

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά στα νέα Προγράμματα Σπουδών: Η περίπτωση της Στατιστικής

επιμορφωτική συνάντηση
ΣΕ Μαθηματικών Αττικής
19/02/2025

Κώστας Στουραΐτης
εκπαιδευτικός

Στοχαστικά Μαθηματικά

- Στατιστική
- Πιθανότητες
- περίπου 15-20% του χρόνου διδασκαλίας των μαθηματικών από Α Δημοτικού έως Γ Λυκείου

Γιατί στοχαστικά μαθηματικά;

- Η τυχαιότητα είναι ένα καλό μοντέλο για την πολυπλοκότητα.
- Ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας, λήψη αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας
- Κατανόηση, διαχείριση και επικοινωνία των δεδομένων μεγάλου όγκου που παράγονται

Γιατί διδάσκουμε στοχαστικά μαθηματικά;

«Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων είναι να αναπτύξει την ικανότητα του **μαθητή-μελλοντικού πολίτη-να αξιολογεί κριτικά πληροφορίες, να εξάγει συμπεράσματα, να κάνει προβλέψεις και να λαμβάνει αποφάσεις κάτω από αβέβαιες συνθήκες**. Η βασική διαφορά των Στοχαστικών Μαθηματικών από τις άλλες θεματικές περιοχές των Μαθηματικών είναι ότι μελετά προβλήματα που σχετίζονται με **τη μεταβλητότητα δεδομένων**, δηλαδή με τη διαφορετικότητα που υπάρχει γύρω μας (π.χ. τα άτομα διαφέρουν, οι συνθήκες ενός πειράματος διαφέρουν)»

(ΠΣ, 2022)

Γιατί διδάσκουμε στοχαστικά μαθηματικά;

- κατανόηση πληροφοριών και κριτική ερμηνεία τους
ενεργός, χειραφετημένος και κριτικός πολίτης
- μύηση σε στοχαστικό (μη αιτιοκρατικό) τρόπο σκέψης
προβλέψεις με επαγωγικό τρόπο και με αβεβαιότητα

στοχαστικός συλλογισμός

Ο συλλογισμός με ιδέες και πληροφορίες που συνδέονται με τη στατιστική και τις πιθανότητες

- πότε (πού) και πώς χρησιμοποιούνται ιδέες και διαδικασίες στατιστικής/πιθανοτήτων
- ερμηνείες (πχ. μέτρα θέσης και διασποράς για παρουσίαση)
- συνδέσεις εννοιών (πχ συχνότητα-πιθανότητα)
- συμπεράσματα (πχ. από το δείγμα στον πληθυσμό)
- ...

στοχαστικός συλλογισμός («μεγάλες ιδέες»)

- μεταβλητότητα

τεράστιος όγκος δεδομένων με μεγάλη «ποικιλία» τιμών

Παράδειγμα: Ποιο είναι το ύψος των ενηλίκων γυναικών στην Ελλάδα σήμερα;

Από δύο διαφορετικά δείγματα αναμένεται να προκύψουν παρόμοια συμπεράσματα;

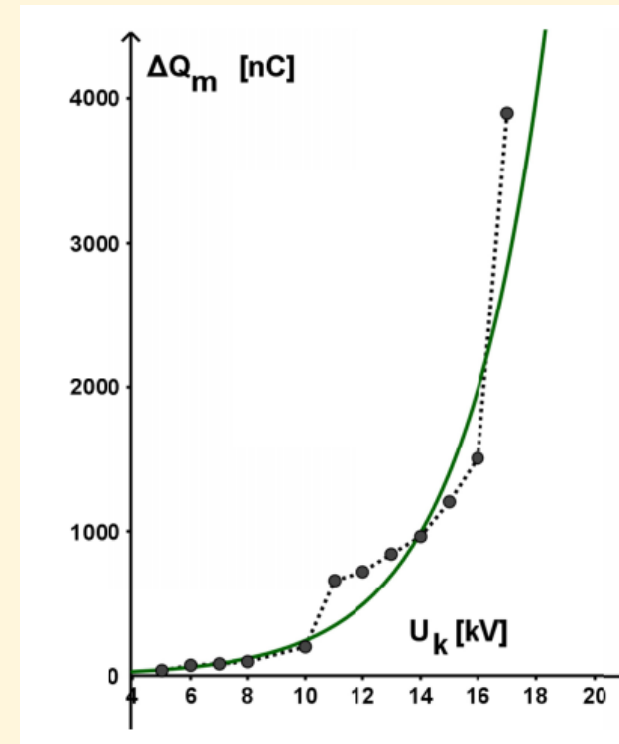
- αβεβαιότητα

πρόβλεψη για πολύπλοκα φαινόμενα με εγγενή αβεβαιότητα

Παράδειγμα: Πόσο πιθανό είναι να νοσώ με covid; Πόσο πιθανό είναι να νοσώ με covid με δεδομένο ότι το rapid test είναι αρνητικό;

στατιστικός συλλογισμός (διαφορές με άλλες περιοχές)

- πλαίσιο
(δίνει το νόημα - δίνει την ευκαιρία/αφορμή για εφαρμογή)
- δεδομένα
(σε πλαίσιο, με σφάλμα, ποιοτικές μεταβλητές - εκτός πλαισίου, χωρίς σφάλμα, ποσοτικά χαρακτηριστικά)
- μεταβλητότητα
(εγγενής στη στατιστική – απύσα στα μαθηματικά)
- αναπαραστάσεις
(ουσιώδης ρόλος πχ θηκόγραμμα/ιστόγραμμα - βοηθητικός ρόλος)
- συσχέτιση
(μη αιτιώδης – αιτιώδης)
- επαγωγικός τρόπος σκέψης
(από το δείγμα στον πληθυσμό - παραγωγικός)
- ...



Περιεχόμενο (Στατιστικής) στα νέα ΠΣ

- Συλλογή, Αναπαράσταση & Ερμηνεία Δεδομένων
(συχνότητες, διαγράμματα)
Α' Δημοτικού - Γ' Λυκείου
- Μέτρα Θέσης και Μεταβλητότητας
Γ' Δημοτικού - Γ' Λυκείου
- Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών
Α' Λυκείου - Γ' Λυκείου

Περιεχόμενο (Στατιστικής) στα νέα ΠΣ Δημοτικό

- **Διατυπώνουν ερωτήματα** που αφορούν το **οικείο** τους περιβάλλον και μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα.
- **Συλλέγουν δεδομένα** μέσω μικρών ερευνών στο οικείο τους περιβάλλον και τα οργανώνουν (**ποιοτικά, διακριτά ποσοτικά**)
- **Αναπαριστούν** δεδομένα (**εικονογράμματα, σημειογράμματα, ραβδογράμματα, φυλλογράμματα, απλά κυκλικά διαγράμματα**)
- **Περιγράφουν** τα δεδομένα χρησιμοποιώντας μέτρα θέσης και μεταβλητότητας (**εύρος, επικρατούσα τιμή, διάμεσος, μέσος όρος**)
- Χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις και μέτρα για να **συγκρίνουν** δεδομένα από διαφορετικές **μικρές ομάδες** (π.χ. δύο τμήματα του σχολείου)

Περιεχόμενο (Στατιστικής) στα νέα ΠΣ Γυμνάσιο

- **Διατυπώνουν ερωτήματα** που αφορούν δεδομένα (+ **συνεχή ποσοτικά ή χρονικά**) και μπορούν να αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον
- **Συλλέγουν δεδομένα** μέσω ερευνών (+**δειγματοληψία**). Αξιολογούν την αντιπροσωπευτικότητα και συγκρίνουν αποτελέσματα σε πληθυσμό/δείγμα
- **Αναπαριστούν** δεδομένα (+ **ιστογράμματα, θηκογράμματα, χρονογράμματα**)
- **Περιγράφουν** τα δεδομένα χρησιμοποιώντας μέτρα θέσης και μεταβλητότητας (+ **τεταρτημόρια, ενδοτεταρτημοριακό εύρος, απόμακρες τιμές**)
- **Αναγνωρίζουν** εσφαλμένους ή **παραπλανητικούς** τρόπους κατασκευής και παρουσίασης στατιστικών διαγραμμάτων

Περιεχόμενο (Στατιστικής) στα νέα ΠΣ Α & Β Λυκείου

- **Διατυπώνουν ερωτήματα** που αφορούν **σχέσεις εξάρτησης** ανάμεσα σε ένα ποιοτικό και ένα ποσοτικό (π.χ. μήνας – αριθμός απουσιών) ή δύο ποιοτικά χαρακτηριστικά (π.χ. φύλο – προσανατολισμός)
- **Αναπαριστούν** δεδομένα (+ **πολλαπλά θηκογράμματα, στοιβαγμένα/ομαδοποιημένα ραβδογράμματα, πίνακες συνάφειας**)
- **Περιγράφουν** τα δεδομένα χρησιμοποιώντας μέτρα θέσης και μεταβλητότητας (+ **διασπορά, τυπική απόκλιση, συντελεστής μεταβλητότητας**) επιλέγοντας την κατάλληλη περιγραφή
- **Ανακαλύπτουν και εξηγούν** ότι δύο σχετιζόμενα χαρακτηριστικά δεν συνδέονται απαραίτητα με **σχέση αίτιου-αιτιατού**

Περιεχόμενο (Στατιστικής) στα νέα ΠΣ Γ Λυκείου

- **Διατυπώνουν ερωτήματα** που αφορούν **σχέσεις εξάρτησης** ανάμεσα σε ποσοτικά χαρακτηριστικά (πχ. βάρος – ύψος)
- **Αναπαριστούν** ποσοτικά χαρακτηριστικά (**διαγράμματα διασποράς**)
- **Αντιλαμβάνονται διαισθητικά** την έννοια της **γραμμικής συσχέτισης** (θετικής/αρνητικής) και τη σχολιάζουν με τη βοήθεια του συντελεστή **Pearson**
- **Προσδιορίζουν** την **ευθεία παλινδρόμησης** στο απλό γραμμικό μοντέλο και ερμηνεύουν τους συντελεστές της. Εξοικειώνονται με την έννοια της **πρόβλεψης της τιμής** της μεταβλητής απόκρισης από την τιμή μιας επεξηγηματικής μεταβλητής και αναγνωρίζουν τυχόν περιορισμούς.

παράδειγμα ακολουθίας ΠΜΑ (διαγράμματα)

Α' Δημοτικού

Σ.Δ.1.3. Κατασκευάζουν απλά **εικονογράμματα και ραβδογράμματα**.

Σ.Δ.1.4. Διερευνούν **πληροφορίες** από εικονογράμματα, ραβδογράμματα και εξάγουν συμπεράσματα.

Β' Δημοτικού

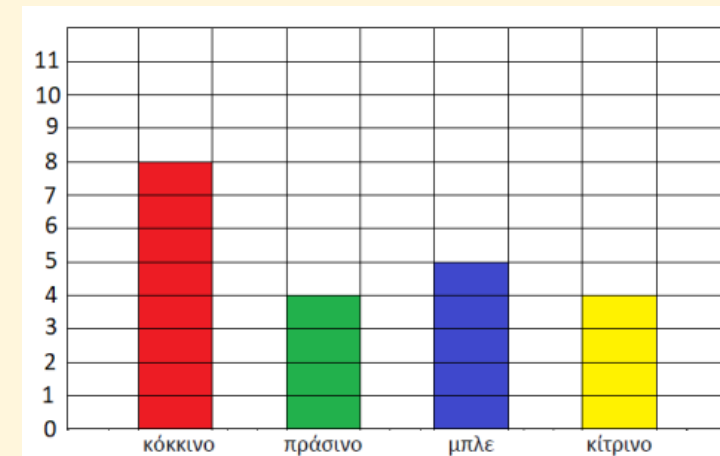
Σ.Δ.2.3. Κατασκευάζουν **σημειογράμματα**

Σ.Δ.2.4. Διερευνούν **πληροφορίες** από σημειογράμματα και εξάγουν συμπεράσματα.

Γ' Δημοτικού

Σ.Δ.3.3. Κατασκευάζουν διαγράμματα, στα οποία η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσωπεύει **πολλαπλάσια του ενός** (της μονάδας).

Σ.Δ.3.4. Διερευνούν **πληροφορίες** από διαγράμματα, στα οποία η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσωπεύει πολλαπλάσια του ενός (της μονάδας) και εξάγουν συμπεράσματα.

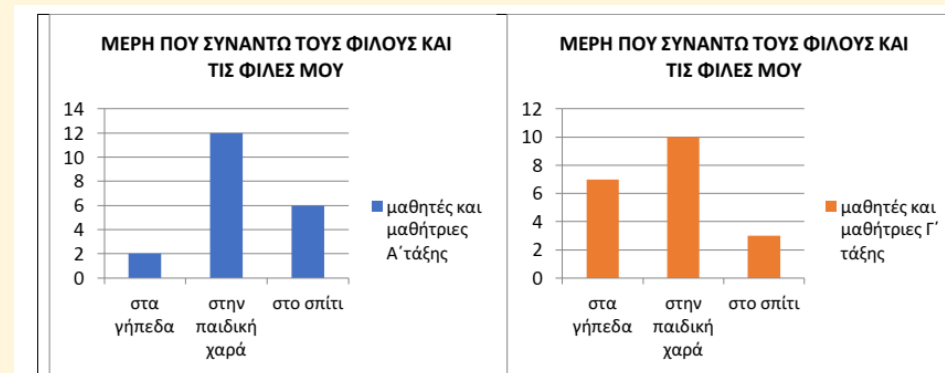


παράδειγμα ακολουθίας ΠΜΑ (διαγράμματα)

Δ' Δημοτικού

Σ.Δ.4.3. **Κατασκευάζουν** διαγράμματα των δεδομένων για **δύο μικρές ομάδες** ίσου πλήθους.

Σ.Δ.4.4. **Διερευνούν πληροφορίες** από αναπαραστάσεις δεδομένων σε ομάδες ίσου πλήθους και εξάγουν συμπεράσματα.



Ε' Δημοτικού

Σ.Δ.5.3. **Κατασκευάζουν φυλλογράμματα** για να αναπαραστήσουν δεδομένα.

Σ.Δ.5.4. **Διερευνούν πληροφορίες** από φυλλογράμματα και εξάγουν συμπεράσματα.

15	0	3	4	6	6	7	9	9
16	1	1	2	3	4	6	6	
17	1	4	5	5	5	5		
18	2	6	8					
19	1							

ΣΤ' Δημοτικού

Σ.Δ.6.3. **Κατασκευάζουν** διαγράμματα με σχετικές συχνότητες και **απλά κυκλικά διαγράμματα**

Σ.Δ.6.4. **Διερευνούν πληροφορίες** από κυκλικά διαγράμματα και εξάγουν συμπεράσματα.

παράδειγμα ακολουθίας ΠΜΑ (διαγράμματα)

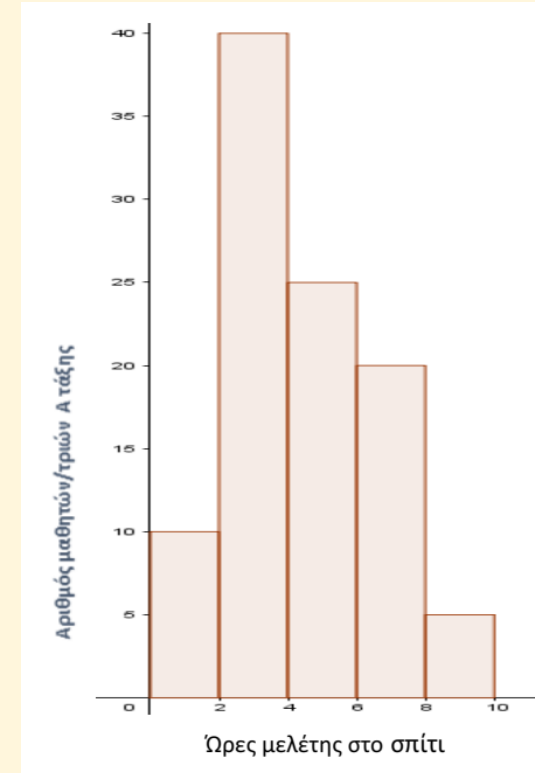
Α' Γυμνασίου

Σ.Δ.7.3 Κατασκευάζουν **κυκλικά διαγράμματα** για κατηγορικά δεδομένα.

Σ.Δ.7.4. Κατασκευάζουν **ιστογράμματα** συχνοτήτων ίσου πλάτους, με δεδομένο πλήθος κλάσεων για συνεχή ποσοτικά δεδομένα

Σ.Δ.7.5. **Επιλέγουν** πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις ποσοτικών δεδομένων και καταλήγουν σε συμπεράσματα.

Σ.Δ.7.6. **Επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης** και επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους.



παράδειγμα ακολουθίας ΠΜΑ (διαγράμματα)

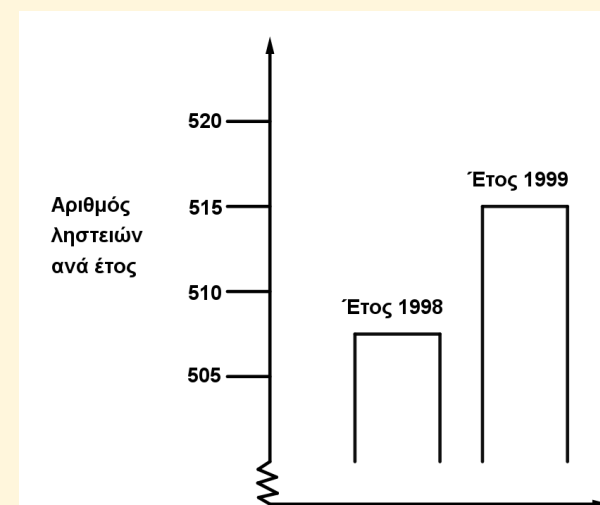
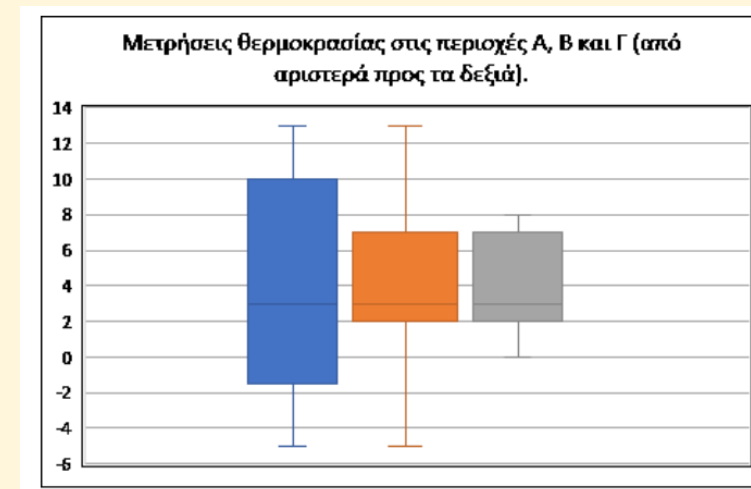
Β' Γυμνασίου

Σ.Δ.8.3. Κατασκευάζουν **χρονοδιαγράμματα** για χρονικά δεδομένα

Σ.Δ.8.4. Κατασκευάζουν απλά **θηκογράμματα**, χρησιμοποιώντας την «περίληψη πέντε αριθμών» για συνεχή ποσοτικά δεδομένα

Σ.Δ.8.5. **Επιλέγουν** πληροφορίες από **διαφορετικές αναπαραστάσεις** συνεχών ποσοτικών και χρονικών δεδομένων και καταλήγουν σε συμπεράσματα.

Σ.Δ.8.6. **Εντοπίζουν** παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε **εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν**



παράδειγμα ακολουθίας ΠΜΑ (διαγράμματα)

Γ' Γυμνασίου

Η σειρά των Σ.Δ. δεν περιλαμβάνει αναφορές σε διαγράμματα, αλλά τα διαγράμματα συνεχίζουν να αξιοποιούνται στο πλαίσιο των:

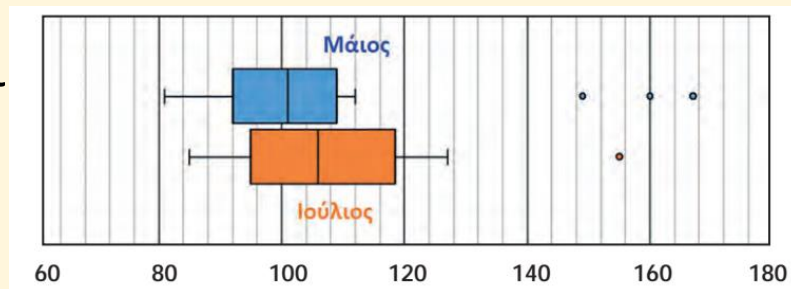
Σ.Δ.9.1. Να **διατυπώνουν** ερωτήματα που αφορούν **το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον** και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους.

Σ.Δ.9.2. Να **αναγνωρίζουν** την αναγκαιότητα της χρήσης **δείγματος** και τη διαφορά του από τον πληθυσμό.

παράδειγμα ακολουθίας ΠΜΑ (διαγράμματα)

Α' Λυκείου

Σ.Δ.10.2. **Κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα**, υπολογίζοντας και οριακές τιμές, για να περιγράψουν τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

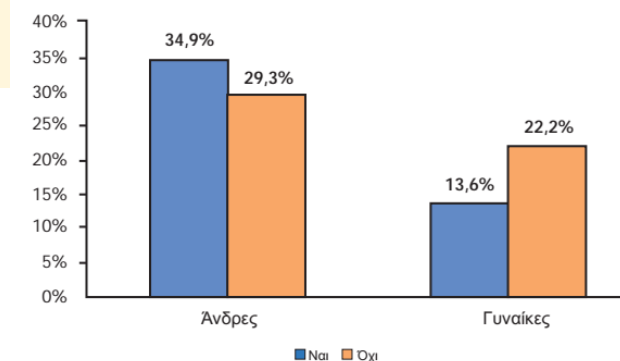


Β' Λυκείου

Σ.Δ.11.5. **Κατασκευάζουν στοιβαγμένα ραβδογράμματα** συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.

Σ.Ε.11.1. Από δοσμένα στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων **εξάγουν συμπεράσματα** σχετικά με την **εξάρτηση των δύο κατηγορικών μεταβλητών**

		Τροχάιο Ατύχημα		Σύνολο
		Ναι	Όχι	
Φύλο	Ανδρες	71,9%	56,9%	
	Γυναίκες	28,1%	43,1%	
	Σύνολο	100%	100%	



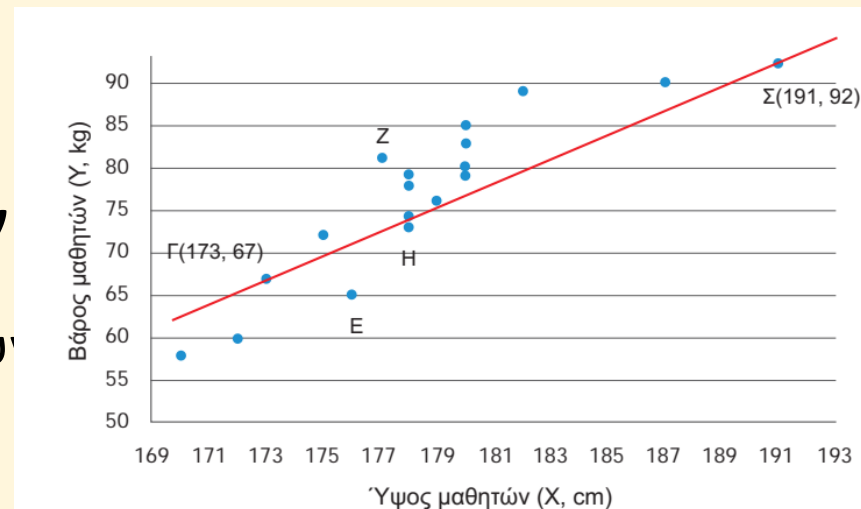
παράδειγμα ακολουθίας ΠΜΑ (διαγράμματα)

Γ' Λυκείου

Σ.Δ.12.3. **Κατασκευάζουν** το **διάγραμμα διασποράς** των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.

Σ.Ε.12.1. Με τη βοήθεια του διαγράμματος διασποράς **διερευνούν** την ύπαρξη **γραμμικής συσχέτισης** μεταξύ των τιμών δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού και διακρίνουν τη θετική από την αρνητική γραμμική συσχέτιση.

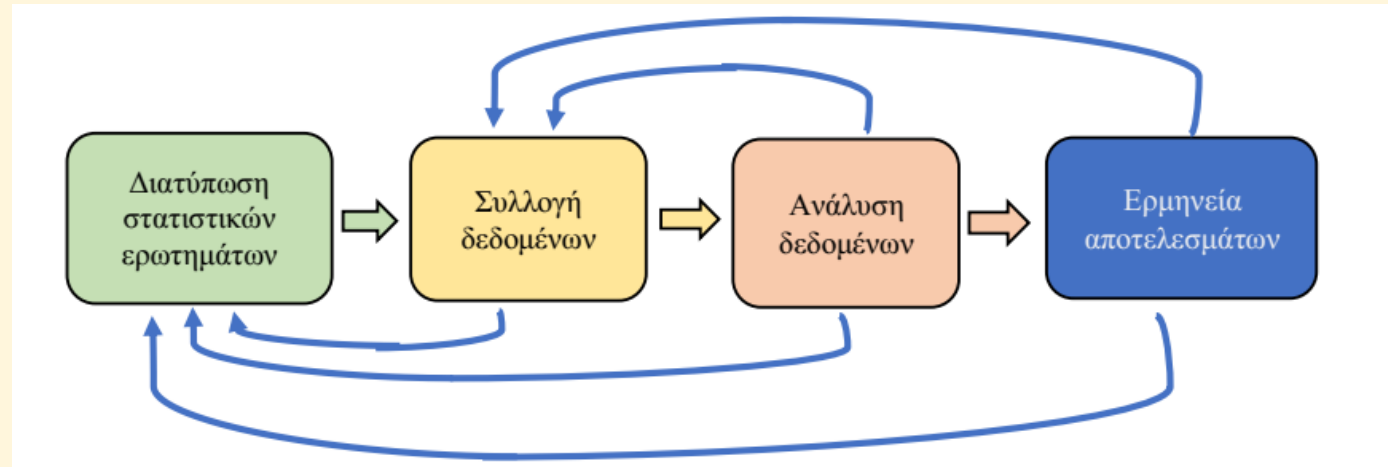
Σ.Ε.12Π.4. **Προσδιορίζουν** την **ευθεία παλινδρόμησης** για το απλό γραμμικό μοντέλο, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και σχολιάζουν εποπτικά την προσαρμογή της.



διδάσκοντας στατιστική

- Στατιστικός κύκλος έρευνας:

- α) διατύπωση ερώτησης
- β) συλλογή/παραγωγή δεδομένων
- γ) ανάλυση δεδομένων
- δ) ερμηνεία και συμπεράσματα



- στατιστικός συλλογισμός

- να επιλέξουν τι γράφημα θα χρησιμοποιήσουν, όχι μόνο να κατασκευάσουν ένα συγκεκριμένο
- να επιλέξουν μέτρο θέσης ή μέτρο μεταβλητότητας, όχι μόνο να το υπολογίσουν
- να κρίνουν ένα συμπέρασμα, ένα άρθρο στα μέσα κλπ – όχι μόνο να διατυπώσουν ένα συμπέρασμα
- ...

- ... η συζήτηση να χωράει διαφορετικές απόψεις και οπτικές

παράδειγμα έργου

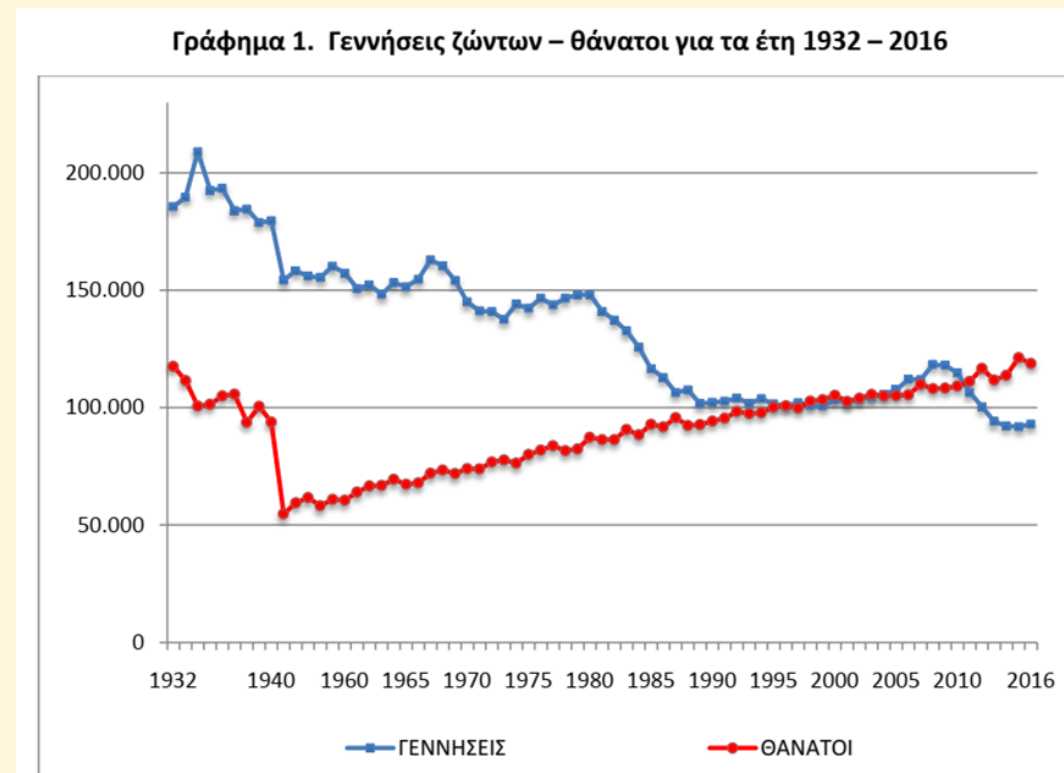
Στο χρονόγραμμα που δίνεται παρακάτω φαίνεται ο αριθμός γεννήσεων και θανάτων στη χώρα μας από το 1932 έως και το 2016 (Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ).

α) Ποια χρονιά ο αριθμός των θανάτων ξεπερνά για πρώτη φορά τον αριθμό των γεννήσεων στη χώρα μας;

β) Ποια χρονιά είχαμε τη μεγαλύτερη αύξηση του πληθυσμού;

γ) Τι παρατηρείτε την περίοδο 2005 – 2010 και τι συμβαίνει μετά το 2010;

δ) Συζητήστε, μεταξύ σας, πιθανές αιτίες στις οποίες οφείλονται οι απαντήσεις που δώσατε στα προηγούμενα ερωτήματα. Αναζητήστε στην ιστοσελίδα της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛ.ΣΤΑΤ.) την έκθεση που αφορά στη φυσική κίνηση του πληθυσμού για το 2019 και παρουσιάστε στο τμήμα σας την εξέλιξη του πληθυσμού από το 2016 μέχρι και το 2019.



μη παράδειγμα έργου

2. Η μέση τιμή και η διακύμανση των 5 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 4$ και $s^2 = 10$, αντίστοιχα. Εάν, για τις τέσσερις τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = 14$, να βρεθεί η πέμπτη τιμή.

ευχαριστώ