13/02/2025

ΤΕΤΡΑΝΤΑΣ

ΤΕΤΡΑΝΤΑΣ/ΕΤΗΣΙΑ ΈΚΔΟΣΗ , ΤΕΥΧΟΣ 5
2025

ISSN: 2732-995X

Μαθηματικό Περιοδικό

Θεματικές Περιοχές

- Καινοτόμες διδακτικές πρακτικές και μέθοδοι στα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας & Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.
- Ειδική Αγωγή και Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια & Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.
- Ιστορία, Φιλοσοφία των Μαθηματικών.
- Διεπιστημονικές Προσεγγίσεις στα Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια & Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

ΤΕΤΡΑΝΤΑΣ

Εξαμηνιαία Περιοδική Έκδοση Μαθηματικού Περιεχομένου για την Πρωτοβάθμια & Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

ISSN: 2732-995X

Εκδότης: Βασίλειος Καραγιάννης, Μαθηματικός, ΜΔΕ Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Συντονιστής: Ιωάννης Καραγιάννης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Δ.Δ.Ε. Κυκλάδων & Α΄ Αθήνας-Επόπτης Ποιότητας της Εκπαίδευσης Δ.Δ.Ε. Κυκλάδων.

Επιμέλεια κειμένων: Τσομαρέλη Τριανταφυλλιά, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Αγγλικών Δ.Δ.Ε. Κυκλάδων.

Όλες οι εργασίες που υποβάλλονται για δημοσίευση στο περιοδικό προωθούνται για ανώνυμη (τυφλή) κρίση από επιτροπή δύο κριτών (peer reviewing), αφού πρώτα αφαιρεθούν τα στοιχείατων συγγραφέων. Για το λόγο αυτό, τα κυρίως κείμενα θα πρέπει να μην περιέχουν αναφορές με τρόπο που να οδηγεί στην ταυτοποίηση οποιουδήποτε μέλους της συγγραφικής ομάδας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίλυση προβλήματος με χρήση ψηφιακών μέσων

Βερύκιος Χρυσοβαλάντης
Μαθηματικός, 1^{ο} Ημερήσιο Γενικό Λύκειο Υμηττού
cverykios@sch.gr

Περίληψη

Παρουσιάζουμε μια διδασκαλία που εφαρμόστηκε στην τάξη και αφορά την επίλυση ενός προβλήματος. Οι μαθητές/τριες που συμμετείχαν στη διδασκαλία δουλεύοντας σε ομάδες εργάστηκαν αρχικά πάνω στη μοντελοποίηση του προβλήματος, στη συνέχεια αξιοποίησαν ψηφιακά μέσα για να δώσουν μια πρώτη προσεγγιστική λύση και τελικά χρησιμοποίησαν συλλογισμούς που βασίζονται στη γεωμετρία για να δώσουν την ακριβή γεωμετρική λύση και το ζητούμενο αριθμητικό αποτέλεσμα. Αναδεικνύονται οι δυνατότητες που προσφέρουν τα ψηφιακά μέσα για διερεύνηση και χρήση οπτικών αναπαραστάσεων αλλά και η ανάγκη για τη χρήση μαθηματικού συλλογισμού που θα οδηγήσει στην πλήρη επίλυση του προβλήματος.

Abstract

We present a teaching that was implemented in the classroom and concerns the solution of a problem. The students who participated in the teaching working in groups initially worked on the modeling of the problem, then utilized digital media to provide a first approximate solution and finally used reasoning based on geometry to provide the exact geometric solution and the desired numerical result. The possibilities offered by digital media for investigation and use of visual representations are highlighted, as well as the need for the use of mathematical reasoning that will lead to the complete solution of the problem.

Λέξεις κλειδιά: μοντελοποίηση, ψηφιακά μέσα, μαθηματικός συλλογισμός

Εισαγωγή

Η διδασκαλία σχεδιάστηκε με πολλαπλούς στόχους.

- να εμπλέξει τους μαθητές/τριες σε διαδικασίες μοντελοποίησης: Οι μαθητές/τριες χρειάζεται να απορρίψουν στοιχεία που καθιστούν το πρόβλημα δύσκολο μέχρι αδύνατο να λυθεί χωρίς να έχουν επιπλέον δεδομένα (κάτι που συχνά κάνουν στο μάθημα της φυσικής όταν για παράδειγμα θεωρούν ότι η αντίσταση του αέρα δεν παίζει ρόλο ή ότι το βαρυτικό πεδίο έχει σταθερή ένταση). Στη συνέχεια χρειάζεται να «μεταφράσουν» το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα και να χρησιμοποιήσουν τα κατάλληλα εργαλεία για την επίλυσή του (π.χ. κατάλληλη συνάρτηση, επίλυση εξίσωσης ή ανίσωσης)
- να εξοικειώσει τους μαθητές/τριες με τις δυνατότητες που προσφέρουν τα μαθηματικά λογισμικά: το πρόβλημα είναι κατάλληλα σχεδιασμένο ώστε οι μαθητές/τριες να μην έχουν σε πρώτη φάση τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία για να επεξεργαστούν την παράσταση (συνάρτηση) που προκύπτει από τη μοντελοποίηση. Τα ψηφιακά μέσα δίνουν τη δυνατότητα διερεύνησης (οι περιπτώσεις που εξετάζονται είναι συντριπτικά περισσότερες από αυτές που μπορούν να εξεταστούν με χαρτί και μολύβι), προσφέρουν οπτικές αναπαραστάσεις, αναδεικνύουν δυναμικό χαρακτήρα (με χρήση ενεργού ίχνους σημείου) και δίνουν τη δυνατότητα ελέγχου εικασιών και επιβεβαίωσης αποτελεσμάτων που έχουν προκύψει με άλλο τρόπο.
- να ωθήσει τους μαθητές/τριες σε συνδυαστική σκέψη και μαθηματικούς συλλογισμούς: Οι μαθητές/τριες χρειάζεται να ανακαλέσουν και να εφαρμόσουν συνδυαστικά μαθηματικά εργαλεία που έχουν διδαχθεί στα μαθήματα της άλγεβρας και της γεωμετρίας και να δώσουν μαθηματικά επιχειρήματα που θα οδηγήσουν στην ακριβή λύση του προβλήματος

- να διευκολύνει την επικοινωνία και το διάλογο των μαθητών/τριών : Ο ομαδοσυνεργατικός χαρακτήρας της διδασκαλίας δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές/τριες να εκφράσουν τις απόψεις τους πρώτα στο σχετικά «ασφαλές» περιβάλλον της ομάδας και να λάβουν ανατροφοδότηση από τη συνεργασία τους με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας ενώ η τελική πρόταση στην ολομέλεια είναι πρόταση της ομάδας και όχι καθενός από αυτούς ατομικά.

Γενικά στοιχεία της διδασκαλίας

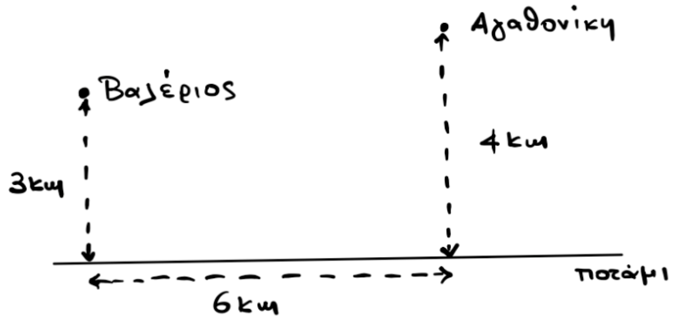
Συμμετείχαν οι μαθητές/τριες ενός τμήματος θετικού προσανατολισμού της Β τάξης. Οι μαθητές/τριες χωρίστηκαν σε 4 πενταμελείς ομάδες και εργάστηκαν στους χώρους της αίθουσας μαθηματικών του σχολείου με κατάλληλη διαρρύθμιση που εξυπηρετεί την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία. Για την πρόσβαση στο μαθηματικό λογισμικό (Geogebra) έγινε χρήση του διαθέσιμου διαδραστικού πίνακα. Η διδασκαλία είχε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών.

Διατύπωση του προβλήματος

Στους μαθητές/τριες δόθηκε η επόμενη εκφώνηση:

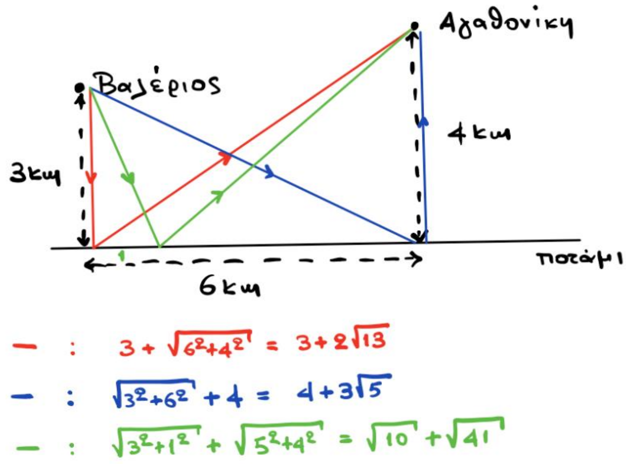
“Η αγελάδα Αγαθονίκη βόσκει αμέριμνη στο λιβάδι 4 χιλιόμετρα βόρεια από το ποτάμι. Κάποια στιγμή σκοντάφτει και χτυπάει στο πόδι. Ακινητοποιημένη μουγκανίζει απελπισμένα για λίγο νερό. Ο νεαρός βοσκός Βαλέριος βρίσκεται 6 χιλιόμετρα δυτικά της Αγαθονίκης και 3 χιλιόμετρα βόρεια από το ποτάμι. Μαθαίνει το ατύχημα και θέλει να της φέρει όσο το δυνατόν γρηγορότερα νερό από το ποτάμι. Μπορείτε να προτείνετε στον Βαλέριο μια κατάλληλη διαδρομή;”

Στον πίνακα ο διδάσκων δίνει το επόμενο πρόχειρο σχήμα :



Σχήμα 1 : Πρώτο πρόχειρο σχήμα στον πίνακα

Οι μαθητές/τριες συζητούν στις ομάδες και αποφασίζουν ότι το ζητούμενο του προβλήματος είναι η εύρεση της διαδρομής με το ελάχιστο μήκος από το Βαλέριο προς το ποτάμι και μετά προς την Αγαθονίκη. Οι διαδρομές που θα εξετάσουν αποτελούνται από ένα ευθύγραμμο κομμάτι από το Βαλέριο προς το ποτάμι και από ένα ευθύγραμμο κομμάτι από το ποτάμι προς την Αγαθονίκη. Γίνεται έτσι το πρώτο βήμα της μοντελοποίησης που αφορά την εξαίρεση στοιχείων που δημιουργούν αδικαιολόγητη πολυπλοκότητα στην επίλυση του προβλήματος (π.χ. ενδεχόμενη κλίση του εδάφους, εμπόδια στη διαδρομή, διαφορετική ταχύτητα του Βαλέριου στο πρώτο τμήμα της διαδρομής απ’ ότι στο δεύτερο). Οι μαθητές/τριες πειραματίζονται με απλές διαδρομές και προσπαθούν να συγκρίνουν τα μήκη που υπολογίζουν χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

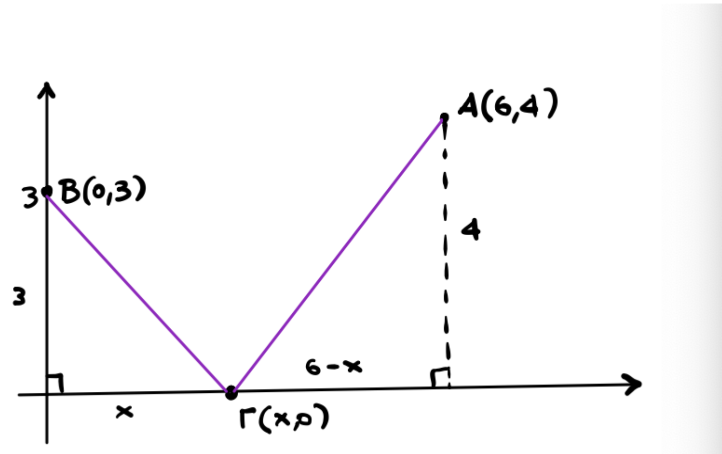


Σχήμα 2 : Μερικές απλές διαδρομές κα τα αντίστοιχα μήκη τους

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα ακόμη και στις απλές διαδρομές που επιλέγουν διαισθητικά οι μαθητές/τριες η σύγκριση των μηκών που προκύπτουν δεν είναι εύκολη με χαρτί και μολύβι.

Εισαγωγή συστήματος συντεταγμένων

Μετά από πρόταση του διδάσκοντα και σχετική συζήτηση με τους μαθητές/τριες επιλέγεται η χρήση του συστήματος συντεταγμένων που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

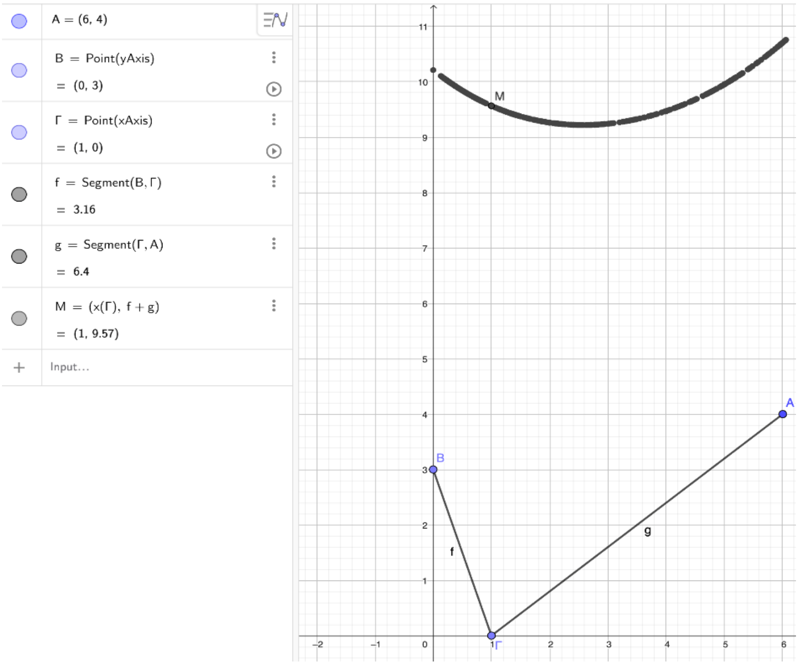


Σχήμα 3 : Χρήση συστήματος συντεταγμένων

Οι τρεις από τις τέσσερεις ομάδες υπολογίζουν σωστά την παράσταση που δίνει το μήκος της τυχαίας διαδρομής : $\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(6-x)^2+16}$ και μετά από σχετική ερώτηση του διδάσκοντα βρίσκουν τις συνθήκες που ικανοποιεί η μεταβλητή x : $0 \leq x \leq 6$. Οι μαθητές/τριες διαπιστώνουν ότι ενώ μπορούν να ελαχιστοποιήσουν κάθε μία από τις υπόρριζες ποσότητες ξεχωριστά δεν έχουν τα μαθηματικά εργαλεία για να βρουν την τιμή της μεταβλητής x που ελαχιστοποιεί την παράσταση στο σύνολό της.

Χρήση ψηφιακών μέσων

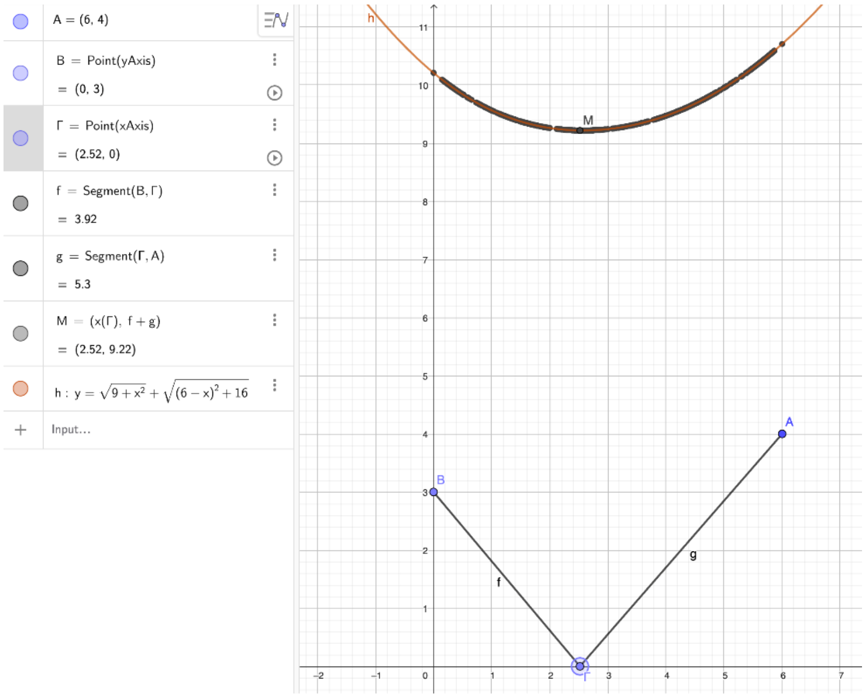
Στο διαδραστικό πίνακα σε ένα αρχείο Geogebra καταγράφεται δυναμικά το μήκος της διαδρομής για κάθε x. Επιπλέον δημιουργείται ένα σημείο Μ με τετμημένη το x και τεταγμένη το αντίστοιχο μήκος διαδρομής. Το σημείο Μ με το ίχνος ενεργό διαγράφει μια καμπύλη.



Σχήμα 4 : Η καμπύλη που διαγράφει το σημείο Μ

Οι μαθητές/τριες διαπιστώνουν ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι με βάση το λογισμικό το 9.22 παρατηρούν όμως ότι αυτό επιτυγχάνεται για διάφορες τιμές του x (π.χ. για x=2.39, x=2.40, … , x=2.75). Μετά από σχετική ερώτηση του διδάσκοντα παρατηρούν ότι αυτό μάλλον οφείλεται στα δεκαδικά ψηφία που δεν εμφανίζονται στο λογισμικό και ότι είναι βέβαιοι ότι υπάρχει κάποια τιμή της μεταβλητής x που ελαχιστοποιεί την παράσταση για την οποία οι παραπάνω τιμές είναι μια προσέγγιση. Η αιτιολόγηση που δίνουν αφορά το ότι η καμπύλη που διαγράφει το σημείο Μ έχει σημείο ελαχίστου που όμως δεν μπορούν να υπολογίσουν ακριβώς από τα στοιχεία που δίνει το λογισμικό.

Ο διδάσκων θέτει το ερώτημα τί νομίζουν ότι αντιπροσωπεύει η καμπύλη αυτή και μετά από σχετική συζήτηση δύο από τις ομάδες προτείνουν ότι είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f(x)=$\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(6-x)^2+16}$ και πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[0,6]$. Μια από τις δύο ομάδες προτείνει να αξιοποιηθεί η σχετική δυνατότητα του λογισμικού ώστε να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τον τύπο αυτό και να διαπιστωθεί κατά πόσο υπάρχει ταύτιση με την καμπύλη που διαγράφει το σημείο Μ.

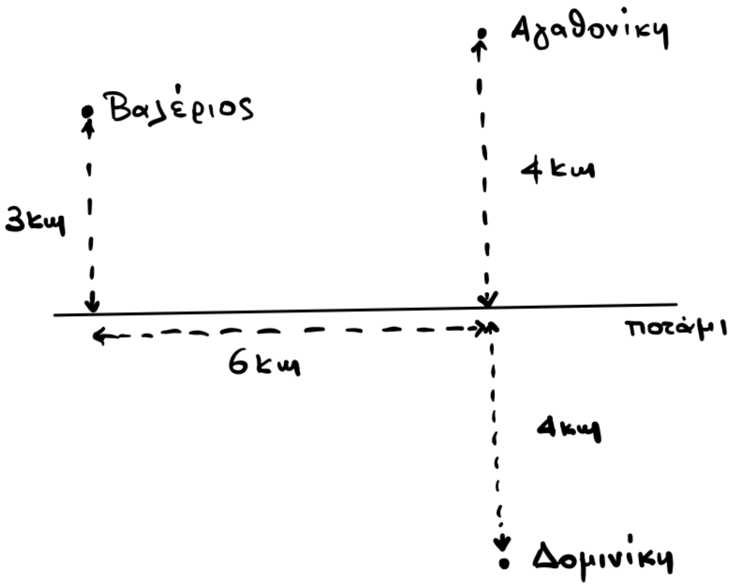


Σχήμα 5 : Η καμπύλη που διαγράφει το σημείο Μ ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που υπολογίστηκε νωρίτερα.

Μαθηματικός συλλογισμός

Ο διδάσκων δίνει την επόμενη προσθήκη στην εκφώνηση :

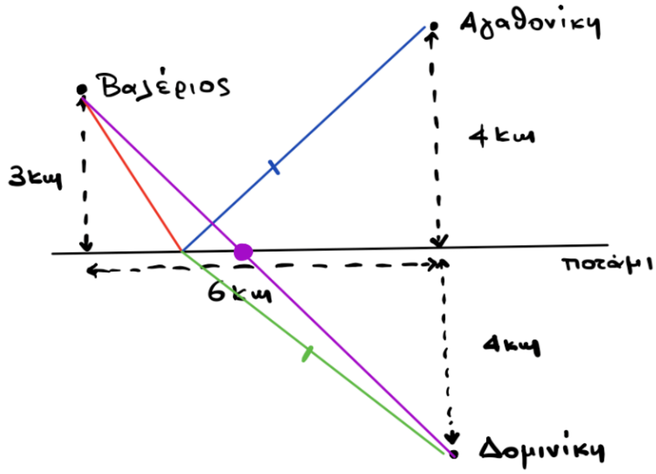
“Η ξαδέρφη της Αγαθονίκης, Δομινίκη, βρίσκεται στην απέναντι πλευρά του ποταμού επίσης 4 χιλιόμετρα μακριά από το ποτάμι και μασουλάει αμέριμνη ” συνοδευόμενη από το επόμενο σχήμα στον πίνακα



Σχήμα 6 : Δεύτερο πρόχειρο σχήμα στον πίνακα.

Οι μαθητές/τριες συζητούν ζωηρά την φαινομενικά άσχετη με το πρόβλημα προσθήκη. Μια από τις ομάδες ζητά το λόγο και παρουσιάζει στην ολομέλεια μια ιδέα που θεωρεί ότι είναι ενδιαφέρουσα. Θεωρώντας ότι το ποτάμι έχει αμελητέο πλάτος (ένα ακόμη στοιχείο απλοποίησης του προβλήματος) για κάθε σημείο που θα επιλεγεί στο ποτάμι η αντίστοιχη διαδρομή προς την Αγαθονίκη έχει ίσο μήκος με την αντίστοιχη διαδρομή προς τη Δομινίκη. Αρκεί λοιπόν να εντοπιστεί το σημείο στο ποτάμι που ελαχιστοποιεί τη διαδρομή προς τη δεύτερη αγελάδα. Ο διδάσκων καλεί τους μαθητές/τριες της ομάδας να αιτιολογήσουν το συλλογισμό τους και σύντομα προκύπτει μια απλή απόδειξη, το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία που βρίσκονται η Αγαθονίκη, η Δομινίκη και το σημείο που ο Βαλέριος θα λάβει νερό από το ποτάμι είναι ισοσκελές καθόσον «το ποτάμι είναι ταυτόχρονα ύψος και διάμεσος».

Οι ομάδες εργάζονται πλέον στην επίλυση του προβλήματος του υπολογισμού της ελάχιστης απόστασης προς τη Δομινίκη. Μια από τις ομάδες προτείνει στην ολομέλεια ότι η ελάχιστη απόσταση επιτυγχάνεται όταν ο Βαλέριος κινηθεί σε ευθεία γραμμή προς τη Δομινίκη.

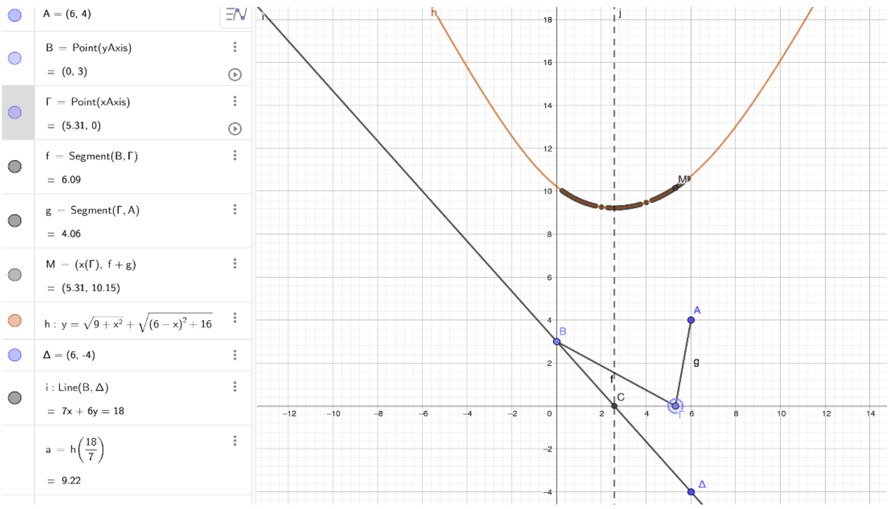


Σχήμα 7 : Η γεωμετρική λύση του προβλήματος

Ο διδάσκων ζητά να δοθεί μια μαθηματική εξήγηση για τον ισχυρισμό των μαθητών/τριών της ομάδας και αυτοί/ες ανακαλούν την τριγωνική ανισότητα και την εφαρμόζουν στο κατάλληλο τρίγωνο.

Η ακριβής λύση

Ο διδάσκων ζητά από τις ομάδες να αξιοποιήσουν τη γεωμετρική λύση που βρήκαν για να δώσουν μια ακριβή απάντηση στο πρόβλημα. Οι ομάδες εργάζονται στο χαρτί, υπολογίζουν την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Δ και τις συντεταγμένες του κοινού της σημείου με τον άξονα $x'x$, βρίσκουν έτσι την τιμή $x = \frac{18}{7}$. Μια από τις ομάδες προτείνει να ελέγξουν στο λογισμικό την λύση που βρήκαν.



Σχήμα 8 : Ο έλεγχος της λύσης στο περιβάλλον του Geogebra

Συμπεράσματα

Οι μαθητές/τριες ερμήνευσαν το ζητούμενο του προβλήματος ως την εύρεση της διαδρομής με το ελάχιστο μήκος και αποφάσισαν να εξετάσουν απλές διαδρομές που αποτελούνται από δύο ευθύγραμμα τμήματα αποφεύγοντας δυσκολίες που θα μπορούσαν να προκύψουν από τη μορφολογία του εδάφους (για την οποία άλλωστε η εκφώνηση δεν δίνει στοιχεία) ή την ταχύτητα του Βαλέριου σε κάθε τμήμα της διαδρομής. Με κατάλληλη παρότρυνση του διδάσκοντα κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα μαθηματικό μοντέλο για το πρόβλημα (την παράσταση που βρήκαν με το αντίστοιχο πεδίο ορισμού) το οποίο διαπίστωσαν ότι δεν μπορούν να διαχειριστούν με τα μαθηματικά εργαλεία που έχουν μάθει.

Το περιβάλλον του Geogebra τους έδωσε τη δυνατότητα να πειραματιστούν με πολύ περισσότερες διαδρομές, να ερμηνεύσουν την παράσταση που έδωσαν ως τύπο συνάρτησης, να έχουν την οπτική αναπαράσταση της συνάρτησης αυτής από την καμπύλη που διαγράφει το σημείο Μ, να ερμηνεύσουν τη λύση του προβλήματος ως την εύρεση του ελάχιστου για την καμπύλη που σχηματίστηκε.

Η αδυναμία του λογισμικού να προσφέρει την ακριβή λύση του προβλήματος και η προσθήκη στην εκφώνηση από τον διδάσκοντα έδωσε στους μαθητές/τριες τη δυνατότητα (και ανέδειξε την αναγκαιότητα) για μαθηματικούς συλλογισμούς που τελικά έδωσαν την ακριβή λύση στο πρόβλημα, μια λύση που στη συνέχεια ελέγχθηκε στο περιβάλλον του Geogebra.

Καταγράφουμε δύο αδυναμίες της διδασκαλίας :

- Οι μαθητές/τριες δεν είχαν ενεργό ρόλο στη διαχείριση του λογισμικού : Το λογισμικό λειτουργούσε στο διαδραστικό πίνακα και οι μαθητές/τριες εργάστηκαν παρατηρώντας τα τεκταινόμενα εκεί. Η επιλογή αυτή από την πλευρά του διδάσκοντα έγινε με το σκεπτικό ότι αυτή ήταν η πρώτη ουσιαστικά επαφή του συγκεκριμένου τμήματος με το λογισμικό (η διδασκαλία έγινε στην αρχή του σχολικού έτους) και η πρόθεση που υπήρχε ήταν να γίνει μια εξοικείωση των μαθητών/τριών με το συγκεκριμένο ψηφιακό εργαλείο και τις δυνατότητες που προσφέρει.
- Ο (έντονα παρεμβατικός) ρόλος του διδάσκοντα : Ο διδάσκων ήταν αυτός που προέτρεψε τους μαθητές/τριες στη χρήση συστήματος συντεταγμένων (που βέβαια επιλέχθηκε τελικά σε κοινή συμφωνία), ήταν αυτός που διαμόρφωσε το αρχείο στο λογισμικό, ενώ σε κατάλληλα σημεία όταν αντιλαμβανόταν ότι μια ομάδα είχε μια καλή ιδέα (ιδίως στην τελευταία φάση της διδασκαλίας) επέλεγε να επιτρέπει την κοινοποίηση της ιδέας στην ολομέλεια σε σύντομο χρονικό

διάστημα. Το σκεπτικό του διδάσκοντα ήταν ότι ο προγραμματισμένος χρόνος των δύο ωρών δεν θα ήταν επαρκής υπό άλλες συνθήκες.

Μια επέκταση της διδασκαλίας : Πώς αλλάζει η απάντηση αν κάποιος συνυπολογίσει την διαφοροποίηση στην ταχύτητα του Βαλέριου από το πρώτο στο δεύτερο μέρος της διαδρομής (άλλωστε στο δεύτερο μέρος της διαδρομής θα πρέπει να μεταφέρει και μια ικανοποιητική ποσότητα νερού). Το πρόβλημα τότε ξεφεύγει από τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών/τριών της Β τάξης και χρειάζεται υλικό από τα μαθηματικά προσανατολισμού της Γ τάξης.

Αναφορές

Αν και θα μπορούσε απλά να δοθεί ως σχετική αναφορά η εφαρμογή 4 της παραγράφου 3.12 του σχολικού βιβλίου της γεωμετρίας της Α τάξης (λυκείου) όπου υπάρχει η ιδέα της εφαρμογής της τριγωνικής ανισότητας σε αντίστοιχο πρόβλημα νιώθουμε την ανάγκη να επισημάνουμε ότι στο σχεδιασμό της δραστηριότητας μας επηρέασε το εξαιρετικό βίντεο με τίτλο “Cow-culus and Elegant Geometry” που μπορεί να βρεθεί στο YouTube στο σύνδεσμο https://youtu.be/0SI3_XbItHo?si=MzXjm6YHFEe6KOzm

Οπτικοποιημένες προσεγγίσεις δύο αξιοσημείωτων αθροισμάτων

Φυντανάκης Δ. Αργύριος
Μαθηματικός – M.Sc., 2ο Γυμνάσιο Σύρου
argifyn@gmail.com

Περίληψη

Ο χειρισμός και ο μετασχηματισμός αλγεβρικών ποσοτήτων με ευελιξία, η παρατήρηση κανονικοτήτων και ομοιομορφιών, η αναδιάταξη των δεδομένων και η επαλήθευση ή η απόρριψη εικασιών κατά την αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων, είναι εργασίες στις οποίες η εμπλοκή των μαθητών θεωρείται απαραίτητη και πρέπει να αποτελεί προτεραιότητα στις διδακτικές μας επιλογές καθημερινά. Η οπτικοποίηση μπορεί να αναδείξει πτυχές δεδομένων που πρέπει να αξιοποιηθούν κατά την επίλυση ενός προβλήματος και άλλων που πρέπει να αγνοηθούν, γιατί πιθανώς συνιστούν εμπόδια. Ειδικότερα στο μάθημα της άλγεβρας, που η οπτική αναπαράσταση αριθμών, μεταβλητών και πράξεων είναι σπάνια, η οπτικοποιημένες διδακτικές προσεγγίσεις μπορούν να αναδείξουν ακόμα και διασκεδαστικές διαστάσεις των μαθηματικών. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε οπτικοποιημένες προσεγγίσεις για τον υπολογισμό δύο αξιοσημείωτων αθροισμάτων: του αθροίσματος των ν πρώτων φυσικών αριθμών και αυτού των ν πρώτων περιττών.

Abstract

Manipulating and transforming algebraic quantities with flexibility, observing regularities and uniformities, rearranging data and verifying or rejecting conjectures when dealing with problem situations are tasks in which student involvement is considered essential and should be a priority in our everyday teaching choices . Visualization can highlight aspects of data that should be leveraged when solving a problem and others that should be ignored because they may be obstacles. Especially in the algebra class, where the visual representation of numbers, variables and operations is rare, the visual teaching approaches can highlight even fun dimensions of mathematics. In this paper, we present visualized approaches for computing two remarkable sums: the sum of the first n natural numbers and that of the first n odd ones.

Λέξεις κλειδιά: οπτικές αναπαραστάσεις, άθροισμα ν πρώτων φυσικών, άθροισμα ν πρώτων περιττών.

Εισαγωγή

Η Ma Betty Parame – Decin (2023) υποστηρίζει ότι οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες μπορούν να καταστούν προσβάσιμες στους μαθητές, μέσω οπτικών αναπαραστάσεων. Η ενθάρρυνση των μαθητών μας για οπτικοποίηση των σκέψεών τους, κατά την επίλυση προβλημάτων, τους βοηθά να τα προσεγγίσουν πολύπλευρα, δοκιμάζοντας πιθανές λύσεις (Garden & Cline 2015).

Έτσι, προκειμένου να υποστηρίξουμε την κατανόηση από τους μαθητές μας, μαθηματικών εννοιών, και να τους ενδυναμώσουμε την πεποίθηση ότι είναι ικανοί να επιλύουν σύνθετα μαθηματικά προβλήματα, είναι σημαντικό να χρησιμοποιούμε στις διδασκαλίες μας, οπτικές αναπαραστάσεις. Οι οπτικές αναπαραστάσεις βοηθούν στην εστίαση σε σημαντικές πληροφορίες, στο πως αυτές σχετίζονται, αλλά και στην παράλειψη όσων δεν είναι σημαντικές και προκαλούν εμπόδια κατά την επίλυση προβλημάτων ή την κατανόηση εννοιών (Kolloffel et al. 2009).

Οι Star et al. (2015) υποστηρίζουν ειδικότερα, ότι η κατανόηση εννοιών και διαδικασιών της άλγεβρας, είναι θεμελιώδης για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών άλλων επιστημονικών αντικειμένων όπως η φυσική, η στατιστική, η επιχειρησιακή έρευνα, οι νέες τεχνολογίες, η πληροφορική κ.α. Οι Kilpatrick et al. (2001) στην ίδια λογική, υποστήριξαν ότι η βαθιά κατανόηση της άλγεβρας αποτελεί προϋπόθεση για επάρκεια αλλά και αριστεία σε προηγμένους τομείς που σχετίζονται μα τα μαθηματικά, αλλά και στην ζωή συνολικά.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σκέψεις, οι Satsangi et al. (2016) αναφερόμενοι στην σπουδαιότητα της εκμάθησης της άλγεβρας από τους μαθητές, υποστήριξαν ότι η ενσωμάτωση στις διδακτικές πρακτικές, οπτικών αναπαραστάσεων πράξεων με μεταβλητές και αριθμούς, προκαλεί και διατηρεί το ενδιαφέρον των μαθητών κατά την διδασκαλία της άλγεβρας, ενώ ενθαρρύνει την ενεργό συμμετοχή ενισχύοντας τα μαθησιακά αποτελέσματα.

Εμείς στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε τον υπολογισμό τους αθροίσματος των ν πρώτων φυσικών αριθμών καθώς και αυτού των ν πρώτων περιττών, χρησιμοποιώντας οπτικές αναπαραστάσεις με χρωματιστές κουκκίδες. Δεν θα επιμείνουμε στην μαθηματική αυστηρότητα, αφού ο στόχος είναι η κατανόηση των ιδεών από μαθητές, ακόμη και των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού Σχολείου και να δείξουμε ότι οι μαθηματικές ιδέες παρά την αυστηρότητά τους μπορεί να είναι διασκεδαστικές όταν οπτικοποιηθούν κατάλληλα.

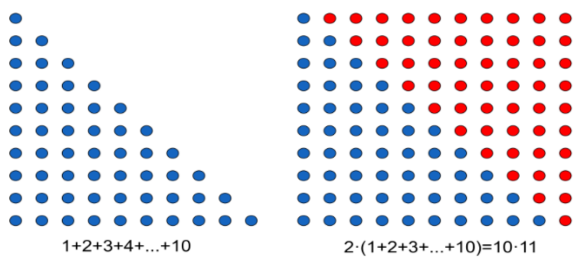
Το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu$ των ν πρώτων φυσικών αριθμών θα χρησιμοποιήσουμε οπτικοποιήσεις που παραπέμπουν σε οικεία προς τους μαθητές σχήματα, όπως το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο αλλά και την ακολουθία των τριγωνικών αριθμών.

Το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών – Σχηματίζοντας ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu$ αναπαριστούμε τους αριθμούς με μπλε κουκκίδες τοποθετημένες σε στήλες με τον αριθμό των κουκκίδων από στήλη σε στήλη να μειώνεται κατά μία έως ότου να φτάσουμε στην τελευταία στήλη με μια μόνο κουκκίδα, σχηματίζοντας έτσι ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Για να γίνει πιο κατανοητή η ιδέα ας υπολογίσουμε το άθροισμα: $1 + 2 + 3 + \cdots + 10$. Σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο από κουκκίδες μπλε χρώματος τοποθετημένες σε στήλες (Εικόνα 1 αριστερά). Η 1η στήλη με 10 μπλε κουκκίδες, η 2η στήλη με 9 μπλε κουκκίδες, … , η 10η στήλη με 1 μπλε κουκκίδα. Συμπληρώνουμε την κάθε στήλη με κατάλληλο αριθμό κόκκινων κουκκίδων (Εικόνα 1 δεξιά):

1η στήλη: **10 μπλε** κουκκίδες και **0 κόκκινες** κουκκίδες
2η στήλη: **9 μπλε** κουκκίδες και **1 κόκκινη** κουκκίδα
3η στήλη: **8 μπλε** κουκκίδες και **2 κόκκινες** κουκκίδες
4η στήλη: **7 μπλε** κουκκίδες και **3 κόκκινες** κουκκίδες
5η στήλη: **6 μπλε** κουκκίδες και **4 κόκκινες** κουκκίδες
6η στήλη: **5 μπλε** κουκκίδες και **5 κόκκινες** κουκκίδες
7η στήλη: **4 μπλε** κουκκίδες και **6 κόκκινες** κουκκίδες
8η στήλη: **3 μπλε** κουκκίδες και **7 κόκκινες** κουκκίδες
9η στήλη: **2 μπλε** κουκκίδες και **8 κόκκινες** κουκκίδες
10η στήλη: **1 μπλε** κουκκίδα και **9 κόκκινες** κουκκίδες
11η στήλη: **0 μπλε** κουκκίδες και **10 κόκκινες** κουκκίδες



Εικόνα 1: Υπολογισμός του αθροίσματος $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$ με διάταξη ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο 10 γραμμών και 11 στηλών με συνολικά $10 \times 11 = 110$ κουκκίδες, εκ των οποίων οι μισές είναι μπλε και οι άλλες μισές κόκκινες. Άρα ο αριθμός των μπλε κουκκίδων είναι:

$$1+2+3+\cdots+10=\frac{110}{2}=55$$

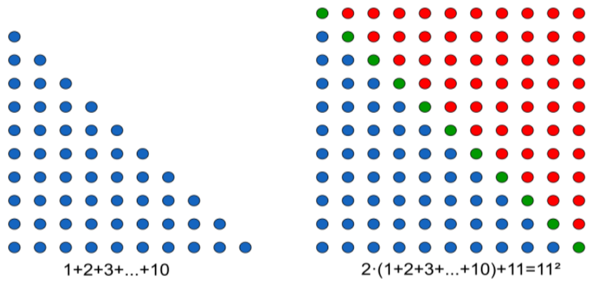
Γενικεύοντας μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών $1+2+3+\cdots+\nu$ διπλασιάζοντας το ορθογώνιο τρίγωνο με τις μπλε κουκκίδες που αναπαριστά το άθροισμα αυτό, δημιουργώντας έτσι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που απαρτίζεται από ίσο αριθμό μπλε και κόκκινων κουκκίδων με ν γραμμές και ν+1 στήλες το οποίο περιλαμβάνει συνολικά από $\nu\cdot(\nu+1)$ κουκκίδες (μισές μπλε και μισές κόκκινες). Έτσι ο ζητούμενος αριθμός κόκκινων κουκκίδων είναι:

$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$$

Το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών – Σχηματίζοντας τετράγωνο

Εναλλακτικά για τον υπολογισμό του αθροίσματος $1+2+3+\cdots+\nu$ μπορούμε να σχηματίσουμε τετράγωνο αντί για ορθογώνιο. Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα το άθροισμα $1+2+3+\cdots+10$. Αναπαριστούμε, όπως και πριν, τους αριθμούς με μπλε κουκκίδες τοποθετημένες σε στήλες, με τον αριθμό των κουκκίδων από στήλη σε στήλη να μειώνεται κατά μία έως ότου να φτάσουμε στην τελευταία στήλη, με μια μόνο κουκκίδα, σχηματίζοντας έτσι ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Πιο συγκεκριμένα σχηματίζουμε η 1η στήλη με 10 μπλε κουκκίδες, η 2η στήλη με 9 μπλε κουκκίδες, … , η 10η στήλη με 1 μπλε κουκκίδα. (Εικόνα 2 αριστερά). Συμπληρώνουμε την κάθε στήλη με κατάλληλο αριθμό πράσινων και κόκκινων κουκκίδων (Εικόνα 2 δεξιά):

1η στήλη: **10 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **0 κόκκινες** κουκκίδες
2η στήλη: **9 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **1 κόκκινη** κουκκίδα
3η στήλη: **8 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **2 κόκκινες** κουκκίδες
4η στήλη: **7 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **3 κόκκινες** κουκκίδες
5η στήλη: **6 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **4 κόκκινες** κουκκίδες
6η στήλη: **5 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **5 κόκκινες** κουκκίδες
7η στήλη: **4 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **6 κόκκινες** κουκκίδες
8η στήλη: **3 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **7 κόκκινες** κουκκίδες
9η στήλη: **2 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **8 κόκκινες** κουκκίδες
10η στήλη: **1 μπλε** κουκκίδα, **1 πράσινη** κουκκίδα και **9 κόκκινες** κουκκίδες
11η στήλη: **0 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **10 κόκκινες** κουκκίδες



Εικόνα 2: Υπολογισμός του αθροίσματος $1+2+3+\ldots+10$ με διάταξη τετραγώνου

Ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο με 11 γραμμές και 11 στήλες από κουκκίδες, συνολικά $11\times 11=121$ κουκκίδων όπου 11 κουκκίδες πράσινου χρώματος είναι τοποθετημένες στην διαγώνιο και οι μισές από τις $121-11=110$, δηλαδή 55 κουκκίδες είναι οι κουκκίδες μπλε χρώματος τοποθετημένες κάτω από την διαγώνιο, ενώ οι άλλες 55 κόκκινου χρώματος είναι τοποθετημένες πάνω από την διαγώνιο (Εικόνα 2 δεξιά). Έτσι προκύπτει ότι:

$$2\cdot(1+2+3+\cdots+10)+11=11^2$$
$$2\cdot(1+2+3+\cdots+10)=11^2-11$$

$$1+2+3+\cdots+10=\frac{11\cdot(11-1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+10=55$$

Γενικεύοντας, για τον υπολογισμό του αθροίσματος $1+2+3+\cdots+\nu$ αναπαριστούμε τους προσθετέους με μπλε κουκκίδες τοποθετημένες σε στήλες, με την πρώτη στήλη να έχει ν κουκκίδες και τον αριθμό των κουκκίδων από στήλη σε στήλη να μειώνεται κατά μία, έως ότου να φτάσουμε στην τελευταία στήλη, με μια μόνο κουκκίδα, σχηματίζοντας έτσι ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Έπειτα σχηματίζουμε ένα τετράγωνο με $\nu+1$ γραμμές και $\nu+1$ στήλες από κουκκίδες, ως εξής:

1η στήλη: $\boldsymbol{\nu}$ **μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **0 κόκκινες** κουκκίδες
2η στήλη: $\boldsymbol{\nu-1}$ **μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **1 κόκκινη** κουκκίδα
3η στήλη: $\boldsymbol{\nu-2}$ **μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **2 κόκκινες** κουκκίδες
4η στήλη: $\boldsymbol{\nu-3}$ **μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **3 κόκκινες** κουκκίδες
. . . .
. . . .
. . . .
(ν+1)η στήλη: **0 μπλε** κουκκίδες, **1 πράσινη** κουκκίδα και **ν κόκκινες** κουκκίδες

συνολικά $(\nu+1)\times(\nu+1)=(\nu+1)^2$ κουκκίδων όπου $\nu+1$ κουκκίδες πράσινου χρώματος είναι τοποθετημένες στην διαγώνιο και οι μισές από τις $(\nu+1)^2-(\nu+1)$, είναι οι κουκκίδες μπλε χρώματος που είναι τοποθετημένες κάτω από την διαγώνιο, ενώ οι άλλες μισές είναι πάνω από την διαγώνιο. Έτσι ισχύει:

$$2(1+2+3+\cdots+\nu)+(\nu+1)=(\nu+1)^2$$

$$2(1+2+3+\cdots+\nu)=(\nu+1)^2-(\nu+1)$$

$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{(\nu+1)^2-(\nu+1)}{2}$$

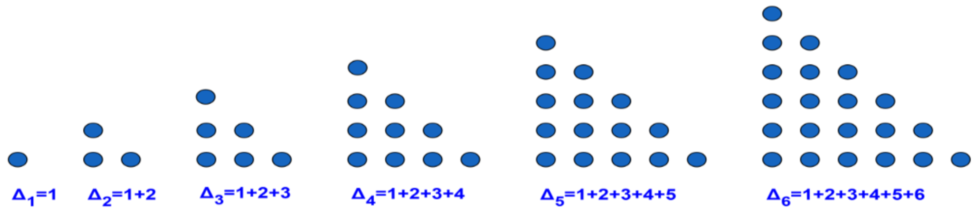
$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{(\nu+1)\cdot(\nu+1-1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{(\nu+1)\cdot\nu}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$$

Το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών – Χρησιμοποιώντας την ακολουθία των τριγωνικών αριθμών

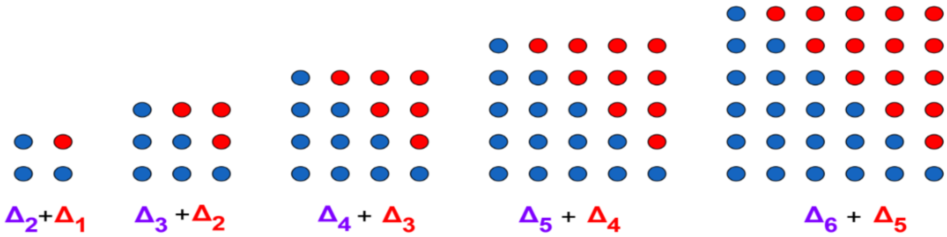
Έστω Δ_ν όπου ν φυσικός αριθμός η ακολουθία των τριγωνικών αριθμών (Εικόνα 3) της οποίας ο γενικός όρος είναι το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών.



Εικόνα 3: Οπτικοποίηση της ακολουθίας των τριγωνικών αριθμών

Έτσι:
1ος όρος: $\Delta_1 = 1$
2ος όρος: $\Delta_2 = 1 + 2$
3ος όρος: $\Delta_3 = 1 + 2 + 3$
4ος όρος: $\Delta_4 = 1 + 2 + 3 + 4$
ν-οστος όρος: $\Delta_\nu = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu$

Ας παρατηρήσουμε την οπτική αναπαράσταση του αθροίσματος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας των τριγωνικών αριθμών (Εικόνα 4).

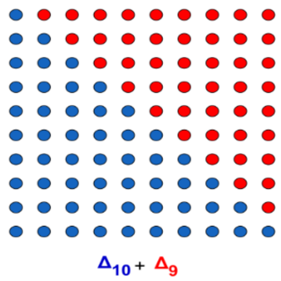


Εικόνα 4: Οπτικοποίηση αθροίσματος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας των τριγωνικών αριθμών

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\Delta_2 + \Delta_1 = 2^2$$
$$\Delta_3 + \Delta_2 = 3^2$$
$$\Delta_4 + \Delta_3 = 4^2$$
$$\Delta_5 + \Delta_4 = 5^2$$
$$\Delta_6 + \Delta_5 = 6^2$$

Ας υπολογίσουμε το άθροισμα $1 + 2 + 3 + \cdots + 10$ χρησιμοποιώντας την παρατήρηση αυτή. Ισχύει (Εικόνα 5):



Εικόνα 5: Υπολογισμός του αθροίσματος $\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + 10}$ από το άθροισμα $\mathbf{\Delta_{10} + \Delta_9}$

$$\Delta_{10} + \Delta_9 = 10^2$$

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) + (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 10^2$$

$$(1+2+3+\cdots+10)+(1+2+3+\cdots+9+\mathbf{10})=10^2+\mathbf{10}$$

$$2\cdot(1+2+3+\cdots+10)=10^2+10$$

$$2\cdot(1+2+3+\cdots+10)=10\cdot(10+1)$$

$$1+2+3+\cdots+10=\frac{10\cdot(10+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+10=\frac{10\cdot 11}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+10=55$$

Αντιστοίχως για τον υπολογισμό του αθροίσματος $1+2+3+\cdots+\nu$ ισχύει:

$$\Delta_\nu+\Delta_{\nu-1}=\nu^2$$

$$(1+2+3+\cdots+\nu)+(1+2+3+\cdots+\nu-1)=\nu^2$$

$$(1+2+3+\cdots+\nu)+(1+2+3+\cdots+\nu-1+\boldsymbol{\nu})=\nu^2+\boldsymbol{\nu}$$

$$2\cdot(1+2+3+\cdots+\nu)=\nu^2+\nu$$

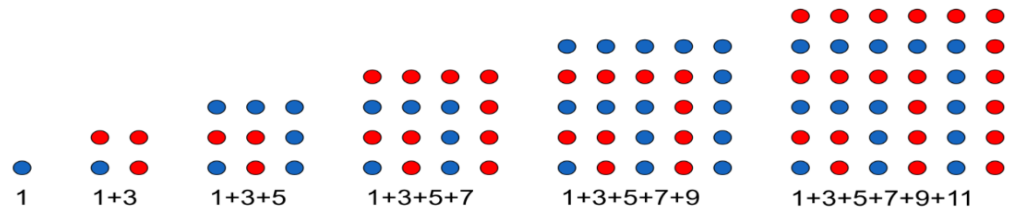
$$2\cdot(1+2+3+\cdots+\nu)=\nu\cdot(\nu+1)$$

$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$$

Το άθροισμα των ν πρώτων περιττών

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των ν πρώτων περιττών αριθμών θα χρησιμοποιήσουμε οπτικοποίηση με κουκκίδες τετραγωνικής διάταξης, ορθογώνιας διάταξης και τέλος την συμμετρία ως προς άξονα.

Το άθροισμα των ν πρώτων περιττών – Χρησιμοποιώντας τετραγωνική διάταξη



Εικόνα 6: Τετραγωνική διάταξη για τον υπολογισμό του αθροίσματος των ν πρώτων περιττών αριθμών

Το άθροισμα των **δύο (2) πρώτων περιττών** αριθμών μπορεί να οπτικοποιηθεί (Εικόνα 6) ως τετράγωνο πλευράς δύο κουκκίδων συνολικά $2\times 2=2^2$ κουκκίδων. Έτσι ισχύει:

$$\underbrace{1+3}_{\acute{\alpha}\theta\rho.\ \delta\acute{\upsilon}o\ \pi\rho\acute{\omega}\tau\omega\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\omega}\nu}=\mathbf{2}^2\quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \ \mathbf{2o\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma}=\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}-\mathbf{1}$$

Ομοίως το άθροισμα των **τριών (3) πρώτων περιττών** αριθμών μπορεί να απεικονιστεί (Εικόνα 6) με χρήση τετραγωνικής διάταξης πλευράς τριών κουκκίδων, συνολικά $3\times 3=3^2$ κουκκίδων. Έτσι ισχύει:

$$\underbrace{1+3+\mathbf{5}}_{\acute{\alpha}\theta\rho.\ \tau\rho\iota\acute{\omega}\nu\ \pi\rho\acute{\omega}\tau\omega\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\omega}\nu} = \mathbf{3}^2 \qquad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mathbf{3o\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} = \mathbf{2\cdot 3-1}$$

Με ανάλογους συλλογισμούς το άθροισμα των **τεσσάρων (4) πρώτων περιττών** (Εικόνα 6) είναι:

$$\underbrace{1+3+5+\mathbf{7}}_{\alpha\theta\rho.\ \tau\varepsilon\sigma\sigma\acute{\alpha}\rho\omega\nu\ \pi\rho\acute{\omega}\tau\omega\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\omega}\nu} = \mathbf{4}^2 \qquad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mathbf{4o\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} = \mathbf{2\cdot 4-1}$$

Το άθροισμα των **πέντε (5) πρώτων περιττών** (Εικόνα 6) είναι:

$$\underbrace{1+3+5+7+\mathbf{9}}_{\alpha\theta\rho.\ \pi\acute{\varepsilon}\nu\tau\varepsilon\ \pi\rho\acute{\omega}\tau\omega\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\omega}\nu} = \mathbf{5}^2 \qquad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mathbf{5o\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} = \mathbf{2\cdot 5-1}$$

Το άθροισμα των **έξι (6) πρώτων περιττών** (Εικόνα 6) είναι:

$$\underbrace{1+3+5+7+\mathbf{9}+\mathbf{11}}_{\alpha\theta\rho.\ \pi\acute{\varepsilon}\nu\tau\varepsilon\ \pi\rho\acute{\omega}\tau\omega\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\omega}\nu} = \mathbf{6}^2 \qquad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mathbf{6o\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} = \mathbf{2\cdot 6-1}$$

Γενικεύοντας, το άθροισμα των **ν πρώτων περιττών** $1+2+3+\cdots+(2\nu-1)$ είναι:

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+\mathbf{(2\nu-1)}}_{\acute{\alpha}\theta\rho.\ \nu\ \pi\rho\acute{\omega}\tau\omega\nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\omega}\nu} = \boldsymbol{\nu}^2 \qquad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \boldsymbol{\nu - o\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} = \mathbf{2}\cdot\boldsymbol{\nu}-\mathbf{1}$$

Το άθροισμα των ν πρώτων περιττών – Χρησιμοποιώντας ορθογώνια διάταξη

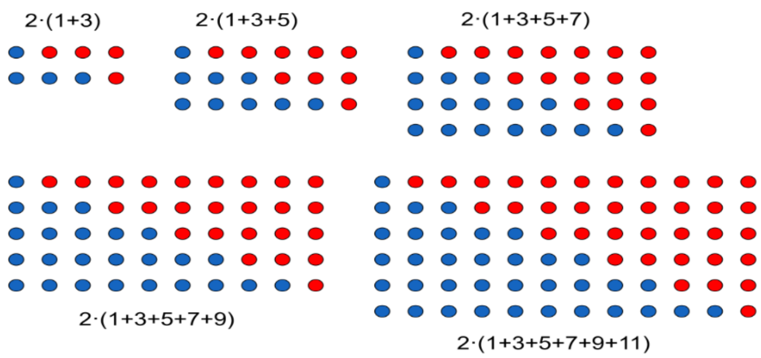
Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των ν πρώτων περιττών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και ορθογώνια οπτικοποίηση (Εικόνα 7). Έτσι για τον υπολογισμό του αθροίσματος των **δύο πρώτων περιττών** έχουμε:

$$2\cdot(\mathbf{1+3}) = 2\cdot 4$$

$$1+3 = \frac{2\cdot 4}{2}$$

$$1+3 = 4$$

$$1+3 = 2^2$$



Εικόνα 7: Απεικόνιση αθροίσματος ν πρώτων περιττών αριθμών με ορθογώνια διάταξη

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των **τριών πρώτων περιττών** (Εικόνα 7) έχουμε:

$$2\cdot(\mathbf{1+3+5})=3\cdot 6$$
$$1+3+5=\frac{3\cdot 6}{2}$$
$$1+3+5=9$$
$$1+3+5=3^2$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των **τεσσάρων πρώτων περιττών** (Εικόνα 7) έχουμε:

$$2\cdot(\mathbf{1+3+5+7})=4\cdot 8$$
$$1+3+5+7=\frac{4\cdot 8}{2}$$
$$1+3+5+7=16$$
$$1+3+5+7=4^2$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των **πέντε πρώτων περιττών** (Εικόνα 7) έχουμε:

$$2\cdot(\mathbf{1+3+5+7+9})=5\cdot 10$$
$$1+3+5+7+9=\frac{5\cdot 10}{2}$$
$$1+3+5+7+9=25$$
$$1+3+5+7+9=5^2$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των **έξι πρώτων περιττών** (Εικόνα 7) έχουμε:

$$2\cdot(\mathbf{1+3+5+7+9+11})=6\cdot 12$$
$$1+3+5+7+9=\frac{6\cdot 12}{2}$$
$$1+3+5+7+9=36$$
$$1+3+5+7+9=6^2$$

Γενικεύοντας αν έχουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των ν πρώτων περιττών $1+2+3+\cdots+(\mathbf{2\nu-1})$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια ορθογώνια διάταξη με ν γραμμές και 2ν στήλες από κουκκίδες που σε κάθε γραμμή θα έχει:

1η γραμμή: 1 μπλε κουκκίδα και 2ν-1 κόκκινες κουκκίδες
2η γραμμή: 2 μπλε κουκκίδες και 2ν-2 κόκκινες κουκκίδες
3η γραμμή: 3 μπλε κουκκίδες και 2ν-3 κόκκινες κουκκίδες
. . . .
. . . . . .
. . . .
ν-οστη γραμμή: 2ν-1 μπλε κουκκίδες και 1 κόκκινη κουκκίδα
συνολικά $2\nu\cdot\nu=2\nu^2$ κουκκίδων. Έτσι:

$$2\cdot(1+2+3+\cdots+2\nu-1)=2\nu^2$$

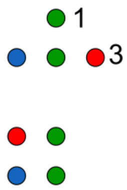
$$1+2+3+\cdots+2\nu-1=\nu^2$$

Το άθροισμα των ν πρώτων περιττών – Αξιοποιώντας την συμμετρία ως προς άξονα

Εναλλακτικά για τον υπολογισμό του αθροίσματος των ν πρώτων περιττών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάταξη με κουκκίδες τριών χρωμάτων αξιοποιώντας την συμμετρία ως προς άξονα.

Ας αρχίσουμε με την τετριμμένη περίπτωση του αθροίσματος των δύο πρώτων περιττών 1+3 (Εικόνα 8). Είναι μια μπλε κουκκίδα, μια κόκκινη κουκκίδα και δύο οι πράσινες του άξονα συμμετρίας:

$$1 + 3 = 2 \cdot 1 + 2 = 4 = 2^2$$

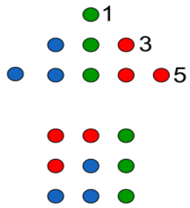


Εικόνα 8: Το άθροισμα 1+3 με συμμετρική διάταξη και ο μετασχηματισμός της σε διάταξη τετραγώνου

Ας πάρουμε τώρα το άθροισμα των τριών πρώτων περιττών 1+2+3 (Εικόνα 9). Είναι 1+2 μπλε, 1+2 κόκκινες και οι τρεις πράσινες κουκκίδες του άξονα συμμετρίας:

$$1 + 3 + 5 = 2 \cdot (1 + 2) + 3 = 9 = 3^2$$

Επιπλέον παρατηρούμε στην Εικόνα 9 ότι αν η τριγωνική διάταξη των κόκκινων κουκίδων τοποθετηθεί κατάλληλα πάνω από αυτή των μπλε, προκύπτει τετραγωνική διάταξη πλευρά τριών κουκκίδων, συνολικά δηλαδή 3^2 κουκκίδων.

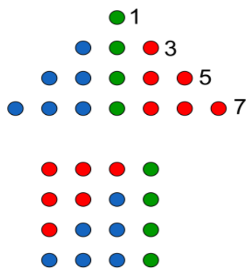


Εικόνα 9: Το άθροισμα 1+3+5 με συμμετρική διάταξη και ο μετασχηματισμός της σε διάταξη τετραγώνου

Για το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων περιττών 1+3+5+7 (Εικόνα 10), είναι 1+2+3 μπλε, 1+2+3 κόκκινες και 4 πράσινες κουκκίδες του άξονα συμμετρίας. Έτσι:

$$1 + 3 + 5 + 7 = 2 \cdot (1 + 2 + 3) + 4 = 16 = 4^2$$

Επιπλέον παρατηρούμε στην Εικόνα 10, ότι αν η τριγωνική διάταξη των κόκκινων κουκίδων τοποθετηθεί κατάλληλα πάνω από αυτή των μπλε, προκύπτει τετραγωνική διάταξη πλευρά τεσσάρων κουκκίδων, συνολικά δηλαδή 4^2 κουκκίδων.

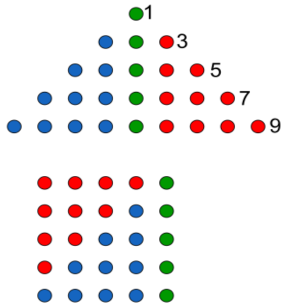


Εικόνα 10: Το άθροισμα 1+3+5+7 με συμμετρική διάταξη και ο μετασχηματισμός της σε διάταξη τετραγώνου

Το άθροισμα των πέντε πρώτων περιττών αριθμών (Εικόνα 11) είναι 1+2+3+4 μπλε, 1+2+3+4 κόκκινες και 5 πράσινες κουκκίδες του άξονα συμμετρίας. Έτσι:

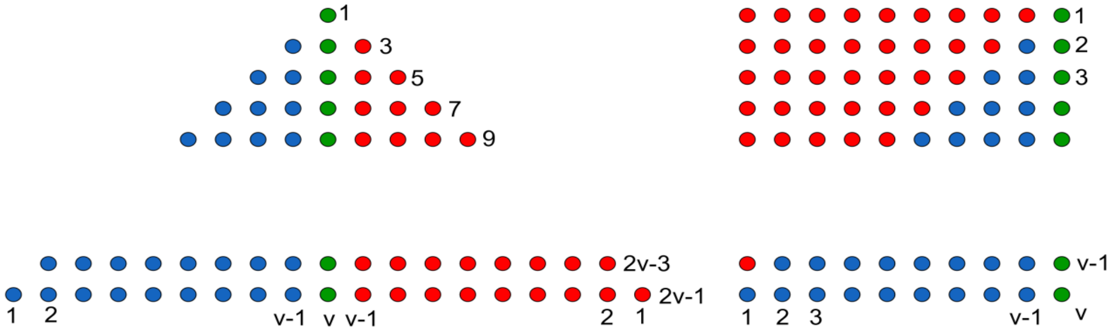
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 5 = 25 = 5^2$$

Επιπλέον παρατηρούμε στην Εικόνα 11 ότι αν η τριγωνική διάταξη των κόκκινων κουκίδων τοποθετηθεί κατάλληλα πάνω από αυτή των μπλε, προκύπτει τετραγωνική διάταξη πλευρά τριών κουκκίδων, συνολικά δηλαδή 5^2 κουκκίδων.



Εικόνα 11: Το άθροισμα 1+3+5+7+9 με συμμετρική διάταξη και ο μετασχηματισμός της σε διάταξη τετραγώνου

Γενικεύοντας, για το άθροισμα των ν πρώτων περιττών μπορούμε να παρουσιάσουμε μια συμμετρική διάταξη με 1+2+3+…+ν-1 μπλε, 1+2+3+…+ν-1 κόκκινες και ν πράσινες κουκκίδες του άξονα συμμετρίας (Εικόνα 12).



Εικόνα 12: Το άθροισμα 1+3+…+2ν-1 με συμμετρική διάταξη και ο μετασχηματισμός της σε διάταξη τετραγώνου

Έτσι:

$$1 + 3 + \cdots + 2\nu - 1 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + \nu - 1) + \nu$$

$$1 + 3 + \cdots + 2\nu - 1 = 2 \cdot \frac{(\nu - 1) \cdot (\nu - 1 + 1)}{2} + \nu$$

$$1 + 3 + \cdots + 2\nu - 1 = (\nu - 1) \cdot (\nu - 1 + 1) + \nu$$

$$1 + 3 + \cdots + 2\nu - 1 = (\nu - 1) \cdot \nu + \nu$$

$$1 + 3 + \cdots + 2\nu - 1 = \nu^2 - \nu + \nu$$

$$1 + 3 + \cdots + 2\nu - 1 = \nu^2$$

Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια για την παρουσίαση οπτικοποιημένων προσεγγίσεων δύο αξιοσημείωτων αθροισμάτων. Δεν έγινε εξαντλητική παρουσίαση όλων των πιθανών αναπαραστάσεων αλλά επιλέχθηκαν αναπαραστάσεις που θεωρούμε ότι μπορούν να έχουν θετικό αντίκτυπο στην κατανόηση των υπολογισμών των δύο αυτών αθροισμάτων, χωρίς να έχει προηγηθεί η διδασκαλία της αριθμητικής προόδου. Απομένει στην σχολική χρονιά που τώρα ξεκινά να δούμε την πιθανή διδακτική προστιθέμενη αξία όσων παρουσιάσαμε, στο πλαίσιο είτε κάποιου ομίλου μαθηματικών, είτε της προετοιμασίας των μαθητών για την συμμετοχή σε κάποιο διαγωνισμό της Μαθηματικής Εταιρείας, είτε και εντός της τάξης σε στιγμές που προσφέρονται για απόδραση από το ασφυκτικό πλαίσιο του Προγράμματος Σπουδών και της διδασκόμενης ύλης.

Βιβλιογραφία

Carden, J., & Cline, T. (2015). Problem solving in mathematics: The significance of visualization and related working memory. Educational Psychology in Practice, 31(3), 235-246. https://doi-org.goucher.idm.oclc.orgT0.1080/02667363.2015.1051660

Kolloffel B., Eysink T. H., de Jong T., Wilhelm P. (2009). The effects of representational format on learning combinatorics from an interactive computer simulation. Instructional Science, 37, 503-517.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academy Press.

MA. BETTY P, D. (2023). Visual Representations in Teaching Mathematics. Sprin Journal of Arts, Humanities and Soda/ Sciences, 2(05), 21-30. https://doi.org/10.55559/sjahss.v2i05.107

Satsangi, R., Bouck, E. C., Taber-Doughty, T., Bofferding, L., & Roberts, C. A. (2016). Comparing the effectiveness of virtual and concrete manipulatives to teach algebra to secondary students with learning disabilities. Learning Disability Quarterly, 39(4), 240-253.

Star, J. R., Caronongan, P., Foegen, A., Furgeson, J., Keating, B., Larson, M. R.. Lyskawa, J., McCallum, W. G., Porath, J., & Zbiek, R. M. (2015). Teaching strategies for improving algebra knowledge in middle and high school students. US Department of Education.

Σχέδιο μαθήματος δειγματικής διδασκαλίας στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με την βοήθεια διαδραστικού πίνακα και μαθηματικού λογισμικού.

Μελισσουργός Ιωάννης
Μαθηματικός, ΓΕ.Λ. Νάξου
jo_melis@hotmail.com
Καραγιάννης Ιωάννης
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Κυκλάδων & Α΄ Αθήνας
iokaragi@sch.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα αναπτύξουμε ένα ενδεικτικό σχέδιο μαθήματος στην ενότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και συγκεκριμένα στην περιοδικότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων όπως περιέχεται στο διδακτικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.
Στην υλοποίηση της συνδιδασκαλίας του μαθήματος θα χρησιμοποιήσουμε τον διατιθέμενο διαδραστικό πίνακα της αίθουσας διδασκαλίας καθώς και μαθηματικό λογισμικό Geogebra.
Η διδασκαλία του μαθήματος υλοποιήθηκε σε τμήμα της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου Νάξου το σχολικό έτος 2024-2025.

Abstact

In this work, we will develop a sample lesson plan on the topic of trigonometric functions, specifically focusing on the periodicity of trigonometric functions as presented in the 2nd grade of General High School Algebra textbook.
For the implementation of the co-teaching lesson, we will use the interactive whiteboard which is available in the classroom, as well as the mathematical software Geogebra.
The lesson was conducted in a 2nd-grade class at the General High School of Naxos during the 2024-2025 school year.

Α. ΜΕΡΟΣ

Δραστηριότητες ΠΡΙΝ από τη διδασκαλία

1. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Πρόκειται να προσεγγίσουμε διδακτικά την ενότητα 3.4 «Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις» από το σχολικό εγχειρίδιο «Άλγεβρα» της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου, ως μάθημα Γενικής Παιδείας. Στην διάρκεια της μίας (1) διδακτικής ώρας θα ασχοληθούμε με την έννοια της περιοδικότητας μίας συνάρτησης και θα επιχειρήσουμε μια εισαγωγή στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μελετώντας αρχικά την συνάρτηση ημx, ως εφαρμογή των περιοδικών συναρτήσεων.

Η έννοια της περιοδικότητας συνδέεται άμεσα με φαινόμενα της καθημερινής ζωής και είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες που θα διδαχτούν οι μαθητές/-ήτριες στη Β΄ Λυκείου. Θα πρέπει λοιπόν να δοθεί έμφαση σε αυτή την ιδιότητα μέσα από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις σε συνδυασμό με προβλήματα που οδηγούν σε περιοδικές συναρτήσεις (Οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της ύλης του Ι.Ε.Π.)

Στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο (3.3) έγινε η εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών. Επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο στηρίζονται όλες οι έννοιες και οι ιδιότητες που μελετώνται στη συνέχεια, είναι αναγκαίο να έχει κατανοηθεί η «λειτουργία» του που θα επιτρέψει τη συνεχή χρήση του αντί για την απομνημόνευση τύπων (πχ. για την αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο).

2. ΕΠΙΠΕΔΟ ΜΑΘΗΣΗΣ-ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τα επόμενα, ώστε να διδαχθούν τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια.

- Την «λειτουργία» του τριγωνομετρικού κύκλου.
- Για κάθε γωνία ω υπάρχει μία μόνο τιμή του ημω, με $-1 \leq ημω \leq 1$, όπως και μία μόνο τιμή του συνω, με $-1 \leq συνω \leq 1$.
- Πολλές εφαρμογές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν περιέχουν γωνίες, αλλά πραγματικούς αριθμούς, όπως, π.χ., ο τύπος της αρμονικής ταλάντωσης $f(t) = α \cdot ημωt$, στον οποίο τα α και ω είναι σταθερές και t είναι ένας πραγματικός αριθμός που παριστάνει το χρόνο.
- Πρέπει να επισημανθεί ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εκφράζει τόξο μετρημένο σε ακτίνια και όχι σε μοίρες. Στον τριγωνομετρικό κύκλο το μέτρο του τόξου σε ακτίνια ταυτίζεται αριθμητικά με το μήκος του και ότι έτσι, «τυλίγουμε» την ευθεία των πραγματικών αριθμών στον τριγωνομετρικό κύκλο, με αποτέλεσμα κάθε πραγματικός αριθμός να αντιστοιχεί σε ένα σημείο του κύκλου και κάθε σημείο του κύκλου να αντιστοιχεί σε άπειρους πραγματικούς αριθμούς
- Την αντιστοιχία μεταξύ μοιρών και ακτινίου (rad).

Η εμπειρία μας έχει δείξει ότι οι μαθητές/μαθήτριες αντιμετωπίζουν προβλήματα που σχετίζονται με την κατανόηση της γραφικής παράστασης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων καθώς και με ην ερμηνεία της και την αναγνώριση των χαρακτηριστικών μιας περιοδικής συνάρτησης.

3. ΥΛΙΚΟ-ΜΕΣΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

- Χρήση Δομημένου Φύλλου Εργασίας-Δραστηριοτήτων Μαθητών
- Χρήση Διαδραστικού πίνακα που υπάρχει στη σχολική τάξη.
- Σχολικό Βιβλίο.
- Υλικό από την Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας (Τ.Θ.Δ.Δ.-Ι.Ε.Π.).
- Τετραγωνισμένο χαρτί (μιλιμετρέ).

4. ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΑΞΗΣ

Πρόκειται να διαμοιραστεί δομημένο φύλλο εργασίας-δραστηριοτήτων μαθητών/μαθητριών σε ομάδες των δύο (2) μαθητών/μαθητριών, όπως είναι η διάταξη τους, ανά θρανίο, στην σχολική τάξη. Θα ακολουθήσει η επεξεργασία του Φύλλου Εργασίας-Δραστηριοτήτων από τις ομάδες μαθητών/μαθητριών και η παρουσίαση των βασικών αποτελεσμάτων από την κάθε ομάδα μαθητών/μαθητριών.

Β. ΜΕΡΟΣ

Δραστηριότητες ΚΑΤΑ τη διδασκαλία

5. ΣΥΝΔΕΣΗ

Προετοιμασία σεναρίων με τις σχετικές προηγούμενες ενότητες και σύνδεσή τους με την έννοια που πρέπει να διδαχθεί από εμάς. Περιλαμβάνει τα στάδια:

5.1.ΕΛΕΓΧΟΣ

Για την ανάδειξη προσωπικών αντιλήψεων, προϋπάρχουσας γνώσης και προαπαιτούμενης γνώσης σχετικά με ρεαλιστικά προβλήματα που ανάγονται σε έννοιες της περιοδικότητας μιας συνάρτησης (με εφαρμογή στη συνάρτηση ημίτονο).

Ερωτήσεις-συζήτηση από την αμέσως προηγούμενη παράγραφο «Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο» και «επέκταση» στην περιοδικότητα των φαινομένων.

5.2 ΑΦΟΡΜΗΣΗ

Με στόχο την προδιάθεση των μαθητών για μάθηση, την ενεργοποίηση παρώθησης, την προσέλκυση προσοχής, την πρόκληση του ενδιαφέροντος για να εμπλακούν στη διαδικασία εκμάθησης ακολουθεί διαλογική προσέγγιση των σχετικών εννοιών.
Ερωτήσεις-συζήτηση από πραγματικά φαινόμενα που εμφανίζουν «περιοδικότητα» με γραφική αποτύπωση στον διαδραστικό πίνακα.

6.ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟΧΩΝ-ΠΡΟΣΔΩΚΟΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Μετά το πέρας της διδακτικής προσέγγισης, προσδοκούμε οι μαθητές/μαθήτριες να είναι σε θέση:

6.1. Να αναγνωρίζουν την γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης.
6.2. Να ερμηνεύουν την γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης (με εφαρμογή στην συνάρτηση ημίτονο) και να μελετούν τα κύρια χαρακτηριστικά της (περιοδικότητα, περίοδος).
6.3. Να «μοντελοποιούν» ένα «πραγματικό» πρόβλημα και να το ανάγουν στην μελέτη μιας περιοδικής συνάρτησης (με εφαρμογή στη συνάρτηση ημίτονο).
6.4. Να σχεδιάζουν την γραφική παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης (με εφαρμογή στη συνάρτηση ημίτονο).

7. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ

Παρουσιάζονται τα βασικά σημεία της νέας ενότητας με παραδείγματα και οι μαθητές/μαθήτριες οδηγούνται σταδιακά στις νέες γνώσεις και στη βαθύτερη κατανόησή τους. Περιλαμβάνει τα στάδια:

7.1 ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ

Η διδακτική προσέγγιση θα ξεκινήσει με τη βοήθεια του λογισμικού geogebra και πιο συγκεκριμένα θα ανοίξουμε το αρχείο ΒΑΡΚΑ.ggb με προβολή στο διαδραστικό πίνακα της τάξης.

Θα ακολουθήσουν ερωτήσεις-διάλογος που αφορά στην συμπεριφορά των περιοδικών συναρτήσεων σε προβλήματα ρεαλιστικών καταστάσεων, όπως περιέχονται στο Φύλλο Δραστηριοτήτων Μαθητή/Μαθήτριας.

Στη συνέχεια προσδοκούμε οι μαθητές θα «ανακαλύψουν» τον ορισμό της περιοδικής συνάρτησης.

7.2. ΕΜΠΕΔΩΣΗ

Εντάσσουμε δραστηριότητες που στόχο έχουν οι μαθητές να εμπεδώσουν τη νέα γνώση. Στη συνέχεια, σαν δεύτερο παράδειγμα πρακτικής εφαρμογής, θα ανοίξουμε το αρχείο Geogebra ΠΑΛΙΡΡΟΙΑ.ggb, με προβολή στο διαδραστικό πίνακα της τάξης, η κίνηση της οποίας είναι «ημιτονοειδής».

Θα ακολουθήσουν ερωτήσεις-διάλογος που αφορούν την συμπεριφορά των περιοδικών συναρτήσεων.

7.3. ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Εντάσσουμε δραστηριότητες που στόχο έχουν οι μαθητές να γενικεύσουν τη νέα γνώση μέσα από παραδείγματα της καθημερινής ζωής.

Για τη συνέχεια θα ανοίξουμε το αρχείο Geogebra ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.ggb , με προβολή στο διαδραστικό πίνακα της τάξης, σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο στην υποενότητα: «Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών**».** Με τον τρόπο αυτό στοχεύουμε οι μαθητές/μαθήτριες να κατανοήσουν σε βάθος την περίοδο κάθε τριγωνομετρικής συνάρτησης και να συνδέσουν τις τιμές από τον τριγωνομετρικό κύκλο με τη γραφική παράσταση.

Τέλος με το μικροπείραμα του σχολικού βιβλίου ανοίγοντας το αρχείο Geogebra ΜΕΛΕΤΗ ΗΜΙΤΟΝΟ.ggb θα κάνουμε μια εισαγωγή στη μελέτη της συνάρτησης f(x) = ημx.

Συμπληρωματικά, ως επιπλέον υλικό, θα δώσουμε το f(x)=ημωx.ggb προκειμένου σε επόμενη διδακτική ώρα να επεκταθούν οι έννοιες της περιοδικότητας στην γενική μορφή της ημιτονοειδούς συνάρτησης.

7.4.ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Εντάσσουμε δραστηριότητες με στόχο ελέγξουμε αν οι μαθητές κατέκτησαν τη νέα γνώση.

Ερωτήσεις κλειστού τύπου από την Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας (Τ.Θ.Δ.Δ.) του Ι.Ε.Π..

8. ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΓΝΩΣΗΣ

Οι νέες γνώσεις καταγράφονται, συστηματοποιούνται και οργανώνονται από τον διδάσκοντα στον πίνακα αλλά και σε πίνακα ανακοινώσεων της σχολικής τάξης, για να υπάρχουν μέσα στην τάξη, ως σημείο αναφοράς, έτσι ώστε οι μαθητές/μαθήτριες να τις συγκρατήσουν για μελλοντική χρήση.

9. ΦΥΛΛΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΜΑΘΗΤΗ

Δομημένο Φύλλο Εργασίας-Δραστηριοτήτων μαθητών/μαθητριών (επισυναπτόμενο φύλλο) με τρεις (3) δραστηριότητες-προβλήματα διαβαθμισμένης δυσκολίας που διαμοιράζεται σε ομάδες μαθητών/μαθητριών των δύο (2) ατόμων.

10. ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΥΛΗ - ΣΕΝΑΡΙΑ ΑΠΡΟΒΛΕΠΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ετοιμάζουμε διδακτικό υλικό για δύο περιπτώσεις απρόβλεπτων καταστάσεων. Απρόβλεπτες καταστάσεις μπορεί να είναι, για παράδειγμα:

- Να μη φτάσει ο χρόνος για να τελειώσουμε όσα έχουμε σχεδιάσει.
  Ανάθεση κατ΄ οίκον εργασίας.
- Να τελειώσουμε νωρίτερα τη διδασκαλίας μας από τον καθορισμένο χρόνο.
  Άσκηση από την Τ.Θ.Δ.Δ. του Ι.Ε.Π. με προβολή της στον διαδραστικό πίνακα.

11. ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

5 λεπτά της ώρας: Σύνδεση με την προηγούμενη θεματική ενότητα.
5 λεπτά της ώρας: Αφόρμηση-Συζήτηση.
5 λεπτά της ώρα: Επέκταση.
20 λεπτά της ώρας: Επεξεργασία Φύλλου Εργασίας-Παρουσίαση αποτελεσμάτων.
10 λεπτά της ώρας: Αξιολόγηση νέας γνώσης.

12. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Σχολικό εγχειρίδιο.
- Φωτόδεντρο.
- Οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της ύλης (Ι.Ε.Π., 2024).
- Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας του Ι.Ε.Π. (Τ.Θ.Δ.Δ.)

Γ. ΜΕΡΟΣ

Δραστηριότητες ΜΕΤΑ τη διδασκαλία

- Θα ακολουθήσει συζήτηση-αναστοχασμός από τους διδάσκοντες που υλοποίησαν και παρακολούθησαν την δειγματική διδασκαλία.
- Θα καταγραφούν σε πίνακα οι καλές διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και προτάσεις για ενδεχόμενες επιπλέον καλές διδακτικές πρακτικές.
- Θα καταγραφούν επίσης σε πίνακα τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν κατά την διάρκεια της διδασκαλίας και θα προταθούν προσεγγίσεις για την αντιμετώπισή τους.

Δραστηριότητα 1

Με τη βοήθεια του geogebra, και την προβολή του στον διαδραστικό πίνακα ανοίγουμε το αρχείο του λογισμικού Geo-gebra: ΒΑΡΚΑ.ggb.
Να συζητήσετε και να απαντήσετε συνοπτικά στις επόμενες ερωτήσεις:
1. Πόσο χρόνο μένει η βάρκα σε κάθε πλευρά;
2. Κάθε πόση ώρα επαναλαμβάνει την ίδια ακριβώς κίνηση;
3. Στο σημείο Φ υπάρχει ένας φάρος. Κάθε πόση ώρα η βάρκα διέρχεται πλησίον του φάρου; Κάθε πόση ώρα διέρχεται πλησίον του φάρου πηγαίνοντας στη μία κατεύθυνση;
4. Μετακινώντας τον δρομέα μ και πατώντας το κουμπί Επανεκκίνηση, ποια η καινούργια περίοδος των δρομολογίων;

Δραστηριότητα 2 (παράδειγμα πρακτικής εφαρμογής)

Με τη βοήθεια του λογισμικού geogebra, και την προβολή του στον διαδραστικό πίνακα ανοίγουμε το αρχείο του λογισμικού Geo-gebra: ΠΑΛΙΡΡΟΙΑ.ggb της οποίας η κίνηση είναι «ημιτονοειδής».
Να συζητήσετε και να απαντήσετε συνοπτικά στις επόμενες ερωτήσεις:

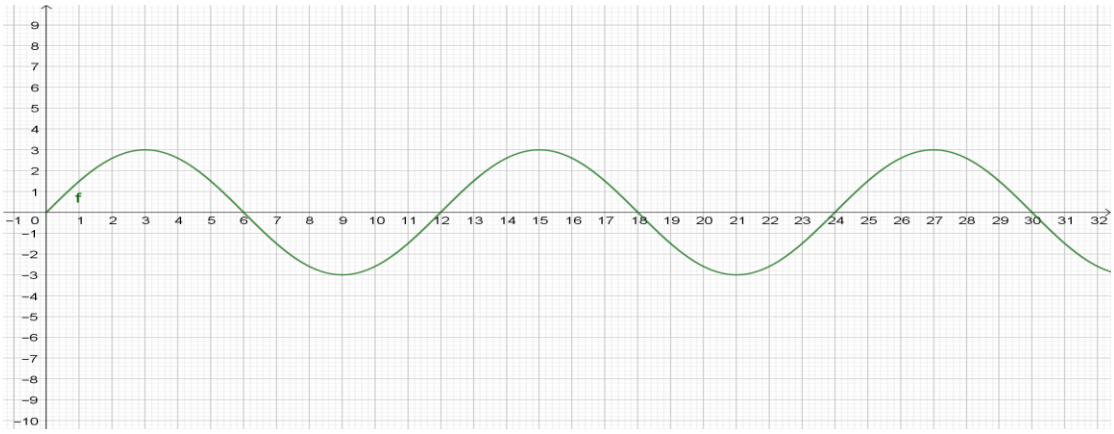
1. Αν στις 12:00 τα μεσάνυχτα τα νερά βρίσκονται στο σημείο μηδέν
2. Ποια ώρα της ημέρας τα νερά βρίσκονται ξανά στο σημείο μηδέν;
3. Ποια ώρα της ημέρας έχουν το μέγιστο ύψος και ποια το μέγιστο βάθος; Ποια η περίοδος του φαινομένου;

Δραστηριότητα 3

Με τη βοήθεια του geogebra, και την προβολή του στον διαδραστικό πίνακα ανοίγουμε το αρχείο του λογισμικού Geo-gebra: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.ggb.
1. Ποια είναι η περίοδος των τριγωνομετρικών συναρτήσεων;
2. Προσπαθήστε να συνδέσετε τις τιμές του τριγωνομετρικού κύκλου με την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :
α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).
β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.
γ) τον τύπο της συνάρτησης f.
δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.



ΕΠΕΚΤΑΣΗ (επόμενη διδακτική ώρα)

Με τη βοήθεια του geogebra, και την προβολή του στον διαδραστικό πίνακα ανοίγουμε το αρχείο του λογισμικού Geo-gebra:ΜΕΛΕΤΗ ΗΜΙΤΟΝΟ.ggb θα κάνουμε μια εισαγωγή στη μελέτη της συνάρτησης f(x) = ημx.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Υπάρχουν στο τέλος κάθε υποενότητας της εργασίας

Σχέδια μαθήματος στα Μαθηματικά για τάξεις των Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. Εφαρμογή σε τάξεις του Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. Νάξου.

Βούλγαρη Φωτεινή
Μαθηματικός, Μ.Δ.Ε. Ειδικής Αγωγής, Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. Νάξου
voulgari.f@hotmail.com

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε δύο (2) σχέδια μαθήματος μιας διδακτικής ώρας το κάθε ένα τα οποία απευθύνονται σε τάξεις του Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. και έχουν σχεδιαστεί ειδικά για τις ανάγκες των μαθητών που φοιτούν στην Β΄ και στην Ε΄ τάξη αντίστοιχα. Παρουσιάζονται τα κυριότερα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας και γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στο προφίλ των μαθητών/μαθητριών. Με βάση αυτό τα μαθηματικά συνδυάζονται διαθεματικά με άλλες γνωστικές περιοχές που η χρήση τους είναι απαραίτητη.

Abstact

In this work, we will present two (2) one-hour lesson plans designed for E.E.E.E.K. classes, specifically tailored to meet the needs of students in the 2nd and 5th grades, respectively. The main characteristics of the teaching approach are highlighted, with a special emphasis on the students' profiles. Based on this, mathematics is integrated cross-disciplinarily with other subject areas where its application is essential.

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 1

Ταυτότητα Σχεδίου
Διδάσκουσα: Βούλγαρη Φωτεινή
Θεματική ενότητα: Σχήματα
Τίτλος διδακτικής ενότητας: Γνωριμία με τα βασικά γεωμετρικά σχήματα
Γνωστικό αντικείμενο: Μαθηματικά
Σχολική μονάδα: Ε.Ε.Ε.Ε.Κ Νάξου
Τάξη: Β΄
Ημερομηνία: 13/11/2024
Διάρκεια διδακτικού σεναρίου: 1 διδακτική ώρα
Μαθησιακό προφίλ μαθητών
Ο Γ.Δ. είναι ένας μαθητής με Βαριά Νοητική Υστέρηση, όπου έχει κατακτήσει τον προφορικό λόγο (με κάποιες δυσκολίες στην άρθρωση), όμως δυσκολεύεται στον γραπτό λόγο και δεν κατέχει τον μηχανισμό της ανάγνωσης.
Ο Π.Β. είναι ένας μαθητής με Νοητική Υστέρηση με ποσοστό αναπηρίας 67%.Ο προφορικός του λόγος θεωρείται αρκετά ικανοποιητικός. Όσον αφορά τον γραπτό του λόγο μπορεί να γράψει σωστά το όνομά του και να αντιγράψει μικρές λέξεις, όμως φαίνεται να μην έχει κατακτήσει τον βασικό μηχανισμό της ανάγνωσης. Είναι πάντα πρόθυμος να συμμετέχει σε όποια δραστηριότητα του προταθεί, όμως συναντά μεγάλη δυσκολία στη διαδικασία λήψεις αποφάσεων.
Εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές:
Γλώσσα, ΤΠΕ, Εικαστικά
Σκεπτικό – Κεντρικός Άξονας :
Το σχέδιο που ακολουθεί έχει ως αντικείμενο διδασκαλίας τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: κύκλος, τρίγωνο και τετράγωνο. Οι στόχοι έχουν τεθεί με βάση τους γενικούς και ειδικούς σκοπούς και στόχους που ορίζονται από το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) για τα Ε.Ε.Ε.ΕΚ. καθώς και το ειδικά διαμορφωμένο Αναλυτικό Προγράμματα Σπουδών για μαθητές με βαριά νοητική υστέρηση. Επιδιώκεται οι μαθητές, μέσα από βιωματικές, ομαδοσυνεργατικές, παιγνιώδεις

δραστηριότητες και με την επαφή τους με αντικείμενα της καθημερινότητας καθώς και με κάποια έργα γνωστών ζωγράφων με θέμα τα σχήματα, να αντιληφθούν τη σημαντικότητα των σχημάτων τόσο στα μαθηματικά όσο και στο περιβάλλον τους. Είναι γεγονός ότι η βιωματική μέθοδος αυξάνει το επίπεδο μάθησης και η ομαδοσυνεργατική μέθοδος εξασφαλίζει την ενεργή συμμετοχή, την αλληλεπίδραση και την συνεργασία των μαθητών.
Τα Μαθηματικά και ειδικά η Γεωμετρία αποτελεί ένα μάθημα δύσκολο στην κατανόησή του από τους μαθητές. Αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στον γραπτό λόγο ,καθώς και ότι δεν κατέχουν τον μηχανισμό της ανάγνωσης προτείνεται, στο συγκεκριμένο σενάριο, η χρήση των ΤΠΕ, η οποία ενθαρρύνει την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, όπως τα γεωμετρικά σχήματα, μέσα από ευχάριστες δραστηριότητες που προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών.

Γενικός σκοπός:

Η διάκριση και ονομασία των βασικών γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και η αναγνώρισή τους σε αντικείμενα της πραγματικής ζωής και σε εικόνες

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα-Στόχοι:

Επιδιώκεται οι μαθητές:

1.Σε γνωστικό επίπεδο:

-να διακρίνουν και να ονομάζουν τα γεωμετρικά σχήματα κύκλος, τρίγωνο, τετράγωνο
-να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα σε αντικείμενα της πραγματικής ζωής και σε εικόνες

2.Σε επίπεδο δεξιοτήτων:

-να ελέγχουν την προσοχή τους και να παραμείνουν συγκεντρωμένοι σε αυτό που καλούνται να κάνουν
-να αναπτύξουν την λεπτή κινητικότητα
-να χρησιμοποιούν το ποντίκι και να συντονίσουν την κίνηση του χεριού τους με το ποντίκι και τα μάτια τους στην οθόνη του υπολογιστή
-να αναπτύξουν τη δημιουργική τους σκέψη και την παρατηρητικότητα
-να χρησιμοποιούν το μαθηματικό λεξιλόγιο

3.Σε επίπεδο στάσεων:

-να υιοθετήσουν θετική στάση απέναντι στον Η/Υ ως εργαλείο
-να υιοθετήσουν θετική άποψη για την γεωμετρία
-να έρθουν σε επαφή με τις τέχνες
-να συνεργάζονται, να συζητούν, να συμμετέχουν σε ομαδικά παιχνίδια και εργασίες

Οργάνωση της τάξης και απαιτούμενη υλικοτεχνική υποδομή:

Το σχέδιο μαθήματος θα εφαρμοστεί στην σχολική τάξη και τα μέσα και υλικά που θα χρησιμοποιηθούν είναι:
-«αυτοσχέδιο» ημερολόγιο
-εικόνες από πίνακες ζωγραφικής
-πλαστικοποιημένες κάρτες με τα σχήματα και τα ονόματά τους
-μαρκαδόροι, ψαλίδι, κόλα
-Η/Υ
-on line πλατφόρμα εκπαιδευτικών παιχνιδιών-wordwall
-αντικείμενα της καθημερινής ζωής
-φύλλο εργασίας

Διδακτικές Μέθοδοι-Τεχνικές:

Γίνεται χρήση ενός συνδυασμού της δασκαλοκεντρικής μεθόδου στη φάση της παροχής της νέας γνώσης και της μαθητοκεντρικής μεθόδου στη φάση των ασκήσεων εμπέδωσης και αξιολόγησης. Πιο συγκεκριμένα στη φάση της ανακοίνωσης των διδακτικών στόχων και της διδασκαλίας του γνωστικού αντικειμένου θα εφαρμοστεί η μέθοδος της άμεσης διδασκαλίας. Ενώ στη φάση των δραστηριοτήτων εμπέδωσης θα εφαρμοστεί η βιωματική και ομαδοσυνεργατική μέθοδος. Οι τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν είναι ο κατευθυνόμενος διάλογος, οι ερωταποκρίσεις, η συζήτηση, η εισήγηση/εμπλουτισμένη εισήγηση, το παιχνίδι, η επίδειξη βίντεο και οι ομάδες εργασίας. Βασική επιδίωξη είναι η διαφοροποίηση της διδασκαλίας και μια πολυαισθητηριακή προσέγγιση με οπτικά, απτικά, ακουστικά μέσα και υλικά, χρησιμοποιώντας ΤΠΕ

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές παρόλο που έχουν έρθει ξανά σε επαφή με τις έννοιες του κύκλου, τριγώνου και τετραγώνου, χρειάζονται συνεχή επανάληψη για την εμπέδωσή τους. Επίσης χρειάζεται να έχουν αναπτύξει τις βασικές δεξιότητες χρήσης του Η/Υ (πχ. χρήση του ποντικιού) και να έχουν εξοικειωθεί με τις βασικές λειτουργίες της χρησιμοποιούμενης πλατφόρμας εκπαιδευτικών παιχνιδιών(wordwall).

Περιγραφή Σχεδίου:

Εισαγωγή (χρόνος:2΄)

(**Στόχος:** προετοιμασία μαθητών για έναρξη μαθήματος)

Η εκπαιδευτικός μέσα από ερωτήσεις «ρουτίνας» όπως: τι ημέρα, μήνα, έτος και καιρό έχουμε, βοηθάει τους μαθητές να συγκεντρωθούν και να αντιληφθούν ότι ξεκινά το μάθημα.

1η φάση: Αφόρμηση (χρόνος:2΄)

(**Στόχος:** Κινητοποίηση ενδιαφέροντος-Ανάκληση προγενέστερων γνώσεων)

Δίνεται στους μαθητές μια εικόνα από πίνακα του ζωγράφου Μπρους Γκρέι, με τίτλο «Κύκλοι», για να ενεργοποιηθεί το ενδιαφέρον τους. Με την τεχνική του κατευθυνόμενου διαλόγου, η εκπαιδευτικός υποβάλλει ερωτήσεις, στοχεύοντας στην ανάκληση προγενέστερων γνώσεων.

2η φάση: Ανακοίνωση διδακτικών στόχων (χρόνος:1΄)

Η εκπαιδευτικός με εισήγηση ανακοινώνει τους στόχους και την πορεία του μαθήματος.

3η φάση: Διδασκαλία γνωστικού αντικειμένου(χρόνος:6΄)

(**Στόχος:** Παρουσίαση της νέας γνώσης)

Προβολή εκπαιδευτικού βίντεο (https://www.youtube.com/watch?v=MVrLOnbG55U) για την κινητοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών. Στη συνέχεια η εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές πλαστικοποιημένες κάρτες όπου απεικονίζονται ο κύκλος, το τρίγωνο και το τετράγωνο και με την τεχνική της εμπλουτισμένης εισήγησης παρουσιάζει τα γεωμετρικά σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους. Ακολουθεί συζήτηση και ερωτήσεις.

4η φάση: Δραστηριότητες εμπέδωσης

Για την υλοποίηση των παρακάτω δραστηριοτήτων η εκπαιδευτικός θα δρα ως συντονιστής, εμψυχωτής, καθοδηγητής, θα βοηθάει όταν οι μαθητές συναντούν δυσκολίες και θα παρέχει τα κατάλληλα ερεθίσματα ώστε το ενδιαφέρον τους να παραμένει αμείωτο. Επίσης στο τέλος της κάθε δραστηριότητας γίνεται παρουσίαση των απαντήσεων και με συζήτηση η εκπαιδευτικός δίνει ανατροφοδότηση.

1η δραστηριότητα - Παιχνίδι (χρόνος 3΄)

(Στόχος: διάκριση των γεωμετρικών σχημάτων κύκλος, τρίγωνο, τετράγωνο)

Η εκπαιδευτικός μαζί με τα παιδιά παίζουν μια παραλλαγή του παιχνιδιού «χαλασμένο τηλέφωνο», στοχεύοντας στην διάκριση των γεωμετρικών σχημάτων.

2η δραστηριότητα – Φύλλο εργασίας 1 (χρόνος 5΄)

(Στόχος: ονομασία και διάκριση των γεωμετρικών σχημάτων κύκλος, τρίγωνο, τετράγωνο)

Δίνεται στον κάθε μαθητή, ατομικά, φύλλο εργασίας όπου ζητείται σε κάθε σειρά να ονομάσει και να χρωματίσει μόνο τα σχήματα που είναι ίδια με το αρχικό.

3η δραστηριότητα – Φύλλο εργασίας 2 (χρόνος 8΄)

(Στόχος: ονομασία και αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων κύκλος, τρίγωνο, τετράγωνο σε αντικείμενα της καθημερινής ζωής)

Δίνεται στους μαθητές φύλλο εργασίας στο οποίο καλούνται να δουλέψουν ομαδικά. Πρέπει να κόψουν και να κολλήσουν τις εικόνες στην σωστή στήλη κάτω από το αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα.

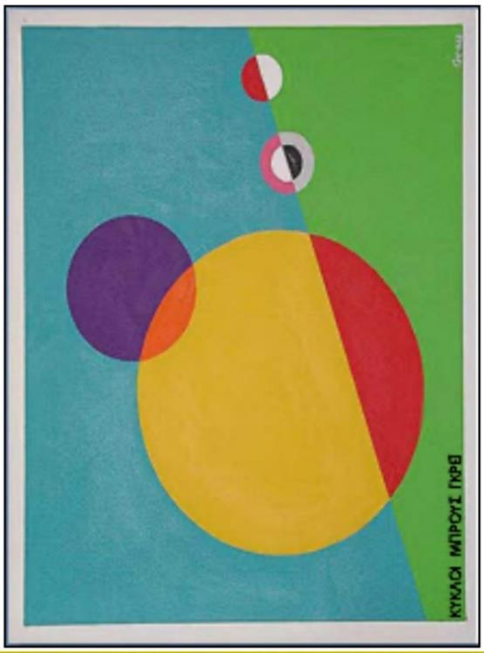
4η δραστηριότητα - Παιχνίδι (χρόνος 3΄)
(Στόχος: ονομασία και αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων κύκλος, τρίγωνο, τετράγωνο σε αντικείμενα της καθημερινής ζωής)
Η εκπαιδευτικός μαζί με τους μαθητές παίζουν το παιχνίδι «μαντεύω». Ο κάθε μαθητής διαλέγει τυχαία μια από τις κάρτες με τα γεωμετρικά σχήματα και καλείται να βρει ένα αντικείμενο μέσα στην τάξη που μοιάζει με αυτό.
5η δραστηριότητα – Φύλλο εργασίας 3 (χρόνος 5΄)
(Στόχος: ονομασία και αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων κύκλος, τρίγωνο, τετράγωνο σε εικόνες)
Δίνεται στον κάθε μαθητή, ατομικά, ένα φύλλο εργασίας, στο οποίο περιέχονται εικόνες από πίνακες ζωγραφικής και ο μαθητής καλείται να χρωματίσει μόνο τα σχήματα που περιέχει ο κάθε πίνακας.
5η φάση: Τελική Αξιολόγηση (χρόνος: 5΄)
(Στόχος: αξιολόγηση του βαθμού κατάκτησης των γνωστικών στόχων)
Η εκπαιδευτικός μπαίνει στην πλατφόρμα wordwall και καλεί τον κάθε μαθητή να απαντήσει σε ένα quiz που έχει δημιουργήσει η ίδια. Με συζήτηση, η εκπαιδευτικός δίνει ανατροφοδότηση.
https://wordwall.net/el/resource/80259268/σχηματα
6η φάση: Ανακεφαλαίωση-Αναστοχασμός-Εργασία για το σπίτι(χρόνος: 5΄)
Η εκπαιδευτικός με εισήγηση υπενθυμίζει τα βασικά σημεία του μαθήματος και παρέχει οδηγίες για την εργασία που αναθέτει στο σπίτι. Στη συνέχεια γίνεται αναστοχασμός-συζήτηση όσον αφορά τα σημεία του μαθήματος που άρεσαν ή/και δυσκόλεψαν τους μαθητές.
Αξιολόγηση:
Η αξιολόγηση περιλαμβάνει:
Α)Αρχική αξιολόγηση: στην αρχή του μαθήματος και μέσα από ερωτήσεις, γίνεται αξιολόγηση του γνωστικού επιπέδου των μαθητών για την ύλη που θα διδαχθούν.
Β)Διαμορφωτική αξιολόγηση: πραγματοποιείται σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας μέσω ερωτήσεων και παρατήρησης της συμμετοχής και του ενδιαφέροντος των μαθητών
Γ)Τελική αξιολόγηση: στο τέλος της διδασκαλίας αξιολογείται το τι έχουν κατανοήσει οι μαθητές μέσα από ένα quiz που καλούνται να απαντήσουν ατομικά στον υπολογιστή.

Βιβλιογραφία:

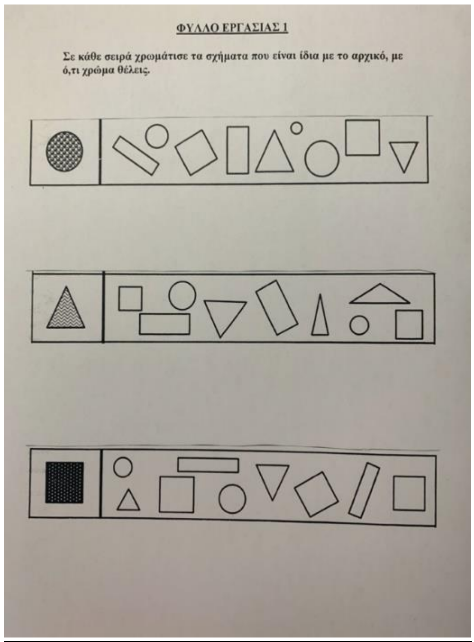
- Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Εργαστηρίων Ειδικής Επαγγελματικής Εκπαίδευσης και Κατάρτισης (Ε.Ε.Ε.Ε.Κ.), Απρίλιος 2004
- Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Ειδικής Αγωγής, Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για Μαθητές με Βαριά Νοητική Καθυστέρηση, 2004
- Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων, Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Επιμορφωτικό υλικό για τη ΘΕ4.2: «Σύγχρονες μέθοδοι διδασκαλίας στην επαγγελματική εκπαίδευση και κατάρτιση», Κωνσταντίνος Καλοβρέκτης
- Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής, «Διαφοροποιημένη Διδασκαλία», Μαρίνα Λουάρη https://eclass.aspete.gr/modules/document/file.php/EPPAIK-PESYP159/ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ%20ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ.pdf
- https://www.slideshare.net/slideshow/ss-76552537/76552537

Παράρτημα:

1η φάση: Αφόρμηση-Καταγραφή αρχικών ιδεών

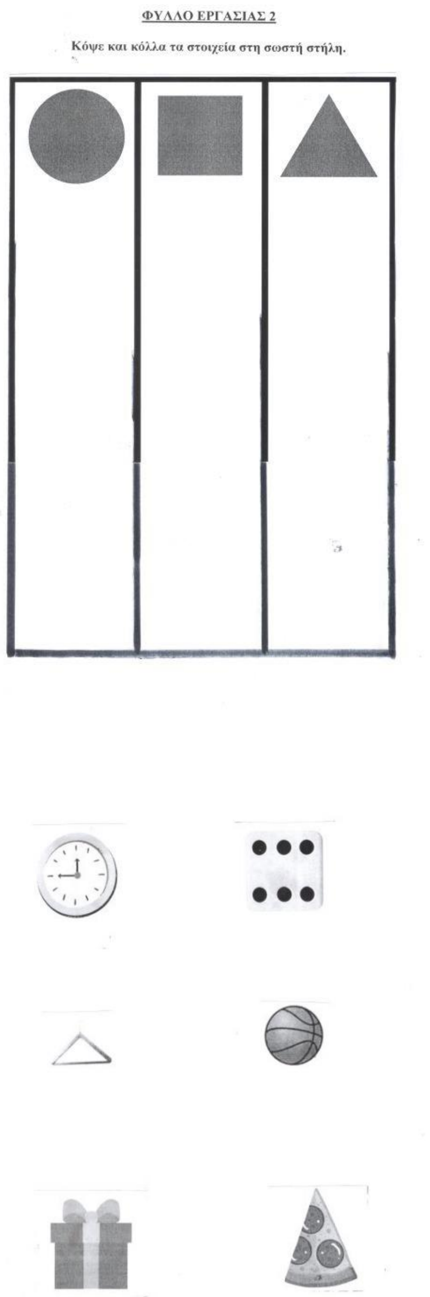


2η δραστηριότητα – Φύλλο εργασίας 1

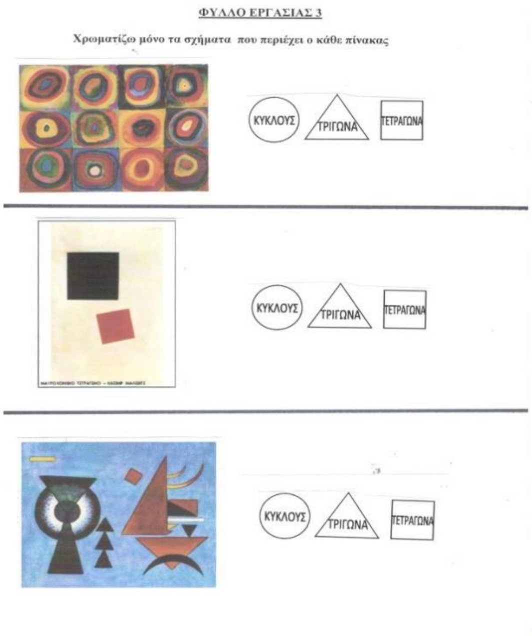

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Σε κάθε σειρά χρωμάτισε τα σχήματα που είναι ίδια με το αρχικό, με ό,τι χρώμα θέλεις.

3η δραστηριότητα – Φύλλο εργασίας 2



4η δραστηριότητα – Φύλλο εργασίας 3



ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 2

Ταυτότητα Σχεδίου:
Διδάσκουσα: Βούλγαρη Φωτεινή
Θεματική ενότητα: Χρήματα
Τίτλος διδακτικής ενότητας: Γνωριμία με τα ευρώ
Γνωστικό αντικείμενο: Μαθηματικά
Σχολική μονάδα: Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. Νάξου
Τάξη: Ε΄
Ημερομηνία:
Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα

Μαθησιακό προφίλ μαθητή:
Ο Π. είναι ένας μαθητής με Νοητική Υστέρηση με ποσοστό αναπηρίας 67%.Ο προφορικός του λόγος θεωρείται αρκετά ικανοποιητικός. Όσον αφορά τον γραπτό του λόγο μπορεί να γράψει σωστά το όνομά του και να αντιγράψει μικρές λέξεις, όμως φαίνεται να μην έχει κατακτήσει τον βασικό μηχανισμό της ανάγνωσης. Είναι πάντα πρόθυμος να συμμετέχει σε όποια δραστηριότητα του προταθεί, όμως συναντά μεγάλη δυσκολία στη διαδικασία λήψεις αποφάσεων.

Εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές:
Αυτόνομη Διαβίωση, ΤΠΕ, Γλώσσα

Σκεπτικό – Κεντρικός Άξονας :
Το σχέδιο μαθήματος που ακολουθεί έχει ως αντικείμενο διδασκαλίας τα νομίσματα, τα χαρτονομίσματα του Ευρώ καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις, μιας και η αξία και η χρησιμότητά τους είναι ιδιαίτερα σημαντική στην καθημερινότητά μας. Η πραγματοποίηση χρηματικών συναλλαγών αποτελεί μια σημαντική δεξιότητα που χρειάζεται να περιλαμβάνεται στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα των μαθητών με νοητική αναπηρία, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να συμμετέχουν αυτόνομα σε διάφορες κοινωνικές δραστηριότητες Οι στόχοι του σχεδίου έχουν τεθεί με βάση τους γενικούς και ειδικούς σκοπούς και στόχους που ορίζονται από το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) για τα Ε.Ε.Ε.ΕΚ. καθώς και το ειδικά διαμορφωμένο Αναλυτικό Προγράμματα Σπουδών για μαθητές με μέτρια ή ελαφριά νοητική υστέρηση. Επιδιώκεται ο μαθητής, με το παρόν σχέδιο, μέσα από βιωματικές, παιγνιώδεις

δραστηριότητες, να εξοικειωθεί με τα κέρματα των 1ευρώ, 2ευρώ και τα χαρτονομίσματα των 5ευρώ, 10ευρώ και 20ευρώ. Επίσης στο συγκεκριμένο σχέδιο παράλληλα με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας και εποπτικού υλικού θα γίνει και χρήση των ΤΠΕ, η οποία ενθαρρύνει την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, μέσα από ευχάριστες δραστηριότητες, κυρίως με τη χρήση διαδικτυακών εφαρμογών κινητοποιούν τους μαθητές.

Γενικός σκοπός:

Ο μαθητής να γνωρίζει τα χρήματα και τις σχέσεις τους στο επίπεδο των αριθμητικών του γνώσεων και να εξοικειώνεται με καταστάσεις συναλλαγών

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα-Στόχοι:

Επιδιώκεται ο μαθητής:

1. Σε γνωστικό επίπεδο:

-Να εξοικειωθεί με τα χαρακτηριστικά των νομισμάτων και των χαρτονομισμάτων του Ευρώ (χρώμα, μέγεθος, υλικό, εικόνα)

-Να εξασκηθεί στην καταμέτρηση κερμάτων και χαρτονομισμάτων του Ευρώ και στην ανταλλαγή χρημάτων ίσης αξίας

-Να εμπλουτίσει τις εμπειρίες του στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων συναλλαγών με ακέραιους αριθμούς

2.Σε επίπεδο δεξιοτήτων:

-Να εξασκηθεί στην χρήση της αριθμομηχανής τσέπης

-Να ελέγχει την προσοχή του και να είναι συγκεντρωμένος σε αυτό που καλείται να κάνει, χωρίς να αποσπάται

-Να κάνει εξάσκηση της λεπτής κινητικότητας

-Να εξοικειωθεί περισσότερο με το ποντίκι και να συντονίσει την κίνηση του χεριού του με το ποντίκι και τα μάτια του στην οθόνη του υπολογιστή

-Να αναπτύξει επικοινωνιακές δεξιότητες σχετικά με τη χρήση χρημάτων(πόσο κάνει; κτλ), ώστε να είναι ικανός να επικοινωνήσει στις καθημερινές συναλλαγές

3.Σε επίπεδο στάσεων:

-Να αντιληφθεί τη σπουδαιότητα της χρήσης των χρημάτων στην καθημερινή ζωή

-Να αναπτύξει θετική στάση απέναντι στον Η/Υ ως εργαλείο

-Να υιοθετήσει θετική άποψη για τα μαθηματικά

Οργάνωση της τάξης και απαιτούμενη υλικοτεχνική υποδομή

Το σχέδιο μαθήματος θα εφαρμοστεί στην σχολική τάξη και τα μέσα και υλικά που θα χρησιμοποιηθούν είναι:

-«αυτοσχέδιο» ημερολόγιο

-κουτιά προϊόντων

-αληθινά χρήματα και απομιμήσεις χρημάτων

-μαρκαδόροι, ψαλίδι, κόλα, μολύβι

-Η/Υ

-on line πλατφόρμα εκπαιδευτικών παιχνιδιών-wordwall

-αριθμομηχανή τσέπης

-φύλλα εργασίας

Διδακτικές μέθοδοι-Τεχνικές:

Γίνεται χρήση ενός συνδυασμού της δασκαλοκεντρικής μεθόδου στη φάση της παροχής νέας γνώσης και της μαθητοκεντρικής μεθόδου στη φάση των ασκήσεων εμπέδωσης και αξιολόγησης. Πιο συγκεκριμένα στη φάση της ανακοίνωσης των διδακτικών στόχων και της διδασκαλίας του γνωστικού αντικειμένου θα εφαρμοστεί η μέθοδος της άμεσης διδασκαλίας. Ενώ στη φάση των δραστηριοτήτων εμπέδωσης θα εφαρμοστεί η βιωματική μάθηση. Οι τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν είναι ο κατευθυνόμενος διάλογος, η συζήτηση, η εισήγηση/εμπλουτισμένη εισήγηση, το παιχνίδι, η προβολή βίντεο και το παιχνίδι ρόλων. Βασική επιδίωξη είναι η διαφοροποίηση της διδασκαλίας και μια πολυαισθητηριακή προσέγγιση με οπτικά, απτικά, ακουστικά μέσα και υλικά, αξιοποιώντας την χρήση ΤΠΕ.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Ο μαθητής θα πρέπει να αναγνωρίζει, να γράφει τους αριθμούς και να κάνει προσθέσεις ως το 20. Επίσης χρειάζεται να έχει αναπτύξει τις βασικές δεξιότητες χρήσης του Η/Υ (πχ. χρήση του ποντικιού) και να έχει εξοικειωθεί με τις βασικές λειτουργίες της χρησιμοποιούμενης πλατφόρμας εκπαιδευτικών παιχνιδιών(wordwall).

Περιγραφή Σχεδίου:

Εισαγωγή (χρόνος:2΄)

(**Στόχος:** προετοιμασία μαθητή για έναρξη μαθήματος)

Η εκπαιδευτικός μέσα από ερωτήσεις «ρουτίνας» όπως: τι ημέρα, μήνα, έτος και καιρό έχουμε, βοηθάει τον μαθητή να συγκεντρωθεί και να αντιληφθεί ότι ξεκινά το μάθημα.

1η φάση Αφόρμηση (χρόνος:2΄)

(**Στόχος:** Διάγνωση γνωστικού υποβάθρου-Ανάκληση προγενέστερων γνώσεων)

Η εκπαιδευτικός στέκεται με τον μαθητή μπροστά στο «μαγαζάκι της τάξης» και του παρουσιάζει πραγματικά κέρματα των 1ευρώ, 2ευρώ και χαρτονομίσματα των 5, 10 και 20 ευρώ. Με την τεχνική του κατευθυνόμενου διαλόγου υποβάλλει ερωτήσεις, με στόχο την ανάκληση προγενέστερων γνώσεων.

2η φάση: Ανακοίνωση διδακτικών στόχων (χρόνος:1΄)

Η εκπαιδευτικός με εισήγηση ανακοινώνει τους στόχους και την πορεία του μαθήματος.

3η φάση Διδασκαλία Γνωστικού Αντικειμένου (χρόνος:8΄)

(**Στόχος:** Παρουσίαση της νέας γνώσης- Εξοικείωση με τα χαρακτηριστικά των χρημάτων)

Προβολή εκπαιδευτικού βίντεο (https://youtu.be/szF9Sq6pKu0) με θέμα τα νομίσματα και τα χαρτονομίσματα του ευρώ, στοχεύοντας στην ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος του μαθητή. Στη συνέχεια η εκπαιδευτικός με την τεχνική της εμπλουτισμένης εισήγησης παρουσιάζει τα 1,2,5,10,20ευρώ και τα χαρακτηριστικά τους, χρησιμοποιώντας αληθινά χρήματα. Δίνεται ευκαιρία στον μαθητή να περιεργαστεί, με βιωματικό τρόπο, τα κέρματα και τα χαρτονομίσματα και ακολουθεί συζήτηση για την αξιοποίηση των χρημάτων στην καθημερινή ζωή.

4η φάση Δραστηριότητες εμπέδωσης:

Για την υλοποίηση των παρακάτω δραστηριοτήτων η εκπαιδευτικός θα δρα ως συντονιστής, εμψυχωτής, καθοδηγητής, θα βοηθάει όταν ο μαθητής συναντάει δυσκολίες και θα παρέχει τα κατάλληλα ερεθίσματα ώστε το ενδιαφέρον του να παραμένει αμείωτο. Επίσης στο τέλος της κάθε δραστηριότητας γίνεται παρουσίαση των απαντήσεων και με συζήτηση η εκπαιδευτικός δίνει ανατροφοδότηση.

1η δραστηριότητα – Φύλλο εργασίας 1 (χρόνος 6΄)

(Στόχος: εξοικείωση με τα χαρακτηριστικά των χρημάτων)

Ο μαθητής καλείται να χρωματίσει, να κόψει και να κολλήσει τα χρήματα στην «σκάλα των ευρώ».

2η δραστηριότητα – Διαδικτυακό παιχνίδι (χρόνος 3΄)

(**Στόχος:** καταμέτρηση-ανταλλαγή με χρήματα ίσης αξίας)

Η εκπαιδευτικός μπαίνει στην πλατφόρμα wordwall και καλεί τον μαθητή να παίξει το παιχνίδι που έχει δημιουργήσει η ίδια: https://wordwall.net/el/resource/79671345

3η δραστηριότητα – Φύλλο εργασίας 2 (χρόνος 6΄)

(**Στόχος:** καταμέτρηση- επίλυση προβλημάτων συναλλαγών)

Ο μαθητής ασχολείται με ασκήσεις που αφορούν την καταμέτρηση χρημάτων και καθημερινές συναλλαγές.

4η δραστηριότητα – Παιχνίδι ρόλων(χρόνος 7΄)

(**Στόχος:** καταμέτρηση χρημάτων-ανάπτυξη επικοινωνιακών δεξιοτήτων-εξάσκηση στη χρήση αριθμομηχανής τσέπης και σε καθημερινές συναλλαγές)

Ο μαθητής και η εκπαιδευτικός συμμετέχουν σε παιχνίδι ρόλων. Πραγματοποιούν εικονικές αγοραπωλησίες στο «μαγαζάκι» της τάξης , αναλαμβάνοντας εναλλάξ τους ρόλους του ταμία και του πελάτη. Χρησιμοποιούνται απομιμήσεις χρημάτων και αριθμομηχανή τσέπης, εμπλουτίζοντας με αυτό τον τρόπο ο μαθητής τις εμπειρίες του στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων συναλλαγών.

5η φάση: Τελική Αξιολόγηση (χρόνος: 5΄)

(Στόχος: αξιολόγηση του βαθμού κατάκτησης των γνωστικών στόχων)

Η εκπαιδευτικός μπαίνει στην πλατφόρμα wordwall. Καλεί τον μαθητή να απαντήσει σε ένα quiz που έχει δημιουργήσει η ίδια και με συζήτηση δίνει ανατροφοδότηση.

https://wordwall.net/el/resource/80774798

6η φάση: Ανακεφαλαίωση-Αναστοχασμός-Εργασία για το σπίτι(χρόνος: 5΄)

Η εκπαιδευτικός με εισήγηση υπενθυμίζει τα βασικά σημεία του μαθήματος και παρέχει οδηγίες για την εργασία που αναθέτει στο σπίτι. Στη συνέχεια γίνεται αναστοχασμός-συζήτηση όσον αφορά τα σημεία που άρεσαν ή/και δυσκόλεψαν τον μαθητή.

Αξιολόγηση:

Η αξιολόγηση περιλαμβάνει:

Α)Αρχική αξιολόγηση: στην αρχή του μαθήματος μέσω ερωτήσεων, γίνεται αξιολόγηση του γνωστικού επιπέδου του μαθητή για την ύλη που θα διδαχθεί.

Β)Διαμορφωτική αξιολόγηση: πραγματοποιείται σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας μέσω ερωτήσεων, συζήτησης και παρατήρησης της συμμετοχής και του ενδιαφέροντος του μαθητή

Γ)Τελική αξιολόγηση: στο τέλος της διδασκαλίας αξιολογείται ο βαθμός κατάκτησης των γνωστικών στόχων μέσω quiz που καλείται να απαντήσει ο μαθητής στον υπολογιστή.

Βιβλιογραφία:

- Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Εργαστηρίων Ειδικής Επαγγελματικής Εκπαίδευσης και Κατάρτισης (Ε.Ε.Ε.Ε.Κ.), Απρίλιος 2004
- Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Ειδικής Αγωγής, Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για Μαθητές με Ελαφρά και Μέτρια Νοητική Καθυστέρηση, 2004
- Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων, Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Βιβλίο Δασκάλου, Μαθηματικά Α΄ και Β΄ Δημοτικού, Προσαρμοσμένη έκδοση με τη μέθοδο easy to read
- Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων, Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Μαθηματικά Α΄ και Β΄ Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, α΄ τεύχος, Προσαρμοσμένη έκδοση με τη μέθοδο easy to read
- Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων, Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, Επιμορφωτικό υλικό για τη ΘΕ4.2: «Σύγχρονες μέθοδοι διδασκαλίας στην επαγγελματική εκπαίδευση και κατάρτιση», Κωνσταντίνος Καλοβρέκτης
- Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής, «Διαφοροποιημένη Διδασκαλία», Μαρίνα Λουάρη https://eclass.aspete.gr/modules/document/file.php/EPPAIK-PESYP159/ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ%20ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ.pdf
- https://www.slideshare.net/slideshow/ss-76552537/76552537

Σχέδια μαθήματος στα Μαθηματικά-Γεωμετρία της Β΄ και Γ΄ τάξης του Γυμνασίου

Παρδάλη Αφροδίτη
Μαθηματικός M.Sc., Γυμνάσιο Βίβλου Νάξου
parafrod7@yahoo.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε δύο σχέδια μαθημάτων μίας διδακτικής ώρας το κάθε ένα, ένα στο Θεώρημα του Θαλή και ένα στο Πυθαγόρειο Θεώρημα τα οποία υλοποιήθηκαν στο Γυμνάσιο Βίβλου Νάξου. Το θεώρημα του Θαλή αποτελεί διδακτέα ύλη στην Γ΄ τάξη του Γυμνασίου και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί διδακτέα ύλη στην Β ΄τάξη του Γυμνασίου .Στις διδασκαλίες μας ενσωματώσαμε μαθηματικό λογισμικό που προβλήθηκε με την βοήθεια του διαδραστικού πίνακα.

Abstact

In this work, we present two one-hour lesson plans, one on Thales' Theorem and one on the Pythagorean Theorem, which were implemented at Vivlos Naxos High School. Thales' Theorem is part of the curriculum for the third grade of high school, while the Pythagorean Theorem is taught in the second grade. In our lessons, we incorporated mathematical software, which was displayed using an interactive whiteboard.

Θεώρημα Θαλή

Στη διδασκαλία αυτή οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με το θεώρημα Θαλή πρώτα μέσα από ένα βίντεο και στη συνέχεια συμπλήρωσαν σε μικρές ομάδες ένα φύλλο με καθοδηγούμενες ερωτήσεις, το οποίο στηριζόταν σε διαδραστικά πειράματα του φωτόδεντρου. Στη συνέχεια εργάστηκαν σε απλές εφαρμογές του φύλλου εργασίας.
Βίντεο
https://edutv.minedu.gov.gr/index.php/epistimi-texnologia/prosopa-kai-epistimes-thalis
Διαδραστικά Πειράματα
https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5408
https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5409
Σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Στη διδασκαλία αυτή οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με το Πυθαγόρειο Θεώρημα πρώτα μέσα από δύο βίντεο και στη συνέχεια συμπλήρωσαν σε μικρές ομάδες ένα φύλλο με καθοδηγούμενες ερωτήσεις, το οποίο στηριζόταν σε αυτά τα δύο βίντεο. Μετά την ανακάλυψη του θεωρήματος είδαν ένα ακόμη βίντεο με την απόδειξη του θεωρήματος με ανακατανομή. Στη συνέχεια εργάστηκαν σε απλές εφαρμογές του φύλλου εργασίας.
Βίντεο
https://edutv.minedu.gov.gr/index.php/epistimi-texnologia/prosopa-kai-epistimes-pythagoras
https://youtu.be/lVdl3jbuiK4?si=0uLU7jBg4VshfB-F
https://youtu.be/JMEak9olNdE?si=mS0gYkkjrMRKjn_e
Βιβλιογραφία
Σχολικά βιβλία Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου

Σχέδιο Μαθήματος: Θεώρημα Θαλή

Τάξη: Γ' Γυμνασίου
Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα
Εξοπλισμός: Διαδραστικός πίνακας, Ψηφιακό Βιβλίο του Υπουργείου, πρόσβαση στο Φωτόδεντρο, εκπαιδευτική τηλεόραση.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών – εφαρμογή στο τρίγωνο
Έννοια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων
Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα
Χρήση βασικών εργαλείων του λογισμικού Geogebra

Διδακτικοί Στόχοι

Από την εφαρμογή του συγκεκριμένου σεναρίου οι μαθητές θα μάθουν να ανακαλύπτουν τη γνώση συνεργατικά.

Επίσης με τη βοήθεια των προτεινόμενων εργαλείων θα μάθουν να διερευνούν με δυναμικό τρόπο τα γεωμετρικά σχήματα που οι ίδιοι κατασκευάζουν.

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση αυτής της διδασκαλίας:

- ✓ Να ανακαλύψουν το θεώρημα του Θαλή και να κατανοήσουν τη διατύπωσή του.
- ✓ Να συνδέσουν το θεώρημα του Θαλή με την έννοια της αναλογίας τόσο αριθμητικά, όσο και γεωμετρικά.
- ✓ Να αντιληφθούν και να κατανοήσουν τις αναλογίες των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων και να είναι σε θέση να «παίξουν» με αυτές.
- ✓ Να χρησιμοποιούν το θεώρημα για τον υπολογισμό του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος και του λόγου δύο τμημάτων.
- ✓ Να εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή σε τρίγωνο.
- ✓ Να αντιληφθούν το «αντίστροφο» του θεωρήματος.
- ✓ Να επιλύουν απλές και πιο σύνθετες εφαρμογές πάνω στο θεώρημα.

Κοινωνική ενορχήστρωση

Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των 2 – 3 ατόμων σε κοινό φύλλο εργασίας, το οποίο στηρίζεται σε ένα μικροπείραμα από το φωτόδεντρο με το λογισμικό geogebra. Οι ερωτήσεις είναι καθοδηγούμενες και στηρίζονται στην προηγούμενη ενότητα, για την οποία επίσης, έχουν εργαστεί σε φύλλο εργασίας. Το μικροπείραμα που θα προβάλλεται στον διαδραστικό πίνακα θα το χειρίζεται ένας μαθητής.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου οι μαθητές καλούνται να συνεργάζονται τόσο μέσα στην ομάδα τους, όσο και όλοι μαζί είτε ελέγχοντας τις απαντήσεις τους, είτε ανταλλάσσοντας ιδέες σε προφορικές παρατηρήσεις που θα γίνουν πάνω στο μικροπείραμα.

Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Ανάλυση του σεναρίου

Α φάση

Θα προβληθεί στον διαδραστικό πίνακα ένα μικρό βίντεο με κάποιες πληροφορίες για τον Θαλή και θα γίνει μια γνωριμία με το θεώρημά του.

Θα γίνει μια μικρή συζήτηση και θα ζητηθεί από μια ομάδα να ερευνήσει τόσο για τη ζωή του Θαλή, όσο και για το έργο του και να μας παρουσιάσει την έρευνά του στο επόμενο μάθημα.

Στόχος: *πρώτη γνωριμία με τη ζωή και το έργο του Θαλή.*

Β φάση

Από το μικροπείραμα του φωτόδεντρου με το λογισμικό Geogebra, οι μαθητές θυμούνται την ισότητα τμημάτων μεταξύ παραλλήλων.

Στόχος: *σύνδεση με προηγούμενη γνώση*

Γ φάση

Ανακάλυψη του θεωρήματος εργαζόμενοι στο φύλλο εργασίας και στηριζόμενοι στη Β φάση.

Στόχος: *η απόδειξη του θεωρήματος*

Δ φάση

i. Οπτική επιβεβαίωση του θεωρήματος μέσα από το δυναμικό εργαλείο Geogebra.

Στόχος: *Να κατανοήσουν τη δυναμικότητα του Θεωρήματος του Θαλή βλέποντας πως οι αναλογίες διατηρούνται σταθερές ακόμη και όταν αλλάζουν οι αποστάσεις των σημείων στις παράλληλες.*
Να εμβαθύνουν οι μαθητές στην έννοια της αναλογίας και να αντιληφθούν ότι η ισότητα των λόγων παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από την τοποθέτηση των σημείων στις παράλληλες ευθείες.

ii. Προσπάθεια διατύπωσης του θεωρήματος του Θαλή από τους μαθητές

Στόχος: *Να ενισχύσουν οι μαθητές την κατανόησή τους για το Θεώρημα του Θαλή, διατυπώνοντάς το με δικά τους λόγια.*

Ε φάση

Εφαρμογή ιδιότητας αναλογιών
Μεταβατική φάση για την εφαρμογή του θεωρήματος σε τρίγωνο.
Στόχος: *σύνδεση με προηγούμενη γνώση*

Στ Φάση

Εφαρμογή του θεωρήματος σε τρίγωνο
Στόχος: *Εφαρμογή του θεωρήματος σε τρίγωνο και κατανόηση μέσω οπτικής επιβεβαίωσης μέσα από ένα ακόμη μικροπείραμα, το οποίο θα επεξεργαστεί κάποιος άλλος μαθητής.*

Ζ φάση

Οι μαθητές εργάζονται στις απλές εφαρμογές του φύλλου εργασίας και επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματά τους είτε με άλλη ομάδα, είτε με τον διδάσκοντα.
Στόχος:

i. *να εμπεδώσουν το θεώρημα και να το εφαρμόζουν σε απλές και πιο σύνθετες ασκήσεις.*
ii. *να εξοικειωθούν και να «παίξουν» με τις αναλογίες. (άσκηση 2).*
iii. *να αντιληφθούν το «αντίστροφο» του θεωρήματος (άσκηση 3).*
iv. *αποτίμηση της μαθησιακής πορείας των μαθητών από τον διδάσκοντα και εντοπισμός των πιθανών δυσκολιών.*

Η φάση

Αν υπάρχει χρόνος διαπραγματεύονται και κάποιες από τις ασκήσεις του βιβλίου που αναφέρονται στο φύλλο εργασίας.
Στόχος: *να εξασκηθούν και να εμβαθύνουν στο περιεχόμενο*

Θ φάση

Ασκήσεις για το σπίτι
Στόχος: *Να εφαρμόσουν τις γνώσεις που απέκτησαν στην τάξη, εδραιώνοντάς την με το δικό τους ρυθμό και ενισχύοντας την αυτονομία τους.*

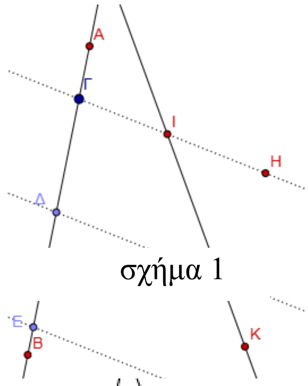
Επέκταση του σεναρίου

Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά την δομή του σεναρίου και σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις. Το συγκεκριμένο σενάριο θα μπορούσε να αποτελέσει την βάση πάνω στην οποία είναι δυνατόν να οργανωθεί η σύνδεση της ομοιότητας πολυγώνων (σμίκρυνση – μεγέθυνση), κλίμακα και τέλος, της ομοιότητας των τριγώνων.

Α. Προβολή video για το θεώρημα του Θαλή

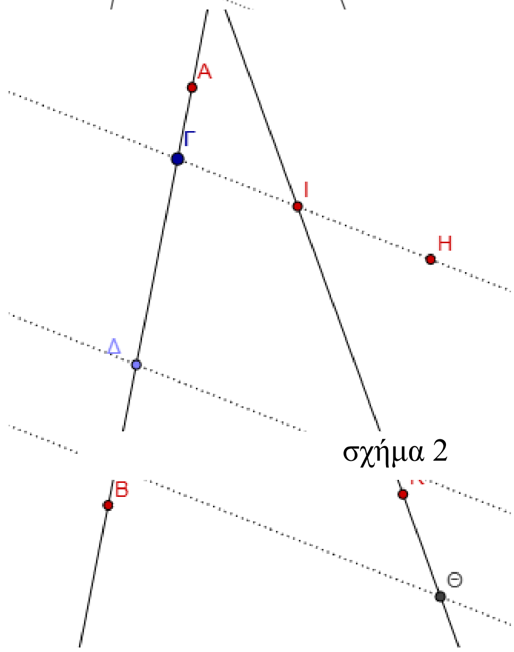
Εργαζόμαστε με βάση το μικροπείραμα στο φωτόδεντρο που προβάλλεται στον διαδραστικό πίνακα

Β. Μετακινούμε το Γ, έτσι ώστε ΓΔ = ΔΕ.
Επαληθεύεται η Πρόταση 1 από το 1^{ο} φύλλο εργασίας;
Αν ναι, εφαρμόστε την.
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………



σχήμα 1

Γ. i. Από το μέσο Μ του ΓΔ φέρτε παράλληλη προς την ΔΖ, η οποία τέμνει την ΙΖ στο Ν. Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά στηριζόμενη στην Πρόταση 1.
ΓΜ = ….. = ……= ………
ΙΝ = ……. = ……….. = …………
Άρα ΓΔ = ……·ΔΕ και ΙΖ = ……·ΖΘ
Επομένως ο λόγος $\frac{ΓΔ}{ΙΖ} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
Αφού έχουν ……………… λόγους, λέμε τότε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα …….., …….. είναι ……………………. προς τα ………, …………
ii. Καθώς ΓΕ = ΓΔ +ΔΕ και ΙΘ = ΙΖ + ΖΘ, χρησιμοποιώντας μια ιδιότητα αναλογιών, συμπληρώστε την αναλογία $\frac{ΓΔ}{ΙΖ} = \frac{ΔΕ}{ΖΘ} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

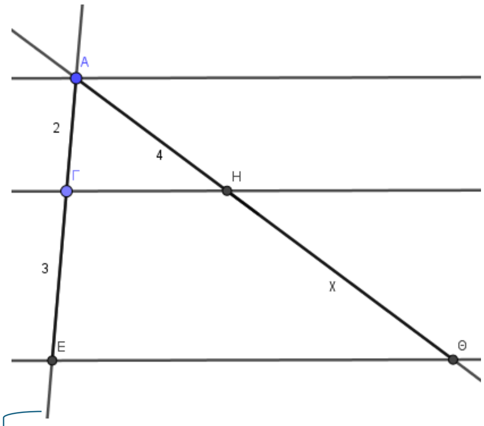


σχήμα 2

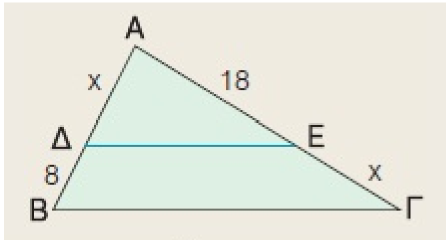
Δ. Ας επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω και οπτικά μέσα από το λογισμικό Geogebra.
i. Μετακινούμε τα Δ και Ε, έτσι ώστε ΓΔ = 2ΔΕ.
Μετά τη μέτρηση των ευθυγράμμων τμημάτων, υπολογίστε τους λόγους
$\frac{ΓΔ}{ΙΖ} =$ $\frac{ΔΕ}{ΖΘ} =$
Άρα $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$
ii. Ας παρατηρήσουμε στον πίνακα αν τα παραπάνω τμήματα παραμένουν ανάλογα με τη μετακίνηση του Ι και στη συνέχεια του Α.
Μπορείτε να διατυπώσετε αυτό που παρατηρείτε;
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
Συμπληρώστε τα κενά
«Αν τρεις ή περισσότερες ………………………… ευθείες τέμνουν δύο άλλες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία, είναι ……………………… προς τα …………………… …………………… που ορίζονται στην άλλη.
Η παραπάνω πρόταση αποτελεί το ***Θεώρημα του Θαλή***.
Συγκρίνετε την πρότασή σας στο Γ με την διατύπωση του θεωρήματος του Θαλή.
Ε. Από μια ακόμη ιδιότητα των αναλογιών, αυτή της εναλλαγής των μέσων όρων, συμπληρώστε την ισοδυναμία $\frac{ΓΔ}{ΙΖ} = \frac{ΔΕ}{ΖΘ} \Leftrightarrow \frac{ΓΔ}{\quad} = \frac{\quad}{ΖΘ}$ ………………………………………………………………
ΣΤ. Ως συμπέρασμα της προηγούμενης αναλογίας, το θεώρημα του Θαλή μπορεί να εφαρμοστεί και σε ένα τρίγωνο. Ας το ελέγξουμε από ένα ακόμη μικροπείραμα.

Ζ. <u>Απλές εφαρμογές του θεωρήματος του Θαλή</u>

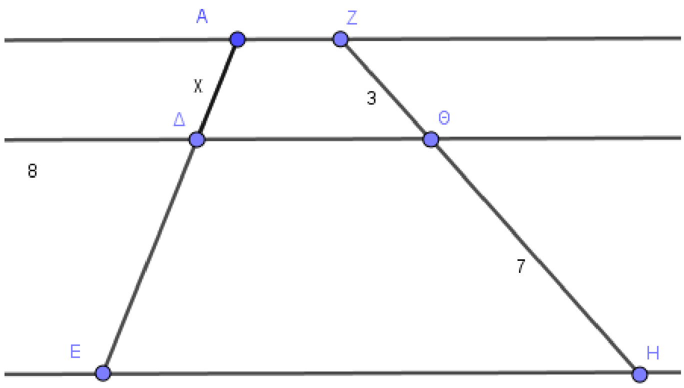
1.α



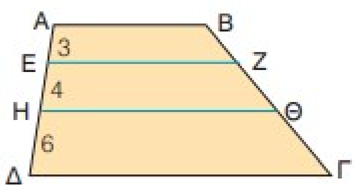
β.



γ.



2. Αν ΑΒ, ΕΖ, ΗΘ, ΔΓ παράλληλες, να συμπληρώσετε τις ισότητες

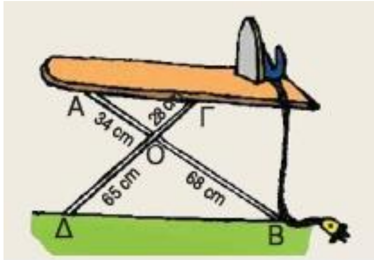


α. $\frac{BZ}{\Theta\Gamma} =$

β. $\frac{Z\Theta}{Z\Gamma} =$

γ. $\frac{B\Theta}{\Theta\Gamma} =$

3. Μήπως αυτός που άνοιξε τη σιδερώστρα, δεν έχει σιδερώσει ποτέ του;
Η σανίδα δεν είναι οριζόντια και αναρωτιέται πού έγινε το λάθος.



Η. Ανοίξτε το βιβλίο σας στη σελίδα 208 και εργαστείτε πάνω στις ερωτήσεις κατανόησης 2 και 4 και στη σελίδα 209 πάνω στην άσκηση 7.

Θ.

σελίδα 208 ερωτήσεις κατανόησης 1, 3, 5
σελίδα 209 ασκήσεις 4, 5

Σχέδιο Μαθήματος: Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Τάξη:Β'Γυμνασίου
Διάρκεια:1διδακτικήώρα
Εξοπλισμός: Διαδραστικός πίνακας, Ψηφιακό Βιβλίο του Υπουργείου, πρόσβαση στο Φωτόδεντρο και την πλατφόρμα Αίσωπος.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Στοιχεία του ορθογωνίου τριγώνου και των χαρακτηριστικών του.
Έννοια εμβαδού και εμβαδά βασικών σχημάτων.
Έννοια του τετραγώνου ενός αριθμού
Βασική επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ ανεξαρτήτως ποιος είναι ο άγνωστος.

Στόχοι Μαθήματος

Οι μαθητές/μαθήτριες μετά το πέρας του μαθήματος να είναι σε θέση:

- να κατανοήσουν τη γεωμετρική ερμηνεία του Πυθαγορείου Θεωρήματος
- να εκφράζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα αλγεβρικά
- να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα
- να αναγνωρίζουν πότε να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε απλά μαθηματικά προβλήματα, ώστε να υπολογίζουν μία πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν δίνονται οι άλλες δύο.
- να συνδέσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με πρακτικά προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Κοινωνική Ενορχήστρωση

Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των 2 – 3 ατόμων σε κοινό φύλλο εργασίας με καθοδηγούμενες ερωτήσεις. Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου οι μαθητές καλούνται να συμμετέχουν ενεργά συζητώντας και ανταλλάσσοντας ιδέες σχετικά με τα βίντεο που θα προβληθούν.

Επίσης, καλούνται να συνεργάζονται τόσο μέσα στην ομάδα τους, όσο και όλοι μαζί είτε ελέγχοντας τις απαντήσεις τους, είτε συζητώντας τους προβληματισμούς τους.
Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Ανάλυση Σεναρίου

Α φάση

Θα προβληθεί στον διαδραστικό πίνακα ένα βίντεο της εκπαιδευτικής τηλεόρασης μέσα από την πλατφόρμα Αίσωπος, ώστε μέσα από τον προβληματισμό των μαθητών να εισαχθεί η αναγκαιότητα του Πυθαγορείου Θεωρήματος και η σύνδεσή του με τα ορθογώνια τρίγωνα. Υπενθύμιση των στοιχείων ορθογωνίου τριγώνου.

Στόχος:

Πρώτη επαφή με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τη ζωή και το έργο του Πυθαγόρα.

Σύνδεση με προηγούμενη γνώση.

Β φάση

Προβολή του βίντεο «υγρά τετράγωνα», ώστε οι μαθητές να παρατηρήσουν και να ανακαλύψουν εποπτικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε σχέση με τα εμβαδά των τετραγώνων.

Στη συνέχεια καλούνται να συνδέσουν τα τετράγωνα με το ορθογώνιο τρίγωνο, να εκφράσουν αλγεβρικά το θεώρημα και να κάνουν μια προσπάθεια διατύπωσής του περνώντας από τα εμβαδά των τετραγώνων στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Τέλος, θα τους ζητηθεί – αφού συμπληρώσουν τα κενά στην διατύπωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος - να συγκρίνουν τη δική τους διατύπωση με το θεώρημα.

Στόχος:

Ανακάλυψη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, γεωμετρική ερμηνεία του και εποπτική απόδειξη.

Αναγωγή του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τα εμβαδά των τετραγώνων στα ορθογώνια τρίγωνα.

Διατύπωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Γ φάση

Προβολή ενός ακόμη βίντεο από το κανάλι «ήδη – έτερον» στο Youtube. Θα κληθούν οι μαθητές να ανταλλάξουν ιδέες πάνω στο πρόβλημα με τα μολύβια, να το λύσουν, να προσπαθήσουν να καταλάβουν την διατύπωση στα αρχαία, να ακούσουν για την εφαρμογή του στην καθημερινότητα. Σε αυτό το σημείο θα ζητηθεί από μια ομάδα να ερευνήσει τη ζωή και το έργο του Πυθαγόρα και μια δεύτερη ομάδα να βρει εφαρμογές στην καθημερινότητα.

Τέλος, θα δουν και μια ακόμη απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, αυτήν με την ανακατανομή των ορθογωνίων, την οποία θα συζητήσουμε επαρκώς.

Στόχος:

Υπολογισμός μιας πλευράς ορθογωνίου τριγώνου, γνωρίζοντας τις άλλες δύο.

Επίλυση εξίσωσης της μορφή $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

Κατανόηση μιας εναλλακτικής προσέγγισης του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Ενέπνευση από τη ζωή και το έργο ενός φωτισμένου μυαλού του αρχαιοελληνικού πολιτισμού.

Δ φάση

Οι μαθητές εργάζονται στις απλές εφαρμογές του φύλλου εργασίας και επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματά τους είτε με άλλη ομάδα, είτε με τον διδάσκοντα.

Στόχος:

Οι μαθητές/μαθήτριες, μετά το πέρας του μαθήματος να είναι σε θέση:

- ***v.*** *να εμπεδώσουν το θεώρημα και να το εφαρμόζουν σε απλές και πιο σύνθετες ασκήσεις.*
- ***vi.*** *να αντιληφθούν τη χρησιμότητα του θεωρήματος στην καθημερινότητα (άσκηση 2, 3).*

Ο εκπαιδευτικός να αποτιμήσει την μαθησιακή πορείας των μαθητών/μαθτριών και να εντοπίσει τις πιθανές δυσκολίες

Ε φάση

Αν υπάρχει χρόνος διαπραγματεύονται και κάποιες από τις ασκήσεις του βιβλίου που αναφέρονται στο φύλλο εργασίας.

Στόχος: *να εξασκηθούν και να εμβαθύνουν στο περιεχόμενο.*

Η φάση

Ασκήσεις για το σπίτι

Στόχος: *Να εφαρμόσουν τις γνώσεις που απέκτησαν στην τάξη, εδραιώνοντάς την με το δικό τους ρυθμό και ενισχύοντας την αυτονομία τους.*

Επέκταση του σεναρίου

Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά την δομή του σεναρίου και σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις. Άμεση επέκταση του σεναρίου αυτού είναι το Αντίστροφο του Θεωρήματος που είναι εξίσου σημαντικό, ώστε τα παιδιά να κατανοήσουν την έννοια της ορθογωνιότητας στις κατασκευές.

Μετά την προβολή του video με τον Ρωμαίο και την Ιουλιέτα, απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Α. i.Τι πρέπει να προσέξει ο Ρωμαίος κατά την παραγγελία του;

ii. Πώς θα υπολογίσει ο Ρωμαίος το μήκος της σκάλας; (ιδέες – συζήτηση)

Σχεδιάστε τη σκάλα πάνω στην εικόνα.

Συγκρίνετε τη σκάλα σας με αυτή στο βίντεο.

iii. Ας θυμηθούμε τα στοιχεία ενός ορθογωνίου τριγώνου. Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και γράψτε πώς ονομάζονται οι πλευρές του.

Β. i. Μετά την προβολή του video με τα «υγρά» τετράγωνα, τι παρατηρείτε;

……

……

………………………………………………………………………………

ii. Αν δούμε το παραπάνω πείραμα – σχέδιο ως δισδιάστατο, μπορείτε να συνδέσετε την παραπάνω παρατήρησή σας με τα εμβαδά των τετραγώνων;

iii. Συμπληρώστε τα κενά

Το εμβαδό του …………….. τετραγώνου (E_M) ισούται με το άθροισμα των …….. …………………. τετραγώνων (E_1, E_2).

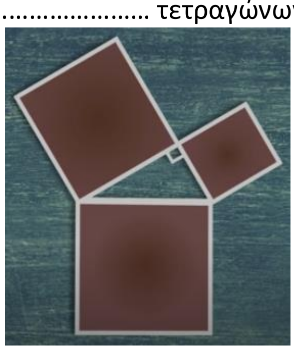
Άρα E_M = ….. + ……… (σχέση 1)

iv. Προσπαθήστε να συνδέσετε τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου με τα τετράγωνα.

v. Συμπληρώστε τα κενά

Η ……………… του ορθογωνίου τριγώνου είναι η πλευρά του ………………… τετραγώνου, ενώ οι …………………… πλευρές του είναι οι ……………… των δύο άλλων ……………………… τετραγώνων.

vi. Αν α η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου στο διπλανό σχήμα και β, γ οι κάθετες πλευρές του, μετατρέψτε τη σχέση 1 σε μαθηματική πρόταση.



vii. Μπορείτε τώρα να διατυπώσετε την παραπάνω πρόταση με βάση τις πλευρές του τριγώνου αγνοώντας τα τετράγωνα;

……

……

………………………………………………………………………………

viii. Συμπληρώστε τα κενά και στη συνέχεια συγκρίνετε την παρακάτω πρόταση με τη δική σας διατύπωση παραπάνω.

Σε κάθε ………………… τρίγωνο το ……………………………. της υποτείνουσας ………………… με το ………………….. των ……………………. των δύο ………………….. ……………………

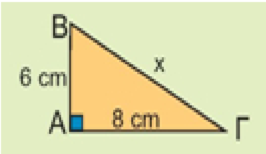
Η παραπάνω πρόταση αποτελεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Γ. Συζήτηση μετά την προβολή του video από το κανάλι «ήδη – έτερον» στο Youtube.

Δ. Απλή εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος

1. Υπολογίστε το x στα παρακάτω σχήματα **2.**

i.



ii.

3.

Ο Γιώργος έχει μια ασύρματη συσκευή ενδοεπικοινωνίας με το σπίτι του, εμβέλειας 3km. μια μέρα ξεκίνησε από το σπίτι του με το ποδήλατο του, κατευθύνθηκε 7km Βόρεια, 6km Ανατολικά, 5km Νότια και στη συνέχεια έστριψε Δυτικά και αφού διάνυσε μια απόσταση 3km, το ποδήλατο του χάλασε.

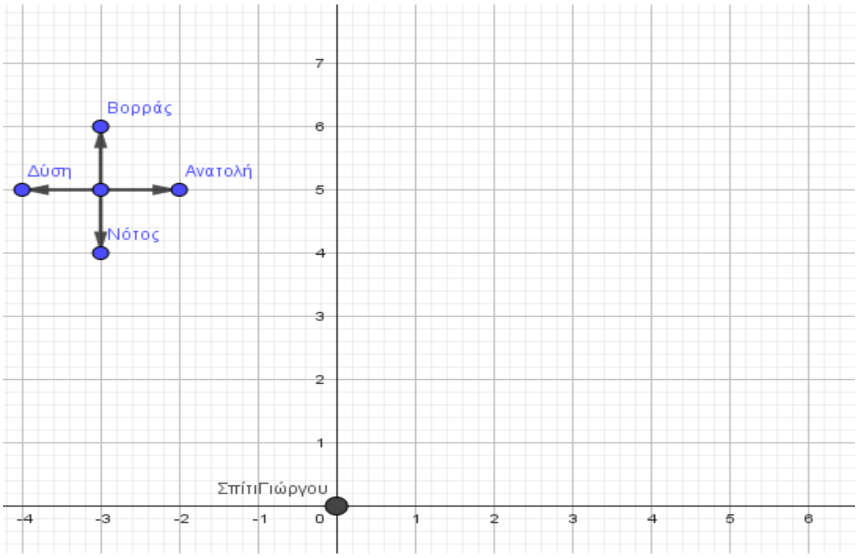
Μπορεί ο Γιώργος να επικοινωνήσει με το σπίτι του μέσω του ασυρμάτου;

i. Να απεικονίσετε στο χαρτί το σπίτι του Γιώργου με ένα σημείο και στη συνέχεια να χαράξετε την διαδρομή που ακολούθησε μέχρι να χαλάσει το ποδήλατό του.

ii. Να χαράξετε με διακεκομμένη γραμμή το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σπίτι του Γιώργου με το σημείο που χάλασε το ποδήλατο του.

iii. Να υπολογίσετε την παραπάνω απόσταση (το μήκος της διακεκομμένης) για να αποφανθείτε αν τελικά ο Γιώργος μπορεί να επικοινωνήσει με το σπίτι του.

Βοήθεια: Χρησιμοποιήστε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων όπου το σπίτι του Γιώργου είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων και σχεδιάστε τη διαδρομή.



Ε. Ανοίξτε το βιβλίο σας στη σελίδα 130 - 131 και εργαστείτε πάνω στις ασκήσεις 1 και 4.

Η.

Σελίδα 130 ερώτηση κατανόησης 3 και 4. Σελίδα 131 ασκήσεις 5, 8, 9.

Βιβλιογραφία-Διαδίκτυο
Σχολικά βιβλία Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου
Οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της ύλης Ι.Ε.Π.
https://edutv.minedu.gov.gr/index.php/epistimi-texnologia/prosopa-kai-epistimes-thalis
Διαδραστικά Πειράματα
https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5408
https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5409
Σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου

Πυθαγόρειο Θεώρημα

https://edutv.minedu.gov.gr/index.php/epistimi-texnologia/prosopa-kai-epistimes-pythagoras
https://youtu.be/lVdl3jbuiK4?si=0uLU7jBg4VshfB-F
https://youtu.be/JMEak9olNdE?si=mS0gYkkjrMRKjn_e
Βιβλιογραφία