Εναλλακτικές λύσεις σε ερωτήματα του Προσομοιωμένου διαγωνίσματος ( )

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = e^x + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f''(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $f''(x) > 0, x \in \mathbb{R}$ η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Άρα η γραφική παράσταση C_f της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο, με εξαίρεση το σημείο επαφής .

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\big(\alpha, f(\alpha)\big)$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon) \;\; y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Όμως $f'(\alpha) = 0$ (από το ερώτημα Γ1) και επομένως (ε): $y = f(\alpha)$.

Άρα από τα προηγούμενα καταλήγουμε:

$$f(x) \geq f(a) \Leftrightarrow f(x) \geq a^2 - a + 1, x \in \mathbb{R}$$

Σχόλιο: Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = a$.

Γ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x+1) - f(x), x > 0$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ (ώς πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x > 0$).

Τότε, ισοδύναμα, η προς απόδειξη σχέση γίνεται διαδοχικά:

$$f(x^2+1) + f(x^2+2) < f(x^2) + f(x^2+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2+1) - f(x^2) < f(x^2+3) - f(x^2+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x^2) < g(x^2+2), x > 0 \; (1)$$

Τώρα έχουμε για $x > 0$:

$$g'(x) = f'(x+1) - f'(x) \; (2)$$

Έχουμε, ισοδύναμα, για $x > 0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$x + 1 > x \Leftrightarrow f'(x+1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x+1) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα για $x > 0$ και άρα έχουμε:

$$x^2 < x^2 + 2 \Leftrightarrow g(x^2) < g(x^2+2)$$

Δηλαδή η σχέση (1) που θέλαμε να αποδείξουμε.

Καραγιάννης Βασίλειος

Μαθηματικός, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης