_0^1 \frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+4}dx$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx,\ \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}dx$$

6. Να υπολογίσετε τα επόμενα εμβαδά:

Α. Του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln x,$$

και τις ευθείες:

$$x = \frac{1}{e},\ x = e$$

Β. Του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις:

$$y = x^2 \text{συν}\frac{x}{2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi$$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},\ x > 0$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτές της.

Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^{e^2} e^x dx \geq \int_1^{e^2} x^e dx$$

8. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = f(x)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Α. Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u = \pi - x$ για να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx .$$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx .$$

2. Αν είναι:

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt, \ \nu \in \mathbb{N},$$

Α. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$I_\nu + I_{\nu+1}, \ \nu \in \mathbb{N} .$$

Β. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_0, \ I_1, \ I_2 .$$

3. Α. Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{x^2},$$

τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda, \ \lambda > 0$.

Β. Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι, ώστε:

$$E(\lambda) = \frac{1}{2}.$$

Γ. Να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{\lambda \to 0} E(\lambda) \text{ και } \lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda).$$

4. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $\left[a,\ \beta\right]$. Να αποδείξετε ότι:

Α[2]. Αν $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ για κάθε $x\in\left[a,\ \beta\right]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx \geq \int_{a}^{\beta} g\left(x\right)dx .$$

Β. Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $\left[a,\ \beta\right]$, τότε:

$$m\left(\beta-\alpha\right)\leq\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx\leq M\left(\beta-\alpha\right).$$

Γ. Με τη βοήθεια της ανισότητας:

$$\varepsilon\varphi x > x \text{ για κάθε } x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\frac{\eta\mu x}{x},\, x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}\leq\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq\dfrac{3}{\pi}$ για κάθε $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ και

β. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\leq\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(x\right)dx\leq\dfrac{1}{2}$

Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\ +\infty\right)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας

$$e^{x}\geq 1+x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι:

α. $1-x^2\leq e^{-x^2}\leq 1$ για κάθε $x\in\left[0,\ 1\right]$ και

β. $\dfrac{2}{3}\leq\int_0^1 e^{-x}dx\leq 1$.

---

[2] Η πρόταση αυτή μπορεί να χρησιμοποιείται αναπόδεικτα σε ασκήσεις.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+3, & x<1\\ 2\sqrt{x} & , x<1\end{cases},$$

τις ευθείες $x=-1,\ x=2$ και τον άξονα των $x'x$.

6. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3, & x<2\\ -2x+5 & , x\geq 2\end{cases}$$

και τον άξονα των $x'x$.

7. Α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν, $E(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

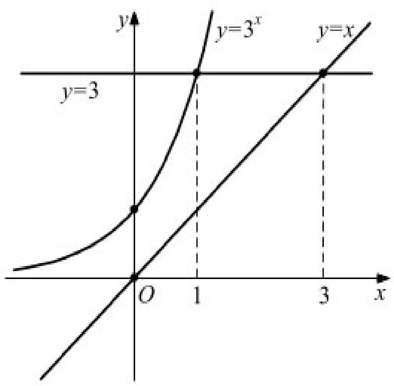
$$f(x)=\frac{e}{x},\ g(x)=\ln x\ ,$$

τον άξονα των x και την ευθεία $x=\lambda,\ \lambda>e$.

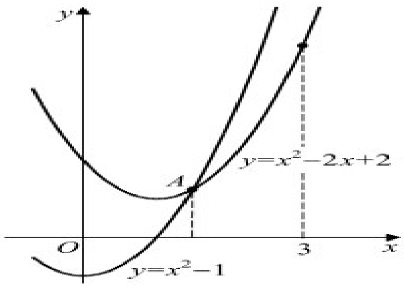
Β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda).$$

8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του επόμενου σχήματος.



9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του επόμενου σχήματος.

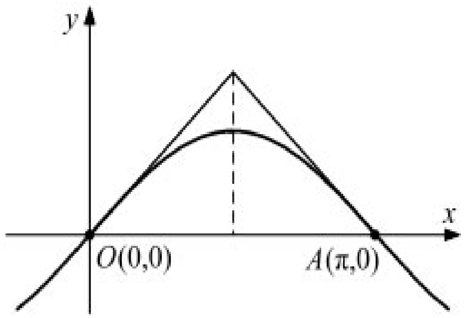


10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\eta\mu x$$

Α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $O\left(0,\ 0\right)$ και $A\left(\pi,\ 0\right)$.

Β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτόμενες στα σημεία O και A .



11. **Α.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f\left(x\right)=\sqrt{x}$$

την εφαπτόμενή της στο σημείο (1,1) και τον άξονα των x.

Β. Να βρείτε την ευθεία $x=a$, η οποία χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία

12. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \ln x,\ g(x) = \ln\frac{1}{x}$$

και την ευθεία $y = \ln 2$.

13. Α. Να βρείτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,\ 2)$ και η κλίση της στο σημείο $M\left(x,\ f(x)\right)$ είναι $2x-3$.

Β. Ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν η C_f και ο άξονας των x.

14. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-1)(x-3)$$

Α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία Α, Β που η C_f τέμνει τον άξονα των x.

Β. Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\dfrac{2}{1}$.

Γ.2. Ψηφιακό Βοήθημα

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{2e}{x}+2\ln x,\ x>0.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e} \text{ για κάθε } x>0.$$

Γ. Αν ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e} \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } \lambda>0,$$

τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e^2$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\ln x-1$$

Α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda>0$.

Β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) .$$

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M\left(e^2,\ f(e^2)\right)$

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα $x'x$.

3. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

Α. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 1 + \dfrac{1}{x},\ x > 0$ **Β.** $g(x) = \sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x + \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Γ. $h(x) = e^x + xe^x$ **Δ.** $k(x) = \dfrac{9\eta\mu 2x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}}$

4. Α. Να βρείτε την αρχική συνάρτηση F της συνάρτησης

$$f(x) = 4x^{-5} - 3xe^{x^2}$$

όταν $F(-1) = F(2) = 0$.

Β. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης:

$$f(x) = |x - 1| + 2 \ .$$

5. Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν ξέρουμε ότι $f(1) = 3$, η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = -1$, και:

$$f''(x) = 30x^4 - 2,\ x \in \mathbb{R} \ .$$

6. Σε μία επιχείρηση τα έσοδα της (σε χιλιάδες ευρώ) τον πρώτο μήνα του έτους μεταβάλλονται με ρυθμό $15 + 4x$, τις x πρώτες μέρες του μήνα και τα αντίστοιχα έξοδα της (σε χιλιάδες ευρώ) μεταβάλλονται με ρυθμό $2x + 5$. Ναβρεθούν:

Α. Τα συνολικά κέρδη της επιχείρησης το δεύτερο δεκαήμερο του μήνα.

Β. Τα κέρδη της δέκατης μέρας του πρώτου μήνα του έτους.

7. Να αποδείξετε ότι:

$$2 \le \int_0^1 \sqrt{x^2 + 4}\,dx \le \sqrt{5} \ .$$

8. Αν είναι:

$$I_\nu = \int_0^2 x^\nu e^x dx,\ \nu \in \mathbb{N}^* \ ,$$

να αποδείξετε ότι:

$$I_\nu = 2\nu e^2 - \nu I_{\nu-1}, \nu > 2$$

9. Α. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(a+\beta-x)dx$$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I} = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}dx$$

Γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-4}$$

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x-2) = 4x-8,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$$f(1) = 2$$

Α. Να αποδείξετε ότι ο τύπος f είναι:

$$f(x) = 2x^2,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Β. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο $A(1,2)$ και τον άξονα $x'x$.

11. Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

και έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(9,3)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία ε .

Β. Θεωρούμε την εφαπτομένη ε της συνάρτησης:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ στο σημείο } A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία ε και τις κατακόρυφες ευθείες $x=0,\ x=\pi$.

12. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με $f'(x) = g'(x) + 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 1, g(1) = 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και ευθείες $x = -1,\ x = 2$.

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x$$

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(1, e)$ έχει εξίσωση:

$$y = e \cdot x\,.$$

Β. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία ε, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda, \lambda < 0$.

Γ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)\ .$$

14. Α. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των

$$f(x) = 2x^2 \text{ με } x < 4\ ,\ g(x) = \frac{2}{x} \text{ με } x > 0 \text{ και } h(x) = 8x\,.$$

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + 1$ και $g(x) = -ax^2 + a$. Να βρεθεί η τιμή του $a \in (0,1)$, για την οποία η C_g χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$ σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

15. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2},\ x > 0$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Αν E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2, x = 3$, τότε να δείξετε ότι:

$$\frac{e^2}{4} < E < \frac{e^3}{9}\ .$$

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2-x+1}$$

Α. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τηνασύμπτωτη και τις κατακόρυφες ευθείες $x=0, x=1$.

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x>0$$

και η ευθεία:

$$\varepsilon\colon y=\frac{1}{a} \text{ με } \alpha\in[1,2] \ .$$

Α. Να βρεθεί το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία ε και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1, x=2$.

Β. Να βρεθεί για ποια τιμή του α , το $E(\alpha)$ γίνεται ελάχιστο.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f'(1)=f(1)=1,\ f(x)>0\,,$$

και

$$x^3 f''(x) - xf'(x)+2f(x)=0 \text{ για κάθε } x>0\,.$$

Α. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x)=e^{\frac{x-1}{x}},\ x>0\,.$$

Β. Μελετήστε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Αφού αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $[1,2]$ στη συνέχεια να αποδείξτε ότι:

$$2\int_1^2 xf(x)dx+\int_{f(1)}^{f(2)}\left(f^{-1}\right)^2(x)dx=4\sqrt{e}-1$$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και ισχύει:

$$xf'(x)=2x+1 \text{ , για κάθε } x>0 \text{ .}$$

Α. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x)=2x+\ln x,\ x>0$$

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να αποδείξετε ότι:

$$2x+\ln x\le 3x-1$$

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{2-\int_1^2 f(x)dx}{x-2}-\frac{\int_1^2 f(x)dx-3}{x-1}=0$$

έχει, ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1,2)$.

20. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν:

$$f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f'(x)f(x),\ f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{2}$$

Α. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x)=e^{\frac{x}{2}} \text{ .}$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-2}^{2} x^{2018}\ln f(x)dx \text{ .}$$

21. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^x+x^3+x-2 \text{ .}$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Δ. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$$

Γ.3. Προτεινόμενα

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -\eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$$

και το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Β. Αν $(\varepsilon_1): y = -x$ και $(\varepsilon_2): y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1 \quad ,$$

όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x'x .

Γ. Να υπολογίσετε το όριο;

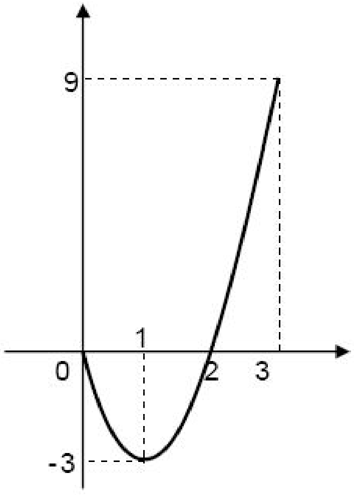
$$\lim_{x \to \pi} \frac{x - \eta\mu x}{\pi - x - \eta\mu x} \quad .$$

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi \quad .$$

2. Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, 3], για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0)=2,\ f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η $x=3$ δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(3)=2,\ f(2)=-2$$

και να βρείτε, αν υπάρχουν τα,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x},\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$$

δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Β. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}\quad .$$

Δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(0)=1,\ f'(x)+\varepsilon\varphi x\cdot f(x)-\eta\mu 2x=0$$

Α. Να βρείτε τον τύπο της f

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\frac{\pi}{4},\ x=-\frac{\pi}{4}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1,\ x=1$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x^3.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Γ. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\ge 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\ge 0$.

Δ. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=x+1-\frac{1}{x-2},\ x>2$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(2,\ +\infty\right)$

Β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E\left(\lambda\right)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=x+1,\ x=\lambda$ και $x=\lambda+1$ με $\lambda>2$.

Δ. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\left(2,\ +\infty\right)$ ισχύει:

$$E\left(\lambda\right)>\ln 2\,.$$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ από τις οποίες η f είναι άρτια και η g περιττή. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)+g(x)=e^{x}\,,$$

να υπολογίσετε:

Α. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0,\ x=\lambda$ με $\lambda>0$.

Β. Το όριο:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda)$$

8. **Α.** Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[-1,1\right]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{2\pi}xf(\sigma\upsilon\nu x)dx=\pi\int_0^{2\pi}f(\sigma\upsilon\nu x)dx$$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^{2\pi}x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$$

9. Α. Η καμπύλη $y = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ μαζί με τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = r,\ r > 0$ ορίζουν ένα επίπεδο χωρίο $\mathrm{E}(r)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\mathrm{E}(r)$ σε συνάρτηση με το r και να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{r\to+\infty} \mathrm{E}(r)$

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $\mathrm{E}(\lambda)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 4xe^{-\frac{1}{4}x^2},\ x \geq 0$$

και την ευθεία $x = \lambda,\ \lambda > 0$ καθώς και την τιμή του $\mathrm{E}(\lambda)$ όταν το λ τείνει στο $+\infty$.

Γ. α. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{3}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$F(x) = -3\ln(1+e^{-x})$$

είναι μία παράγουσα της f.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $A(\kappa)$ του χωρίου που βρίσκεται στο 1^{o} τεταρτημόριο και περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \kappa,\ \kappa > 0$ καθώς και το $\lim\limits_{\kappa\to+\infty} A(\kappa)$.

10. Α. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-a, a],\ a > 0$ και άρτια, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_0^a f(x)dx$$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}dx$$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}dx \leq \frac{\pi^3}{3}$$

11. Να αποδείξετε ότι:

Α. $\dfrac{2\pi^2}{9} < \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\eta\mu x}dx < \frac{4\pi^2}{9}$ **Β.** $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}$

12. Αν $f(a+\beta-x) = f(x)$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta xf(x)dx = \frac{a+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σχολικού Βιβλίου

1. Α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx$$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx.$$

2. Α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{1}{(u+1)(u+2)}du$$

και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα :

Β. α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+1)(\eta\mu x+2)}dx$ **β.** $\int_1^e \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx$

3. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=x^2+1$$

και την ευθεία $y=5$ χωρίζεται από την ευθεία $y=a^2+1,\ a>0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α.

Δ.2. Ψηφιακό βοήθημα

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x-2=0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

2. Έστω μια συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,2]$ και

$$\int_0^2 xf''(x)dx=0,$$

να αποδείξετε ότι:

Α. $f'(2)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$

Β. υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=f'(2)$.

3. Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu=\int_0^\pi x^\nu\cdot\eta\mu x dx, \nu\in\mathbb{N}$$

Να αποδείξετε ότι $I_\nu+\nu(\nu-1)I_{\nu-2}=\pi^\nu,\ \nu\geq 2$.

Να υπολογίσετε το I_4 .

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με:

$$f(x)=-2+\frac{2}{x} \text{ και } g(x)=3\ln x\text{, όπου } x\in(0,+\infty).$$

Α. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με:

$$h(x)=f(x)-g(x).$$

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda>0$.

Γ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{E}(\lambda)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3,\ x>0 \ \text{και} \ \lambda\in\mathbb{R}\ .$$

Α. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: y=3x$ να υπολογίσετε το λ .

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{e}{x}+\ln x+1,\ x>0$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

Β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=3^{\xi-1}\ .$$

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^x}{x+1}$$

και F μία παράγουσά της στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$ με $F(0)=1$

Α. Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$F\left(F'(\mathrm{x})-2017\right)=1\ ,$$

έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$F(x+2)-F(x+1)>f(x) \text{ για κάθε } x>0 \ .$$

Δ. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου της C_F , με τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $2\mathrm{E}>3$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με:

$$f(x)=2x^4+3\ln x+2$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1$$

έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda>0$.

Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. Αν η f^{-1} , η αντίστροφη της f , είναι συνεχής, και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^4 f^{-1}(t)dt$$

Δ.3. Προτεινόμενα

1. Α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} dx .$$

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^4} dx .$$

2. Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο και:

$$f(\kappa)=\int_a^b f(x)\sigma\upsilon\nu(\kappa x)dx .$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{\kappa\to+\infty} f(\kappa)=0 .$$

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συχεχής συνάρτηση .Για κάθε $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

Α. Αν f περιττή, τότε:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0 .$$

Β. Αν f άρτια, τότε:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_0^{a} f(x)dx .$$

Γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^{101}}{x^{100}+1} dx .$$

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0) \\ e^x\cdot\eta\mu x, & x\in[0,\pi] \end{cases} .$$

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x},\ x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\ .$$

5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,\ +\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

- $f(1)=-1$
- $f'(x)+f\left(x\right)+4e^{x-1}=\ln x+\dfrac{1}{x}+x+1$ για κάθε $x>0$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln x+x-2e^{x-1}\quad ,\quad x>0$$

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x)=\int_e^{e^2}\frac{f'(\ln t)}{t}dt$$

έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $\left(1,\ 2\right)$.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h\left(x\right)=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\ \text{με}\ x>0,$$

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{e},\ x=1$

Ε. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση:

$$g(x)=-f(x),\ x>0$$

Αν η ευθεία $x=\lambda,\ \lambda>0$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στα σημεία $\mathrm{A}_\lambda,\ \mathrm{B}_\lambda$ αντίστοιχα, να βρείτε:

α. Την ελάχιστη τιμή των αποστάσεων $(\mathrm{A}_\lambda \mathrm{B}_\lambda)$.

β. Τα όρια:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1} \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda\to0^+}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1}$$

, όπου $\mathrm{E}(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{O}\mathrm{A}_\lambda\mathrm{B}_\lambda$ και O η αρχή των αξόνων.

6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x)=x\eta\mu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad f(0)=0$$

Α. α. Να δείξετε ότι:

$$f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

β. Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu x>x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Β. Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=\left|x\varepsilon\varphi x-x^2\right|,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. α. Αν $\alpha>0$, να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x)=\alpha$ είναι μηδέν.

β. Έστω $x_1,\ x_2,\ x_3$ οι θετικές ρίζες των εξισώσεων:

$$g(x)=1,\ g(x)=2,\ g(x)=3$$

αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια,ώστε:

$$(x_2-x_1)g'(\xi_1)+(x_3-x_2)g'(\xi_2)=2$$

Δ. α. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x}$$

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ και την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$.

7. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και κυρτή και $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\frac{3\alpha}{2}} f\left(\frac{x+a}{2}\right)dx > \frac{3a}{2}\, f\left(\frac{7a}{8}\right)$$

8. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x dx=\pi$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι:

$$f(\pi)=\pi \text{ και } f'(0)=1$$

Β. α. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$

β. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Γ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}.$$

Δ. Να δείξετε ότι:

$$0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$$

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,\ +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Β. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Γ.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,\ +\infty)$.

β. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_0$, όπου ο x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,\ +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$E=\frac{-{x_0}^2-2x_0+2}{2}.$$

Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,\ +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)F(x)>xF(1)+F\left(x^2\right),\ \text{για κάθε } x>1$$

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=(x+1)e^x+\ln(x+1)-1$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

11. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_a^\beta x\big(f(x)+f(a+\beta-x)\big)dx$$

12. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx+2\int_{-1}^{1} xf^{-1}(x)dx=\pi$$

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^{\nu}(x)dx+\nu\int_{-1}^{1} x^{\nu-1} f^{-1}(x)dx=\pi\ ,$$

όπου ν άρτιος φυσικός με $\nu\neq 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu x\cdot\ln(\sigma\upsilon\nu x),\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Να βρείτε:

Α. Το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-\lambda$ και $x=\lambda$.

Β. Το όριο $\lim\limits_{\lambda\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{E}(\lambda)$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=(x^2+2)e^x,\ g(x)=x^3+x^2+2x+2$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\geq g(x)\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Β. Να βρείτε το εμβαδόβν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, την ευθεία $x=1$ και τον άξονα $x'x$.

15. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2 - \frac{12}{e^{3x} + 3}, \ x \in \mathbb{R}$$

Α. Να βρείτε τα σημεία τομής της f με τον άξονα $x'x$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και βρείτε τα σημεία καμπής.

Β. Να αποδείξετε ότι για όλα τα $t \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{3}\ln 3 - t\right) = -f\left(\frac{1}{3}\ln 3 + t\right)$$

Ποια είναι η σημασία της σχέσης αυτής για τη γραφική παράσταση της f ;

Γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Δ. Να αποδείξετε ότι για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα:

$$2 - f(x) \leq 6 \cdot e^{-\frac{3}{2}x}$$

και στη συνέχεια:

$$\int_0^1 \left(2 - f(x)\right)dx \leq 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e^3}}\right)$$

Ε. Να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = 2 - f(x), \ x \in \mathbb{R}$$

και των ευθειών $x = \frac{1}{3}\ln 3, \ x = \lambda, \ \lambda > 0$ και να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{E}(\lambda) \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

Α. Ψηφιακού Βοηθήματος (Επαναληπτικό)

ΘΕΜΑ Α

Α1.Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ ίναι παράγουσες της f στο Δ και

β. Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστή ή με Λάθος αν είναι λανθασμένη:*

α) Εάν $\alpha < \beta$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

β) $\int_\alpha^\beta f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)\ du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha),\ u_2 = g(\beta)$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, στον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a,\ x = \beta$, ισούται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

δ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0 , τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty .$$

ε) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (a,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν,

- $f(e)=0$
- $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-e^{\frac{f(x)}{x}}$, για κάθε $x>1$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x)=-x\cdot\ln(\ln x) .$$

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$(\ln x)^x=\frac{1}{m},\ x\in(1,+\infty)$$

έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $m>0$.

Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x^2+2\right)-f(3x)<3x-x^2-2$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$g'(x)=\frac{1}{3g^2(x)+\varepsilon} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και ε μια σταθερά στο σύνολο $\mathbb{R}$

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της , στο σημείο της $A\big(0,g(0)\big)$ έχει εξίσωση:

$$x-2018y+2018=0$$

Γ1. Να βρείτε τον αριθμό ε.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

$$g^3(x)+2015\cdot g(x)=x+2016 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Γ3. Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$,να αποδείξτε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και έχει τύπο:

$$g^{-1}(x)=x^3+2015x-2016\ .$$

Μονάδες 4

Γ4. Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g

Μονάδες 6

Γ5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{g^{-1}(x)}{x\cdot g(x)\cdot\big(g^2(x)+2015\big)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{\ln x}{ax},\ a\in\mathbb{R}^*$$

για την οποία ισχύει:

$$f(x)\le x-1 \text{ για κάθε } x>0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $a=1$.

Μονάδες 4

Δ2. Για $a=1$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\le \frac{1}{e} \text{ για κάθε } x>0.$$

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln^2 x+2\lambda x=0\ ,$$

έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,+\infty)$, για κάθε $\lambda<-\frac{1}{e}$.

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$1-\ln\xi=\frac{\xi^2}{e^2-e}$$

Μονάδες 5

ε. Αν η αντίστροφη της f στο $(0,e]$ είναι συνεχής να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$ τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x=\frac{1}{e}$.

Μονάδες 5

Β. Προτεινόμενο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 10

Α2. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f\left(x\right)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[a,\ \beta\right]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0.$$

β) Ισχύει:

$$\int_{a}^{\beta}\big(f(x)\cdot g(x)\big)dx = \int_{a}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \ .$$

γ) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και για κάθε $x\in[a,\beta]$ ισχύει $f(x)\geq 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού 0 στο διάστημα αυτό, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0.$$

δ) Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

ε) Αν $f(x)=\int_{2}^{4}\sqrt{2+t^2}\,dt$, τότε $f'(3)=0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x>0$$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτές της.

Μονάδες 10

Β3. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^{e^2} e^x dx \geq \int_1^{e^2} x^e dx$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 3\ln\left(x \cdot e^{1-x}\right) + 2,\ x > 0\ .$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$3f(x) + 2011 = 0\ .$$

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \lambda x + 3,\ x > 0 \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Α. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(1, f(1)\right)$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon : y = 3x$ να υπολογίσετε το λ .

Μονάδες 5

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

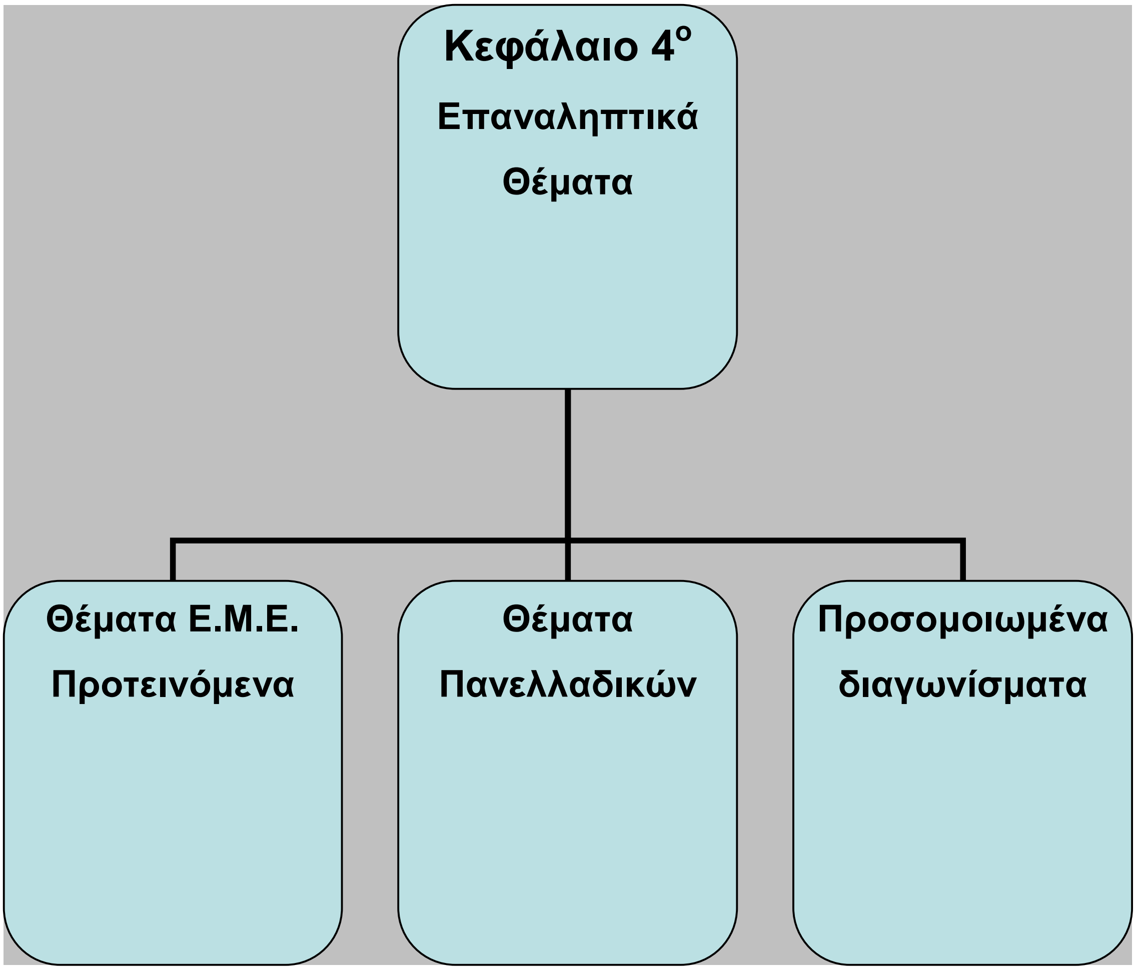
Μονάδες 7

Γ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Μονάδες 5

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$.

Μονάδες 8


Κεφάλαιο 4ο
Επαναληπτικά
Θέματα
Θέματα Ε.Μ.Ε.
Προτεινόμενα
Θέματα
Πανελλαδικών
Προσομοιωμένα
διαγωνίσματα

4.1. Επαναληπτικά Θέματα Ε.Μ.Ε

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x) - 2x^5 + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$f(x) > 2x^3 - 1$$

Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$F(x) = f(x) + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

αντιστρέφεται και να ορίσετε την F^{-1} .

2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + f(x) = \left(x^2 - \eta\mu^2 x\right)^3 \text{ (1) για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. $0 \le f(x) \le x^2 - \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Γ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

3. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,8] \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x + 2 \text{ (1) για κάθε } x \in [0,8].$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Β. $f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{3}{2}$.

Γ. Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

Δ. Οι γραφικές παραστάσεις και των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του.

4. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x+2)-5}{x-1}=6.$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(3)=5$ **β.** $f'(3)=6$.

Β. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)}.$$

Γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x)=xf(x)-3x-7\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R},$$

τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

Δ. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$g'(x)<f'(3) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$g(x)=x^6,$$

έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

5. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$g(x)=\ln f(x).$$

Αν οι πραγματικοί αριθμοί $a,\ \beta,\ \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $a<\beta<\gamma$ και οι $f(a),\ f(\beta),\ f(\gamma)$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

Α. Υπάρχουν $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$f(x_2)\cdot f'(x_1)=f(x_1)\cdot f'(x_2).$$

B. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) = \left(f'(\xi)\right)^2 .$$

6. Έστω οι συναρτήσεις $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(0) = 2e$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 2e^x + e^y + 3 \text{ για κάθε } x,\ y \in \mathbb{R} \ (1)$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \text{ και } g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2 .$$

Β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$f,\ g \text{ και } f - g .$$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων $f,\ g$ αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3} .$$

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = (a+1)^x - a^x,\ a > -1 .$$

Α. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f, για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Δ. Να λύσετε το σύστημα :

$$3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19 .$$

8. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,\ 1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\ 1)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(1)=0$ και
- $2\sqrt{1-x}\cdot f'(x)=1+\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln x-\sqrt{1-x},\ x\in(0,\ 1].$$

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

β. το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 f^{-1}(x)\right).$$

Γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

Δ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

9. Έστω η συνάρτηση $f:[2,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(2)=0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,\ +\infty)$ και κυρτή στο $(2,\ +\infty)$, τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x-2}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,\ +\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(2x-9)\,f(x+6)=(7x-32)\,f(x),$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,\ 5)$.

Αν επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}=\frac{1}{6}$$

Γ. α. Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

10. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\left(3x^2 f^2(x)-1\right) f'(x)+xf''(x)=0$, για κάθε $x\neq 0$
- $f(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $f'(1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}.$$

Β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)+f(3x)=f(2x)+f(5x).$$

Δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$h(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι:

$$f^2\left(\frac{a+\beta}{2}\right)< f(a)f(\beta) \text{ για } 1<\alpha<\beta$$

11. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$$

και F μία αρχική της f.

Έστω ακόμα μία συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$F\left(g(x)\right)=e^{g(x)}\left[\frac{1}{x}+\ln x\right], x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι $g(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$g(x)=e^{x}\left(x^{2}+1\right).$$

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$

Δ. Αν για τη συνεχή συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h\left(g(x)+x-3\right)=f(h(x)+h(x)-3, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y=x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=2e-1.$$

12. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-\dfrac{x^{2}+y^{2}}{xy}$, για κάθε $x,\ y\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$.

Β. Να βρείτε το $f(1)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\ x\in\left(0,+\infty\right).$$

Δ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot f(x)\right).$$

Ε. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x\cdot\left(x+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\right)=x-1$$

στο διάστημα $\left(0,+\infty\right)$.

Γ. Αν g είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $a>0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(f(x))\frac{\ln x}{x}dx\,.$$

13. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\ln x+2xf'(x)=0$
- $f(x)>0$, για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$
- $f(1)=e$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}},\ x\in\left(0,+\infty\right).$$

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι:

$$2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\geq 3-x\,.$$

Δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{e}^{e^2} f^{-1}(x)\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)dx\,.$$

Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$e+\sqrt[7]{e}>2\sqrt[5]{e}\,.$$

14. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(-x)\cdot f(x)=-x$, για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$ και $f(0)=1$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(-x)}{f(x)},\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο και να προσδιορίσετε.

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

Ε. Αν $h(x)$ είναι μία αρχική συνάρτηση της f, να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x)$.

ΣΤ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_h, τις ευθείες με εξισώσεις $x=0, x=1$ και τον άξονα $x'x$.

15. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, και μια αρχική συνάρτηση F της:

$$h(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}$$

οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(f''(x)-1\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\left(F(x)+F(-x)\right)=0,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
- $f''(0)+1=f'(0)=f(0)=0$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$F(x)+F(-x)=\eta\mu x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x),\ x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta\ .$$

Ε. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}.$$

4.2. Προσομοιωμένα Διαγωνίσματα

1ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται «1-1» σε ένα σύνολο Α;

Μονάδες 4

Α2. Αν $c>0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{a}^{\beta} cdx$ ($\alpha<\beta$);

Μονάδες 4

Α3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(f+g\right)'\left(x_0\right)=f'(x_0)+g'(x_0)\ .$$

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα $f\left(\Delta\right)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν η f είναι συνεχής στο $\left[a,\beta\right]$ με $f\left(\alpha\right)<0$ και υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$**,** ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ΄ανάγκη $f\left(\beta\right)>0$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β], στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

δ. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A, τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο A.

ε. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -1} f(x).$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x\neq 0,\ x\neq 1 \ \textit{και}\ x\neq -1\\ \kappa, & \text{αν } x=1\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases} \qquad \text{και}$$

$$g(x)=f(x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x>0 \quad .$$

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Μονάδες 6

Γ2. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

β. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \le \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}, \text{ αν } x>1 \text{ και } e^{-x^2+1} \ge \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}, \text{ αν } 0<x<1$$

Μονάδες 2x4=8

Γ3. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $(0,\ +\infty)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A(2,\ g(2))$ και $B(1,\ g(1))$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}(7-3x) \le e^{-x^2}(x-1), \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right) \quad \text{και}$$

$$e^{-x^2} \ge e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right).$$

Μονάδες 5+ 6=11

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R},\ \mathrm{A} = (0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)}\left(f^2(x) - 2f(x) + 3\right) = x.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Μονάδες 6

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 3\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 8

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x,\ f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x),\ x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων $A,\ B$ γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή του.

Μονάδες 6+5=11

2ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μίας συνάρτησης f στο διάστημα Δ;

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Μονάδες 3+7

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f εκτός από το κοινό τους σημείο.

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx .$$

γ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0 .$$

δ. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε $f''(x_0) = 0$.

ε. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx .$$

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

Μονάδες 6

Β3. Να ορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη .

Μονάδες 4

Β5. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot \ln x, \; x > 0 .$$

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 .$$

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο

$A\left(x_0, f(x_0)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

Μονάδες 6

Γ4. α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$, $x = e$.

Μονάδες 4+ 5=9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(0) = f(0) = 0,$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x \left(f'(x) + f''(x) - 1 \right) = f'(x) + xf''(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln\left(e^x - x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln\left(e^x - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \left(e^x - 1\right) \frac{f(x)}{e^x - x} dx.$$

Μονάδες 4

3ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0;

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 10

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

β. Ανάμεσα σε δύο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

γ. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\ \beta \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_\beta^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

δ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0}\left(f(x) - l\right) = 0$$

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \ln\left(3e^x + 1\right) - 2$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

Β3. Να ορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 8

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x\right) < f^{-1}\left(\ln 5 - 2\right) - 2 .$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται συνάρτηση :

$$f(x) = e^x - \ln\left(x+1\right) - 1 .$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ2. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 2x5=10

Γ3. Αν για τους αριθμούς $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln\left(2\alpha + \beta\right) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln\left(\alpha + 2\beta - 1\right) \le 2 ,$$

να υπολογίσετε τους $a,\ \beta$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1,\ +\infty)$ με:

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + x\ln x}{x\ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \quad \text{με} \quad f(e) = e^e.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x \cdot \ln x,\ x > 1$$

καθώς και ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^x,\ h(x) = \ln x$$

δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1,\ +\infty)$.

Μονάδες 4

Δ2. α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \frac{\lambda}{x} \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R},\ x > 1.$$

Μονάδες 4x2=8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e,\ f(e))$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (1+e)x - e^2$, για κάθε $x > 1$.

β. $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx \geq e^{e-1} \cdot \frac{5 + 5e - 2e^2}{2}$.

Μονάδες2x3= 6

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \text{για κάθε } x_1,\ x_2 \in (1,\ +\infty) \text{ με } x_1 < x_2$$

Μονάδες 3

4ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\ \beta]$;

Μονάδες 4

Α2. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα $(a,\ \beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f συνεχής με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε ισχύει πάντοτε:

$$\int_a^\beta f(x)dx\neq 0.$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(a,\ \beta)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου:

$$A=\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ και } B=\lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

γ. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ «κοντά» στο x_0.

δ. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ε. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση C_f της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & \text{αν } x<0 \\ \lambda, & \text{αν } x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Β1. Να δείξετε ότι $\kappa=2$ και $\lambda=4$.

Μονάδες 8

Β2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=2\ln(8x+1)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω μία συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1)=0\ ,\quad f'(1)=1$$

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=2\ln x+3,\ \text{για κάθε}\ \ x>0.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-x\left(2\ln x+1\right),\ x>0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\left(0,\ +\infty\right)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln x,\ x>0.$$

Μονάδες 5

Γ3. **α.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Αν ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t)>1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{fof} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με $1\,cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία $x(t_0)=2\ cm$.

Μονάδες4+6=10

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|<\sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}\ \text{για κάθε}\ a,\ \beta\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right]\ \ \text{με}\ a<\beta.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^5+x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$$

Δ1. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

β. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{5x}+e^{3x+2}+e^{x+4}\ge e^5\cdot x\left(x^4+x^2+1\right),\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 3+ 4=7

Δ2. **α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1)$.

β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6+3x^4+6x^2-12x \geq 2x_0{}^6+3x_0{}^4+6x_0{}^2-12x_0 .$$

Μονάδες 2x4=8

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$3<\frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2-\xi_1}<42 \quad , \text{με } 0<\xi_1<\xi_2<1.$$

Μονάδες 4

Δ4. α. Να αποδείξετε ότι:

$$3\int_0^1 e^{x^2}dx \geq 4 .$$

β. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0, το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \left| f^{-1}(x) \right| dx .$$

Μονάδες 2x3=6

5ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) της γραφικής παράστασης C_f μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$;

Μονάδες 4

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\nu}, \nu\in\mathbb{N}-\{0,\ 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει:

$$f'\left(x\right)=\nu x^{\nu-1},\ \text{δηλαδή}\ \left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}.$$

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

β. Αν $f(x)=\int_2^4\sqrt{2+t^2}\,dt$, τότε $f'(3)=0$.

γ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε υποχρεωτικά $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left(fof\right)(x)+2f(x)=2x+1,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\ \ \text{και}\ f(2)=5\,.$$

Β1. Να βρείτε το $f(5)$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

Μονάδες 6

Β4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}\left(2x^2+7x\right)-1\right)=2\,.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με g παραγωγίσιμη στο $\left(1,\ +\infty\right)$, για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x)=x(x+a)-x+1\ \text{με}\ a,\ x\in\mathbb{R}\,,$$

$$f(x)-1\geq 0\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\ \text{και}$$

$$g'(x)\ln x=\frac{2g(x)}{x}\,,\ \text{για κάθε}\ x>1$$

Γ1. Να δείξετε ότι $a=1$.

Μονάδες 3

Γ2. Αν $g(e)=-1$, να δείξετε ότι:

$$g(x)=-\ln^2 x\,,\ \text{για κάθε}\ x\in\left(1,\ +\infty\right).$$

Μονάδες 5

Γ3. Αν είναι:

$$g(x)=-(\ln x)^2\ \text{σε όλο το διάστημα}\ \left(0,\ +\infty\right)\ .$$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0 \in (0,\ 1)$, για την οποία η διαφορά $f(x)-g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

β. Να αποδείξετε όι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων $M,\ N$ με $M\left(\xi,\ f(\xi)\right)$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και $N\left(\xi,\ g(\xi)\right)$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi \in (0,\ +\infty)$, στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία M και N αντίστοιχα.

Μονάδες 5+4=9

Γ4. α. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\dfrac{g(x)}{f(x)}}\right]$$

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g αντίστοιχα και των ευθειών $x=1,\ x=e$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)+f(1-x)=0\,,\quad f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)=2f(1)\,.$$

Μονάδες 3

Δ3. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}\ ,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

Μονάδες 4

Δ4. α. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x)dx=0\,.$$

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x)dx=1$ καθώς και ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και τις ευθείες $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$.

Μονάδες 3+4=7

Δ5. α. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda)=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx+\int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx\ ,\ \text{όπου}\ \ \lambda>\frac{1}{2}\,.$$

β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{K(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}$$

Μονάδες4+ 3=7

6ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών **(Μονάδες 2)** και στη συνέχεια να το αποδείξετε **(Μονάδες 4).**

β. Να δώσετε ένα παράδειγμα, σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα, μιας συνάρτησης f που δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, η οποία δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα $f(\alpha),\ f(\beta)$

Μονάδες 2

Α2. Να βρείτε το **λάθος** στον επόμενο συλλογισμό **(Μονάδες 2).**

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **(Μονάδες 2).**

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=-I$$

(θέσαμε $x=\frac{1}{u}$, οπότε $dx=-\frac{1}{u^2}du$).

Άρα $I=-I$, οπότε $\mathrm{I}=0$.

Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx>0\text{, επειδή }\frac{1}{1+x^2}>0\text{ για κάθε }x\in[-1,\ 1]\ .$$

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f,\ g,\ h$ είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$.

β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$, το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $[f(\alpha),\ f(\beta)]$ ή $[f(\beta),\ f(\alpha)]$.

γ) Αν για κάθε συνάρτηση f και για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ ,$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

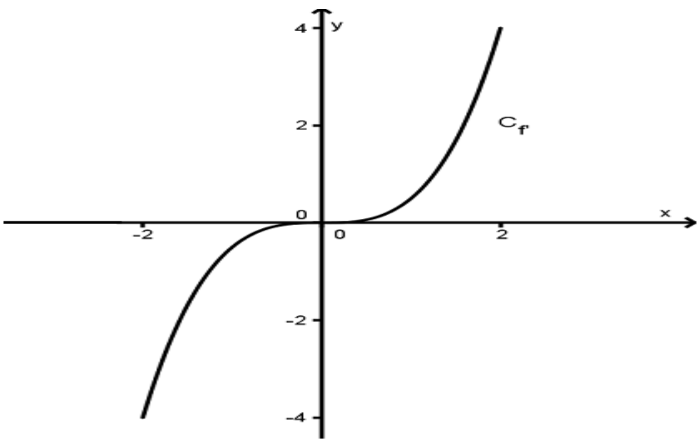
δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) Για όλες τις συνεχείς στο R συναρτήσεις με:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx\ \ (\alpha,\ \beta,\ \gamma\in R)\ \text{, ισχύει }\ \beta=\gamma\ .$$

Μονάδες 5x2= 10

Α4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2,\ 2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **(Μονάδες 2)** και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας **(Μονάδα 1).**



Το σημείο $A\big(0,\ f(0)\big)$ είναι:

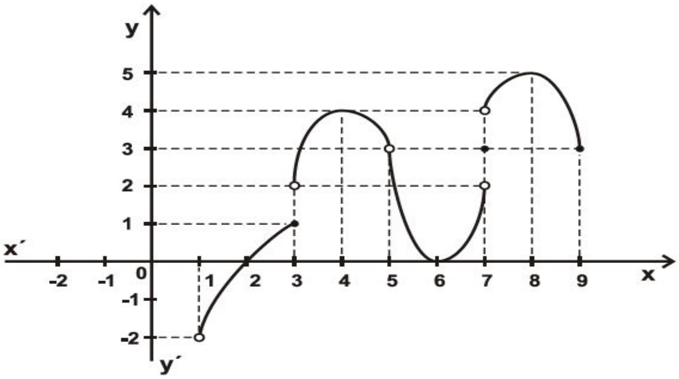
1. θέση τοπικού μέγιστου της f ,

2. θέση τοπικού ελάχιστου της f ,

3. σημείο καμπής της C_f **.**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει:

$$f'(x_0) = 0.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha \in (-1,\ 0)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$e^{\alpha} + 2\alpha + 1 = 0 .$$

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι:

$$f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου α ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \frac{2017}{2016}.$$

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^2+1) + f(x^2+2) < f(x^2) + f(x^2+3) \text{ , για κάθε } x > 0$$

Μονάδες 5

Γ5. Έστω ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0, με $x(t_0) \in (-1,\ 0)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M , ως προς τον χρόνο, να μηδενίζεται.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x)=x\eta\mu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad f(0)=0$$

Δ1. α. Να δείξετε ότι:

$$f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu x>x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Μονάδες 2

Δ2. Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=\left|x\varepsilon\varphi x-x^2\right|,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ3. α. Αν $\alpha>0$, να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x)=\alpha$ είναι μηδέν.

Μονάδες 4

β. Έστω $x_1,\ x_2,\ x_3$ οι θετικές ρίζες των εξισώσεων

$$g(x)=1,\ g(x)=2,\ g(x)=3$$

αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$(x_2-x_1)g'(\xi_1)+(x_3-x_2)g'(\xi_2)=2$$

Μονάδες 4

Δ4. α. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x-f(x)\right]-\ln x+x^2}{\eta\mu^2x-x\sigma\upsilon\nu x+x}$$

Μονάδες 3

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ και την ευθεία $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Μονάδες 5

7ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν ισχύουν:

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ,
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Μονάδες 6

Α2. α. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 3

β. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού; (Να κάνετε πρόχειρο σχήμα).

Μονάδες 6

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση $f : A \to R$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2)\ .$$

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

γ. Αν $f(x) = \alpha^x,\ \alpha > 0$, τότε $f'(x) = \alpha^x$.

δ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

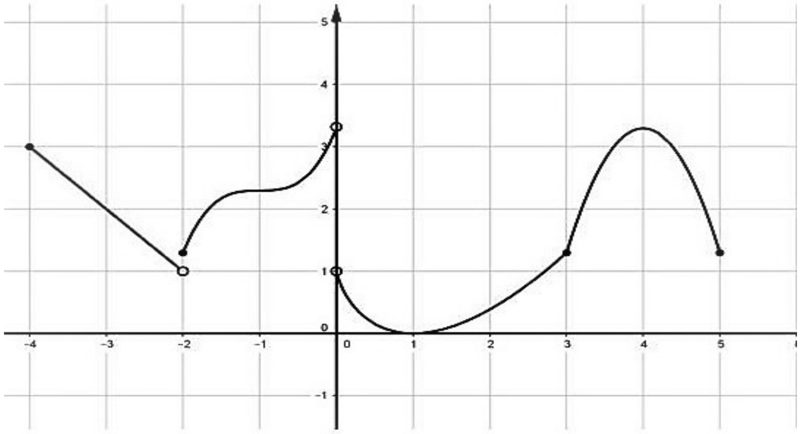
ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\ \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\ \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 5x2= 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-4,0)\cup(0,5]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 3

Β2. Να βρείτε το όρια: **α.** $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ και **β.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Μονάδες 4

Β3. α. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $(0,\ 5]$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την παράγωγο της f , όταν $x\in(-4,\ -2)$.

Μονάδες 2

Β4. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται;

$$\mathrm{I} = \int_{2}^{4} f(x)dx \ ,\ \ J = \int_{-1}^{0} f(x)dx$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Β5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = x+1$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog .

Μονάδες 4

β. Να εξηγήσετε πως με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης fog .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το $\mathrm{A}(-1,\ -1)$.

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. Ίσχύει:

$$\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| \le |x-y| \le |f(x) - f(y)| \text{ για κάθε } x,\ y \in \mathbb{R}$$

β. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 2x3= 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$$

Μονάδες 6

Γ5. Αν για την παράγουσα F της f' ισχύει:

$$F^2(x) \ge F(x)F(2-x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της F .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

- $f(1)=-1$
- $f'(x)+f(x)+4e^{x-1}=\ln x+\dfrac{1}{x}+x+1$ για κάθε $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln x+x-2e^{x-1}\quad,\quad x>0$$

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x)=\int_e^{e^2}\frac{f'(\ln t)}{t}dt$$

έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(1,\ 2)$.

Μονάδες 3

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x)=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\ \text{με}\ x>0,$$

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{e},\ x=1$.

Μονάδες 5

Δ5. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση:

$$g(x)=-f(x),\ x>0$$

Αν η ευθεία $x=\lambda,\ \lambda>0$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στα σημεία A_λ, B_λ αντίστοιχα, να βρείτε:

α. Την ελάχιστη τιμή των αποστάσεων $(A_\lambda B_\lambda)$.

Μονάδες 3

β. Τα όρια:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{E(\lambda)}{\lambda^2+1}\quad \text{και}\quad \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{E(\lambda)}{\lambda^2+1}$$

όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $OA_\lambda B_\lambda$ και O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

4.3. Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων

2016

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο $(a,\ x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0,\ \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{a}^{\beta} f(t)dt = G(a) - G(\beta)$.

β. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ. Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

δ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της , η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

B1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^o

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση:

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν:

$$f\left(x\right)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3 , να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\left|\eta\mu x\right|+3\right)-f\left(\left|\eta\mu x\right|\right)=f\left(x+3\right)-f\left(x\right),\ \text{όταν}\ x\in\left[0,\ +\infty\right).$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot\eta\mu x dx=\pi$, $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f\left(\pi\right)=\pi$ **(μονάδες 4)** και $f'\left(0\right)=1$ **(μονάδες 3)**

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$ **(μονάδες 4)**

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **(μονάδες 2)**

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f\left(x\right)}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι:

$$0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$$

Μονάδες 6

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

β. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

γ. Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

δ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της , η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

Β1. Να βρείτε την τιμή του a, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 7

Β2. Αν $a=1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Μονάδες 11

Β3. Για την παραπάνω τιμή του a, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 7

Γ2. Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f''.

Μονάδες 11

Γ3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x)\cdot f'(x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1$$

Δ1. Να δείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 8

Δ2. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right).$$

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, \ +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Μονάδες 4

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

β. Αν $f(x)=|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

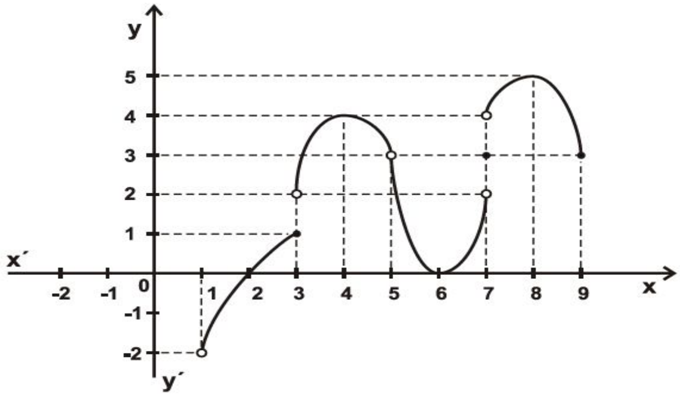
ε. Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx>0, \text{ τότε } \quad f(x)>0 \text{ στο } [\alpha,\beta]$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει:

$$f'\left(x_0\right) = 0 .$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x^3.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,\ +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Μονάδες 8

Δ3.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

β. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$, όπου ο x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{-x_0^{\,2} - 2x_0 + 2}{2}.$$

Μονάδες 4

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2), \text{ για κάθε } x > 1$$

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

β. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

γ. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

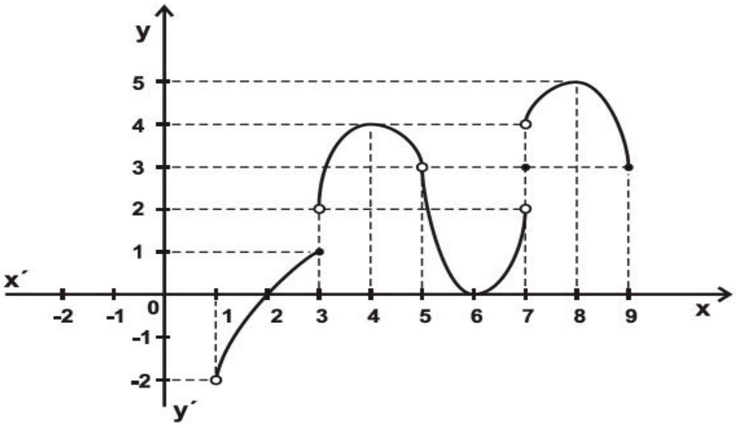
δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$, όπου O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'\left(x_0\right)=0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\le 0\\ -x+1, & x>0\end{cases}$$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f.

Μονάδες 8

Γ2. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $\left[-1,\ 1\right]$.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x^3.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Μονάδες 9

Δ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\ge 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\ge 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}\right)=f(x).$$

Μονάδες 6

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x / \sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει:

$$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Μονάδες 10

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στοτετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

β. Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου της f, για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

γ. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$.

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\ \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\alpha x-1}{x+1},\ x\neq -1,$$

όπου το a είναι ένας πραγματικός αριθμός .

Β1. Να βρείτε την τιμή του a, ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(3,\ 2)$.

Μονάδες 5

Αν $a=3$ τότε:

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3-x},\ x\neq 3.$$

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσων f και f^{-1}.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x+1-\frac{1}{x-2},\ x>2$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(2,\ +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=x+1$, $x=\lambda$ και $x=\lambda+1$ με $\lambda>2$.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in(2,\ +\infty)$ ισχύει:

$$E(\lambda)>\ln 2.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x.$$

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^{x}\right)}{e^{f(x)}}.$$

Μονάδες 5

2017

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μονάδα 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0 .$$

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\ln x,\ x>0 \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x}{1-x},\ x\neq 1.$$

Μονάδες 5

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog

Β2. Αν :

$$h(x)=\left(fog\right)(x)=\ln\frac{x}{1-x},\ x\in(0,1),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν:

$$\varphi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R},$$

να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -\eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$$

και το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y = -x$ και $(\varepsilon_2): y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1 \quad ,$$

όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x'x .

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο;

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x - \eta\mu x}{\pi - x - \eta\mu x} \quad .$$

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\cdot \eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\ .$$

Μονάδες 8

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$$

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+\beta, & x\le 0 \\ x+5, & x>0 \end{cases}$$

Β1. Να δείξετε ότι $\beta=5$.

Μονάδες 8

Β2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(1, f(1)\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x-1},\ x\ge 1 \text{ και } g(x)=\frac{3-5x}{x-2},\ x\neq 2.$$

Γ1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog .

Μονάδες 7

Γ2. Αν:

$$\varphi(x)=(fog)(x)=\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}},\ x\in\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$$

να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\in[-1,\ 0)\\ \eta\mu x, & x\in[0,\ \pi]\end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\ \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 8

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\ \pi)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0,\ f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $M(0,\ 3)$.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ-ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. **(μονάδα 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Ν*α γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε:

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε σενεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε!

$$\int_a^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(a)$$

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο $M\left(a,\beta\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'\left(\beta,\alpha\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

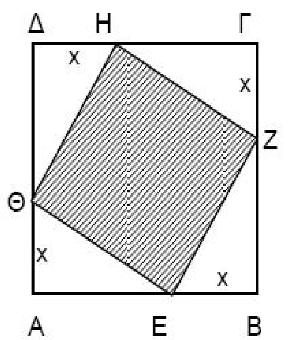
δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\beta\right)$, αν $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του επόμενου σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ 0 \le x \le 2$$

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

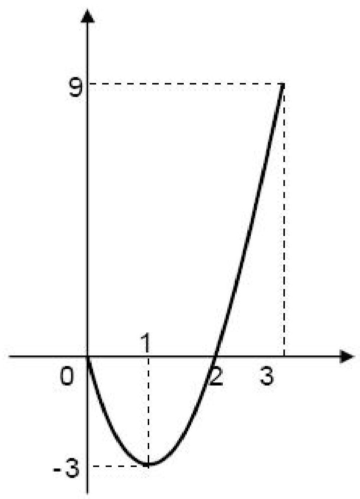
Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1\ cm^2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, 3], για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2,\ f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ ισούται με 8 τ.μ.

- Η $x=3$ δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2$, $f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$$

δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f ,

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$$

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}+a, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0\\ x^3-3x^2+2, & x>0\end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $a\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Μονάδες 7

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)$$

έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

Μονάδες 6

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. **(μονάδα 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Να *γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε:

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε σενεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(a)$$

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο $M\left(a,\beta\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'\left(\beta,\alpha\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}},\ x \in \mathbb{R}$$

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

Μονάδες 5

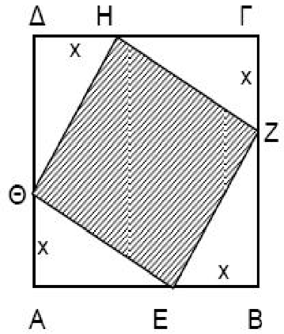
Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 e^x h(x)dx\ .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του επόμενου σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Γ1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ 0 \le x \le 2$$

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

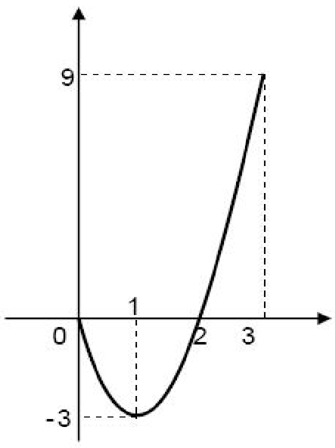
Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1\ cm^2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, 3], για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0)=2,\ f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η $x=3$ δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2$, $f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x},\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$$

δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Δ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f ,

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}.$$

Μονάδες 5

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

4.4. Δέκα απαιτητικά θέματα (3^{ο} και 4^{ο})

1. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x + c - 2\sqrt{c \cdot x}\text{, όπου } x,\ c > 0$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = x + c_1 - 2\sqrt{c_1 \cdot x}\text{, όπου } x,\ c_1 > 0 \text{ και } c_1 > c\,.$$

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των σναρτήσεων $f,\ g$ τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (c,\ c_1)$.

Γ. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης $h = |f - g|$ χωρίς τη χρήση των απολύτων τιμών.

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2\,.$$

Α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}\,.$$

Γ. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(e^x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ. Να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \text{ και } g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f(x)+\frac{1-e^2}{2e}\right)=0.$$

Γ. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog.

Δ. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f.

4. Έστω η συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x)>\ln x, \text{ για κάθε } x>0$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=0, \text{ για κάθε } x>0$$

Α. Να υπολογίσετε το $f(1)$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln x,\ x>0.$$

Γ. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \text{ για κάθε } x\in(0,\ +\infty).$$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$g(x)=e^{-2}.$$

Δ. Να αποδείξετε ότι $g(x)<x$ για κάθε $x>0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=e^{x}+x,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Α. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)=e^{x^2}+x^2 \text{ στο σύνολο } \left(0,\ +\infty\right).$$

Β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(\ln x\right)>f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ στο σύνολο } \left(0,\ +\infty\right).$$

Γ. Έστω οι συναρτήσεις:

$$g\left(x\right)=e^{|\eta\mu x|}-|x|,\ x\in\mathbb{R} \text{ και } h\left(x\right)=e^{|x|}-|\eta\mu x|,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Να βρείτε το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων C_f, C_g των f και g αντίστοιχα.

Δ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\eta\mu x}-\eta\mu x-1}{\ln\left(\eta\mu x+1\right)}\,.$$

6.

Α. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[-\alpha,\ \alpha]$, $\alpha>0$ και άρτια. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$$

Β. Έστω η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\left[0,\ 2\right]$, σύνολο τιμώ το $\left[1,\ \frac{1}{4}e^{2a}\right]$, $a<0$ με συνεχή παράγωγο και γνησίως αύξουσα.

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{2}\left|\frac{ag(x)-g'\left(x\right)}{g^{2}(x)}\right|dx\geq 5\,.$$

Γ. Αν μια συνεχής συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot h\left(h(x)\right) dx \geq 2h\left(h(0)\right).$$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Α. Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx.$$

Γ. Έστω τα ολοκληρώματα:

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2}\, dx \ \text{ και } \ J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

α. Να δείξετε ότι $K = \sqrt{3} - I$.

β. Να υπολογίσετε τα $K,\ J$.

(Sujet national Bac. 95)

8.

Α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{t}{\left(1 + t\right)^\nu} dt,\ \nu \in \mathbb{N}$$

για:

α. $\nu \geq 3$ **β.** $\nu = 1$ και $\nu = 2$

Β. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία έχει στο $\left[a,\ \beta\right]$ παράγωγο $\nu + 1$ τάξης συνεχή. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta \frac{\left(\beta - t\right)^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)} dt = f\left(\beta\right) - f\left(a\right) - \left(\beta - \alpha\right) f'\left(\alpha\right) - \ldots - \frac{\left(\beta - \alpha\right)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}\left(\alpha\right)$$

(είναι $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot \nu$).

Γ. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \varepsilon\varphi x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Να αποδείξετε ότι $g^{(\nu)}(x) = P_{\nu+1}(u)$, όπου $P_{\nu+1}(u)$ είναι πολυώνυμο $\nu+1$ βαθμού ως προς τη μεταβλητή $u = \varepsilon\varphi x$.

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ και } e^x \cdot f'(x) = f(x) - f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x},\ x \in \mathbb{R}$$

Β.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f(x)\right) > \frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}.$$

Γ. Αν:

$$g(x) = \ln x\ (x > 0),$$

να δείξετε ότι:

$$\left(fog\right)^{-1} = g^{-1}of^{-1}\ .$$

Δ.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε, συναρτήσει του x_0, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = x$ και $x = 0$.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} f^{-1}(x)dx.$$

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^3(x)+f(x)=x^3+3x^2+4x+2 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Β.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(-2,0)$

β. Να λύσετε την ανίσωση :

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)>f\left(f(0)\right).$$

Γ. Αν για την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(g(x)-4x\right)=f\left(3-x^2\right)\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να βρείτε το x_1 στο οποίο η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h=f^3+f$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=0$.

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α

Α. Εξεταστέα ύλη

ΔΙΔΑΚΤΕΑ-ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2017-2018

ΤΑΞΗ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση

Από το βιβλίο «Μαθηματικά» Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου των Ανδρεαδάκη Στ., κ.ά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ	ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ	Δ.Ω.	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1^{Ο} **Όριο -Συνέχεια συνάρτησης**	**1.1.** Πραγματικοί αριθμοί.	**1**	
	1.2. Συναρτήσεις.	**3**	
	1.3. Μονότονες συναρτήσεις- Αντίστροφη συνάρτηση.	**4**	
	1.4 . Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$.	**3**	
	1.5. Ιδιότητες των ορίων.	**6**	Χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου "Τριγωνομετρικά όρια"
	1.6. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	**4**	
	1.7. Όριο συνάρτησης στο άπειρο.	**4**	
	1.8. Συνέχεια συνάρτησης.	**12**	
	ΣΥΝΟΛΟ	**37**	
2^{Ο} **Διαφορικός Λογισμός**	**2.1.** Η έννοια της παραγώγου.	**7**	Χωρίς την υποπαράγραφο "Κατακόρυφη εφαπτομένη"
	2.2.Παραγωγίσιμες συναρτήσεις-Παράγωγος συνάρτηση.	**2**	Χωρίς τις αποδείξεις των τύπων $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ στη σελίδα 106 και $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

			στη σελίδα 107.
	2.3. Κανόνες παραγώγισης.	**5**	Χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων
	2.4. Ρυθμός μεταβολής.	**4**	
	2.5. Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.	**4**	
	2.6. Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.	**6**	
	2.7. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	**5**	Χωρίς το θεώρημα της σελίδας 146 (κριτήριο της 2ης παραγώγου).
	2.8. Κυρτότητα- Σημεία καμπής συνάρτησης.	**4**	Θα μελετηθούν μόνο οι συνα ρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό τουπεδίου ορισμού τους.
	2.9. Ασύμπτωτες -Κανόνες De L' Hospital.	**4**	
	2.10. Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	**1**	
	ΣΥΝΟΛΟ	**46**	
3^ο **Ολοκληρωτικός Λογισμός**	**3.1.** Αόριστο ολοκλήρωμα.	**2**	Μόνο η υποπαράγραφος «Αρχική συνάρτηση» που θα συνοδεύεται από

			πίνακα παραγουσών συναρτήσεων ο οποίος θα περιλαμβάνεται στις διδακτικές οδηγίες
	3.4. Ορισμένο ολοκλήρωμα	**5**	
	3.5. Η συνάρτηση[1] $F\left(x\right)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.	**5**	
	3.7. Εμβαδόν επιπέδου χωρίου.	**4**	Χωρίς την εφαρμογή 3 της σελίδας 230.
	ΣΥΝΟΛΟ	**16+4= 20**	Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων
	<u>Παρατηρήσεις:</u> **1.** Η διδακτέα-εξεταστέα ύλη θα διδαχτεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων. **2.** Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δεν διδάσκονται και δεν εξετάζονται. **3.** Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων		

[1] **<u>Υπόδειξη --οδηγία</u>**:
Διατυπώνεται **χωρίς να αποδειχτεί** η πρόταση:
«Αν $f:\Delta\to\mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα, είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε α η συνάρτηση: $F\left(x\right)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f»,
και με τη βοήθεια αυτής **αποδεικνύεται το Θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης.**
Η εισαγωγή της συνάρτησης γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για το λόγο αυτό **δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγώγιση της συνάρτησης** $F\left(x\right)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ **και γενικότερα της συνάρτησης** $F\left(x\right)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$.

	ή την απόδειξη άλλων προτάσεων. **4.** Εξαιρούνται από την εξεταστέα--διδακτέα ύλη οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του e και του 10.

Β. Οδηγίες διδασκαλίας

<u>Διαχείριση της ύλης</u>

<u>ΗΜΕΡΗΣΙΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ</u>

Στις φετινές οδηγίες κρίθηκε σκόπιμο να συμπεριληφθούν χρήσιμες προτάσεις που, χωρίς να ανήκουν στην εξεταστέα ύλη, διευκολύνουν τη διδακτική διαδικασία.

Για διδακτικούς λόγους αλλά και για λόγους ανάδειξης της αξίας της αποδεικτικής διαδικασίας (επικύρωση της μαθηματικής αλήθειας, διεύρυνση της κατανόησης) κρίθηκε σκόπιμο να αναφέρουμε και την απόδειξη ορισμένων εξ αυτών κάτι, που κάνοντας ο καθηγητής στην τάξη, δεν εξηγεί μόνο το πώς και το γιατί της συγκεκριμένης πρότασης, αλλά διευρύνει και το μεθοδολογικό «οπλοστάσιο» του μαθητή, πέρα από το γεγονός ότι μπορούν να αποτελούν εργαλεία για τη λύση των ασκήσεων.

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Ανάλυση

<u>Κεφάλαιο 1ο</u> <u>(Προτείνεται να διατεθούν 37 διδακτικές ώρες)</u>

Ειδικότερα:

§1.1 (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι’ αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ’ υπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει “αφορμές” στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

§1.2 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στις έννοιες της ισότητας και της σύνθεσης συναρτήσεων και στη χρήση και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων.

Να τονιστεί ότι μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν . Ένα κατάλληλο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x)=x+|x|$ και $g(x)=x-|x|$. των οποίων συνιστάται να γίνει και η γραφική παράσταση.

§1.3 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Α) Να γίνουν ασκήσεις ελέγχου της ιδιότητας «1-1» μέσα από γραφήματα.

Β) Στην άσκηση 3 (σελ. 38) να μελετηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων που δίδονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Να γίνουν και άλλες τέτοιου τύπου ασκήσεις.

Γ) Να τονιστεί στους μαθητές ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορουν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις :

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1<x_2$.

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1>x_2$.

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη των προτάσεων:

Απόδειξη:

i) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,\ x_2 \in \Delta$, για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1 \geq x_2$

και,επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε $f(x_1)>f(x_2)$, που αντίκειται στην υπόθεση.

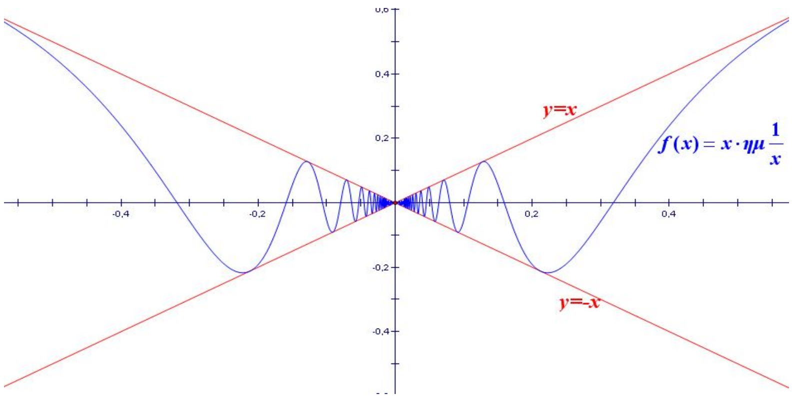
- Αν ήταν $x_1>x_2$, και,επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε $f(x_1)>f(x_2)$, που αντίκειται στην υπόθεση .
- Αν ήταν $x_1=x_2$, από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ίσχυε $f(x_1)=f(x_2)$ που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

ii) Αντίστοιχη με την i .

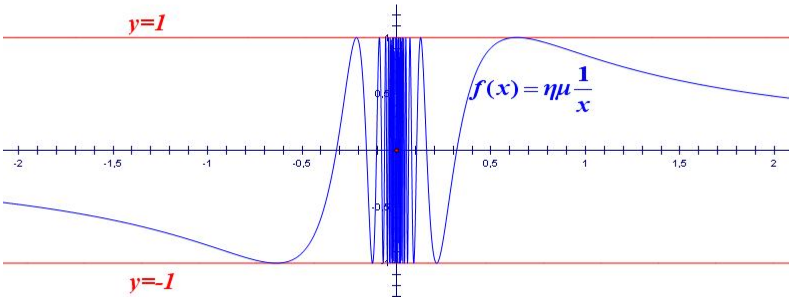
§1.4 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου (σελ. 43) δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους μαθητές, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο x_0 δεν επηρεάζει το όριο της όταν το *x* τείνει στο x_0, καθώς και ότι η τιμή του $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ καθορίζεται, από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο x_0. Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 αλλά μπορεί να διαφέρουν στο x_0 (παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια ορίζεται και η άλλη δεν ορίζεται ή καμία δεν ορίζεται) έχουν το ίδιο όριο όταν το *x* τείνει στο x_0 (σχολικό βιβλίο, σελ. 40-42). Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του x_0, δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του x_0 και σε ένα διάστημα δεξιά του x_0. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x) = x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x}$ (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Επίσης, επειδή πολλοί μαθητές θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η $f(x) = \eta\mu \dfrac{1}{x}$ (Σχήμα 2).



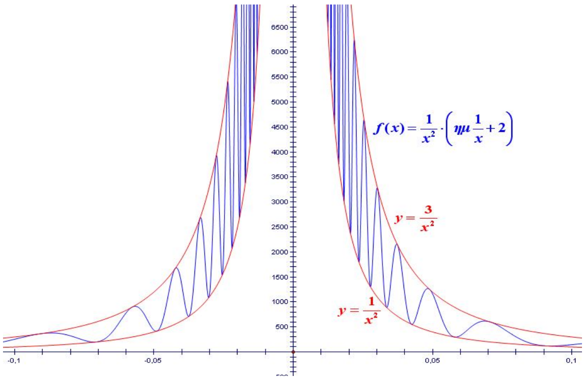
Σχήμα 2

§1.5 (Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες)

Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους μαθητές να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το $f\left(x\right)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$» (άσκηση 3i) θα πρέπει να ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν αν οι $f\left(x\right)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ και $g(x)=\dfrac{\left(x+4\right)\left(x^2+4\right)}{x^2-2x+4}$ είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν είναι ίσες, να δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια. Επίσης σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 (σελ. 57), να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο x_0 και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το x_0 να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο x_0 πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

§1.6 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

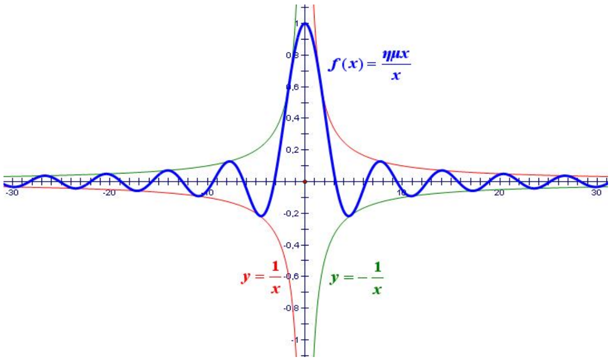
Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία, όπως π.χ. $f(x)=\frac{1}{x^2}\eta\mu\frac{1}{x}+2$ (Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο x_0 με τη μονοτονία.



Σχήμα 3

§1.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το x τείνει στο $+\infty$, υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το x τείνει στο $+\infty$, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\eta\mu x$.



Σχήμα 4

Τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}$ να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές ποια είναι τα όρια αυτά.

Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο.

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\ +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

, τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x)\ge g(x)$ κοντά στο x_0 και

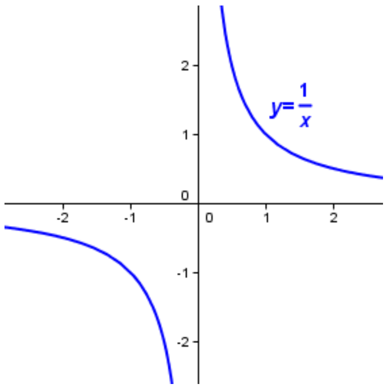
β) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$

, τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

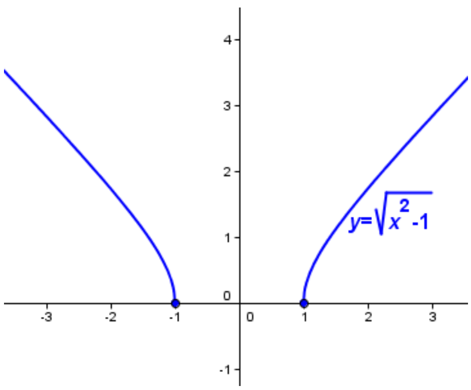
Η παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων μπορεί να γίνει διαισθητικά με την βοήθεια κατάλληλων γραφικών παραστάσεων.

§1.8 (Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)

Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ (Σχήμα 5) και $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ (Σχήμα 6)



Σχήμα 5



Σχήμα 6

και να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους μαθητές και σχετικές ασκήσεις.

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.

Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντάνε οι μαθητές στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών (σελ. 76). Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[\alpha,\ \beta]$ του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\ \beta]$.

Διευκρινίζεται ότι στο θεώρημα της σελίδας 78, τα α, β μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα

Κεφάλαιο 2^{o} (Προτείνεται να διατεθούν <u>46 διδακτικές ώρες</u>)

§2.1 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης (σελ. 96) να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους μαθητές γραφικά:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\begin{cases} x^2, x>0 \\ 0,\ x\leq 0 \end{cases}$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

§2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του h και του x στην έκφραση $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (σελ. 107). Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

§2.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί βάρος στην παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση της σελίδας 234 σχετικά με το ότι το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο.

Στην εφαρμογή 2 (σελ. 118) που αφορά στην εφαπτομένη του κύκλου να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους μαθητές η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνωρίσανε στη γεωμετρία.

§2.4 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για το λόγο αυτό καλό είναι να γίνει προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια και να δουν ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

§2.5 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των Θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών. Επειδή οι μαθητές έχουν χρησιμοποιήσει το Θεώρημα του Bolzano, σε ασκήσεις όπως η εφαρμογή 1 ii) μπορεί να συζητηθεί πρώτα η δυνατότητα απόδειξης με χρήση του Θεωρήματος Bolzano και να φανεί ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα. Έτσι φαίνεται ότι το Θεώρημα Rolle αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο και για τέτοιες περιπτώσεις. Στην εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση τι εκφράζει το πηλίκο $\frac{S(2,5)-S(0)}{2,5}$ (μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου το γεγονός, ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια, να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

§2.6 (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του λόγου μεταβολής $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f είναι:

i) γνησίως αύξουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα *Δ* έχουν θετική κλίση.

ii) γνησίως φθίνουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα *Δ* έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 253 χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

§2.7 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Μετά την εφαρμογή 2 σελίδα 148 να διδαχθεί ως εφαρμογή η άσκηση 3 α) i) της Β΄ Ομάδας σελίδα 152.Ως απόδειξη, εκτός από εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο λύσεων, μπορεί να δοθεί και η ακόλουθη που είναι έμμεση συνέπεια της εφαρμογής 2.

Ζητούμενο: Για κάθε x είναι $e^x \ge x+1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$

Απόδειξη:

Για όλους τους θετικούς αριθμούς x ισχύει $\ln x \le x-1$ και το «=» ισχύει αν και μόνο αν $x=1$. Επομένως και για τον θετικό e^x ισχύει $\ln e^x \le e^x-1$ και το το «=» ισχύει μόνο για $e^x=1$, δηλαδή $x=0$. Επομένως $x \le e^x-1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα $e^x \ge x+1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

§2.8 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§2.9 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De L' Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωση του, να δοθεί στους μαθητές να υπολογίσουν το $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$, το οποίο είναι της μορφής «$\dfrac{0}{0}$». Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι δυσκολεύονται να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

Να τονιστεί ότι οι κανόνες Del' Hospital δεν είναι πάντα πρόσφοροι για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών. Έτσι, αν έχουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ και επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα βρίσκουμε $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)''}{(x)''}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, δηλαδή επιστρέφουμε εκεί που αρχίσαμε χωρίς να βρούμε το όριο. Χωρίς τον κανόνα βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στο κοινό τους σημείο *Α(1,0)* είναι οι ευθείες $\varepsilon: y=x-1$ και $\zeta: y=-2x+2$ αντιστοίχως και να τις χαράξετε.

iii) Να κάνετε χρήση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $f(x)=\ln x$ <u>*προσεγγίζονται*</u> από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο

$x_0 = 1$ η τιμή του πηλίκου $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου $\dfrac{x-1}{1-x^2}$, δηλαδή ότι «κοντά» στο $x_0 = 1$ ισχύει:

$$\frac{\ln x}{1-x^2} = \frac{x-1}{-2x+2} = \frac{x-1}{-2\left(x-1\right)} = -\frac{1}{2}$$

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

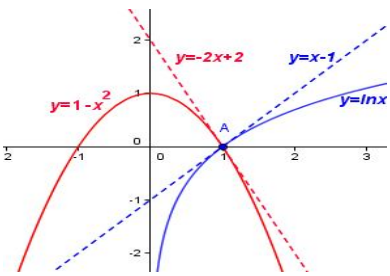
Επομένως, «κοντά» στο $x_0 = 1$ ισχύε $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ι, το οποίο υπό μορφή ορίου γράφεται:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \frac{f'\left(x_0\right)}{g'\left(x_0\right)}.$$

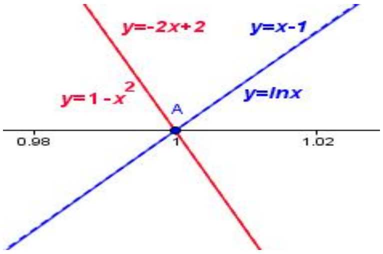
<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>

Η διαπίστωση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0 = 1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f\left(x\right) = \ln x$ και $g\left(x\right) = 1 - x^2$ *<u>προσεγγίζονται</u>* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y = x - 1$ και $y = -2x + 2$ μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y = \ln x, y = 1 - x^2$ και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους $y = x - 1$ και $y = -2x + 2$ αντιστοίχως (σχήμα 7).
- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλλεπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο $A(1,0)$. Θα παρατηρήσουμε ότι η $y = \ln x$ θα συμπέσει με την ευθεία $y = x - 1$, ενώ η $y = 1 - x^2$ θα συμπέσει με την ευθεία $y = -2x + 2$ (σχήμα 8).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

§2.10 (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Οι τέσσερις (4) διδακτικές ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινομένων ωρών να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

Κεφάλαιο 3ο (Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)

§3.1 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Α) Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

Β) Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων (σελ. 305) να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

Πίνακας συναρτήσεων-παραγουσών

Α/Α	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x)=0$	$G(x)=c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
2	$f(x)=1$	$G(x)=x+c, c\in\mathbb{R}$
3	$f(x)=\frac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c, c\in\mathbb{R}$
4	$f(x)=x^a$	$G(x)=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c, c\in\mathbb{R}$

5	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c, c\in\mathbb{R}$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c, c\in\mathbb{R}$
7	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x)=\varepsilon\varphi x+c, c\in\mathbb{R}$
8	$f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x)=-\sigma\varphi x+c, c\in\mathbb{R}$
9	$f(x)=e^x$	$G(x)=e^x+c, c\in\mathbb{R}$
10	$f(x)=a^x$	$G(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}+c, c\in\mathbb{R}$

Σημείωση:

*Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.*

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της σελίδας 305 μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

i) Η συνάρτηση $F-G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f-g$ και

ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

Οι εφαρμογές των σελίδων 188 και 189 να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων. Να λυθούν μόνο οι ασκήσεις 2, 4, 5 και 7 της Α΄ Ομάδας.

Τυπογραφικό λάθος: Στη διατύπωση του Θεωρήματος αντί $c\in\mathbb{R}$ να γραφεί G.

§3.4 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου να γίνει με τρόπο που να αναδεικνύει την αξιοποίηση των αθροισμάτων και της οριακής διαδικασίας για την εύρεση –υπολογισμό του εμβαδού. Στη συνέχεια να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:

«Έστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ **.**

- **Αν** $f(x) \geq g(x)$ **για κάθε** $x \in [a,\beta]$ **, τότε θα ισχύει:** $\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$.
- **Αν, επιπλέον , οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο** $[a,\beta]$ **(δηλαδή, αν υπάρχει** $\xi \in [a,\beta]$ **με** $f(\xi) \neq g(\xi)$ **), τότε θα ισχύει:** $\int_a^\beta f(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx$ **»**

Τυπογραφική διόρθωση: Στην ισότητα του πρώτου πλαισίου τα άκρα ολοκλήρωσης να αντιστραφούν.

§3.5 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Δεν θα διδαχθούν[2] ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγώγιση της συνάρτησης $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ **και γενικότερα της συνάρτησης** $F(x) = \int_\alpha^{g(x)} f(t)\,dt$ **.**

§3.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

Επισήμανση

1.Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη **εξαιρούνται** οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

[2]Με εγκύκλιο-οδηγία του ΥΠ.Π.Ε.Θ. διευκρινίστηκε ότι δεν θα διδαχθεί καμία άσκηση η οποία χρησιμοποιεί **με οποιοδήποτε τρόπο** την συνάρτηση ολοκλήρωμα, ακόμα και χωρίς την παραγώγισή της.

ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Α. Εξεταστέα ύλη

ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2017-2018 ΤΑΞΗ Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση			
ΚΕΦΑΛΑΙΟ	**ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ**	**Δ.Ω.**	**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**
$1^{ο}$ **Όριο -Συνέχεια συνάρτησης**	**1.1.** Πραγματικοί αριθμοί.	**2**	
	1.2. Συναρτήσεις.	**3**	
	1.3. Μονότονες συναρτήσεις- Αντίστροφη συνάρτηση.	**4**	
	1.4 . Όριο συνάρτησης στο	**4**	
	1.5. Ιδιότητες των ορίων	**7**	Χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου "Τριγωνομετρικά όρια"
	1.6. Μη πεπερασμένο όριο στο	**4**	
	1.7. Όρια συνάρτησης στο άπειρο.	**5**	
	1.8. Συνέχεια συνάρτησης.	**14**	
	ΣΥΝΟΛΟ	**43**	
$2^{ο}$ **Διαφορικός Λογισμός**	**2.1.** Η έννοια της παραγώγου.	**9**	Χωρίς την υποπαράγραφο "Κατακόρυφη εφαπτομένη"
	2.2 .Παραγωγίσιμες συναρτήσεις- Παράγωγος συνάρτηση.	**5**	Χωρίς τις αποδείξεις των τύπων (ημχ)΄=συνχ στη σελίδα 106 και (συνχ)΄=- ημχ στη σελίδα 107.
	2.3. Κανόνες παραγώγισης.	**7**	Χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο

			γινομένου συναρτήσεων
	2.4. Ρυθμός μεταβολής.	**5**	
	2.5. Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορι Λογισμού.	**6**	
	2.6. Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.	**7**	
	2.7.Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	**7**	Χωρίς το θεώρημα της σελίδας 146 (κριτήριο της 2ης παραγώγου).
	2.8. Κυρτότητα- Σημεία καμπής συνάρτησης.	**6**	Θα μελετηθούν μόνο οι συνα ρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους.
	2.9. Ασύμπτωτες -Κανόνες De l' Hospital.	**6**	
	2.10. Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	**1**	
	ΣΥΝΟΛΟ	**46**	

Β. Διαχείριση της ύλης

Η διαχείριση είναι η ίδια με την προτεινόμενη για τη Γ΄ Τάξη του Ημερησίου Γενικού Λυκείου, με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο και παράγραφο:

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση</u>

Κεφάλαιο 1ο (Προτείνεται να διατεθούν <u>43 διδακτικές ώρες</u>) Ειδικότερα:

§1.1 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

§1.2 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

§1.3 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.4 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.5 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§1.6 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.7 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§1.8 (Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 2^{ο} (Προτείνεται να διατεθούν <u>56 διδακτικές ώρες</u>)

§2.1 (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

§2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§2.3 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.4 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§2.5 (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

§2.6 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.7 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.9 (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

<u>Επισημάνσεις</u>

1. Στο εισαγωγικό κείμενο (σελ. 115) της παρουσίασης της έννοιας της παραγώγου σύνθετης συνάρτησης, η συνάρτηση $y = \eta\mu 2x$ να αντικατασταθεί από μια άλλη, για παράδειγμα την $y = \ln 2x$.

$$\left(\left(\ln 2x\right)' = \left(\ln 2 + \ln x\right)' = \left(\ln 2\right)' + \left(\ln x\right)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \right).$$

2. Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη **εξαιρούνται** οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

Γ. Οδηγίες... πριν τις εξετάσεις

Αγαπητέ μαθητή της Γ΄Λυκείου που έχεις επιλέξει να εξεταστείς (και) στα Μαθηματικά:

Με την ευκαιρία της έκδοσης του βιβλίου αυτού και στο δύσκολο δρόμο που μας απομένει μέχρι τις εξετάσεις σου, δρόμο τον οποίο θα **διανύσουμε μαζί,** θα ήθελα να σου προτείνω τα επόμενα:

1ο) Το **βασικό** σου διδακτικό υλικό είναι το **Σχολικό Βιβλίο**. Με όλα τα προβλήματά του, το σχολικό βιβλίο είναι εκείνο το οποίο θα σε οδηγήσει στην κατανόηση των απαραίτητων εννοιών (και όχι των «περιττών» και των «τεχνασμάτων»), που είναι και το **κλειδί** για κάθε επιτυχία σου.

2ο) Το **επιπλέον διδακτικό υλικό** που καλείσαι να μελετήσεις είναι αυτό του **Ψηφιακού Εκπαδευτικού Βοηθήματος του Υπουργείου Παιδείας (study4 exams),** το οποίο διαρκώς βελτιώνεται και με το οποίο μπορείς να προχωρήσεις σε **βαθύτερη μελέτη** των εννοιών, της θεωρίας και των λύσεων των ασκήσεων. Στο πλαίσιο αυτό, εμείς σου δίνουμε **επιλεγμένο υλικό, σε συνδυασμό με το σχολικό βιβλίο, και βασισμένο στην φιλοσοφία των εξετάσεων,** που αποσκοπεί στην άρτια προετοιμασία σου.

3ο) Να μην βιάζεσαι να καλύψεις την ύλη. Κάνενας λόγος δεν υπάρχει να αγχωθείς για αυτό το θέμα. Η ύλη ολοκληρώνεται αρκετά πριν τις εξετάσεις και έχεις αρκετό χρόνο για επαναλήψεις. Εμείς θα σε βοηθήσουμε σε αυτό, γιατί το υλικό μας ακολουθεί τη ροή της ύλης στο σχολείο σου και μόνο. Η παράμετρος αυτή είναι βασική γιατί η αφιέρωση ικανού χρόνου σε τμήματα της ύλης που είναι σημαντικά θα σε κάνει να φτάσεις πιο γρήγορα στον προορισμό σου.

4ο) Τα θέματα στα οποία θα εξεταστείς απαιτούν **σωστή προετοιμασία και κατανόηση.** Ήδη το πνεύμα των εξετάσεων από πέρσι άρχισε να γίνεται διαφορετικό από τα προηγούμενα χρόνια.

5ο) Να κλείσεις τα αυτιά σου σε ό,τι δεν είναι αξιόπιστο και επίσημο. Να ακούς και να βλέπεις μόνο όσα επίσημα ανακοινώνονται από το ΥΠ.Π.Ε.Θ.

6ο) Να ξεκουράζεσαι και να ακολουθείς **έναν υγιεινό τρόπο ζωής**, μέσα στα πλαίσια του οποίου και η διασκέδαση δεν θα λείψει. Να έχεις μόνο έναν προγραμματισμό και να προσπαθείς να τον εφαρμόσεις.

7ο) Να έχεις **καθημερινή επαφή** με το μάθημα και να **μην διακόπτεις** για μεγάλο χρονικό διάστημα τη μελέτη σου.

Σου εύχομαι να είσαι καλά, με υγεία και σωστή προετοιμασία

ΘΑ ΠΕΤΥΧΕΙΣ ΤΟΝ ΣΤΟΧΟ ΣΟΥ

Βιβλιογραφικές αναφορές

1. Σχολικό Βιβλίο Γ΄Λυκείου: *«Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής»* των Ανδρεαδάκη Σ, Κατσαργύρη Β, κ.α.

2. Ψηφιακό Εκπαιδευτικό Βοήθημα του Υπουργείου (study4exams.gr)

3. Δημήτρης Μπούζας, Χρήστος Λινζερίνος, Οδυσσέας Βέρρας, «Μαθηματικά για το τελευταίο θρανίο», maths4people.blogspot.gr.

4. Καραγιάννης Ιωάννης, *«Διδακτική και Μεθοδολογία στα Ολοκληρώματα»* (Εκδόσεις Ζήτη, 1997).

5. Σημειώσεις του Συγγραφέα.

6. Μαθηματικός Περιηγητής (blogs.sch.gr/iokaragi).

7. Σημειώσεις Α. Ρουμελιώτη

8. Σημειώσεις Π. Αναγνωστόπουλου.

9. Σ. Ντούγιας **,** *«Απειροστικός Λογισμός 1»,Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων,1986*

10. Σ. Ντούγιας **,** *«Απειροστικός Λογισμός 2»,Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων,1986*

11.Γ. Πούλος, *«Μαθηματική Ανάλυση»,* Βιβλιοεκδοτική, Θεσσαλονίκη 2000

12.Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, «Μαθηματικά Γ1& Γ2», εκδόσεις Σαββάλας,2015