ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1 (ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. **Α2. α)** Θεωρία. **β)** Θεωρία.
Α3. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφαρμογή ορισμού μονοτονίας.
Β2. Εφαρμογή ορισμού γνησίως αύξουσας.
Β3. Χρησιμοποιήστε το «1-1» για τις f, g .
Β4. Χρησιμοποιήστε ότι η (fog) είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(0,+\infty)$
Γ2. Η f έχει ρίζα το 0.
Γ3. Εφαρμογή ορισμού μονοτονίας.
Γ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1». Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow ...x = f^{-1}(y)$.
Γ5. Θεωρήστε την διαφορά ως νέα συνάρτηση και βρείτε το σύνολο τιμών της
Γ6. $\dfrac{f(1)}{f(2)}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμογή ορισμού «1-1».
Δ2. Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow ...x = f^{-1}(y)$
Δ3. Να βρείτε $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = 0$.
Δ4. Εφαρμογή ορισμού γνησίως αύξουσας.
Δ5. Εφαρμογή ορισμού συνέχειας $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2 (ΛΥΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία . **Α2.** Θεωρία .
Α3. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η $g(x) = f(x) + \text{ημx}, \text{x} \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα συνεχών στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων) και επιπλέον $g(x) \neq 0$ διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x_0) = 0$, τότε θα έχουμε :

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) + \text{ημx}_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = -\text{ημx}_0$$

$$f^2(x_0) + 2f(x_0)\text{ημx}_0 = x_0^2 + συνx_0 \Leftrightarrow \text{ημ}^2\text{x}_0 - 2\text{ημ}^2\text{x}_0 + \text{ημ}^2\text{x}_0 = x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 = -1$$

που είναι άτοπο. Άρα g συνεχής και χωρίς ρίζες στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
Β2. Από τηνδεδομένη σχέση για κέθε $\text{x} \in \mathbb{R}$ έχουμε διαδοχικάκαι ισοδύναμα:

$$f^2(x)+2f(x)\text{ημx}=x^2+\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\text{ημx}+\eta\mu^2 x=x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)+\text{ημx}\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow g^2(x)=x^2+1$$

Και επειδή η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ με $g(0)=f(0)+0=1>0$ θα είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως :

Β3. α) Έχουμε:

$$g(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)+\text{ημx}=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2+\text{συνx}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\text{ημx}-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\frac{\text{ημx}}{x}+\frac{\text{συνx}-1}{x}\right]=0-1+0=-1$$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\text{ημx}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1+\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+1}+\text{ημx}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{\text{ημ}^2x}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\text{ημx}}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{\text{ημ}^2x}{x^2}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\text{ημx}}{x}\right)}=+\infty$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. α) Για να είναι η συνεχής στο πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=e$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to e^-}f(x)=3,\quad \lim_{x\to e^+}f(x)=ae,\quad f(e)=3$$

Άρα $\lim_{x\to e^-}f(x)=\lim_{x\to e^+}f(x)=f(e)\Leftrightarrow \alpha e=3\Leftrightarrow a=\frac{3}{e}$

β) Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την $g(x)=f(x)-6$ στο διάστημα $[1,2e]$. Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2e]$
- $g(1)=f(1)-6=-4<0$
$g(2e)=f(2e)-6=\ln(e+1)>0$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=6$

Γ2. α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\Leftrightarrow f(e^{f(x_1)})=f(e^{f(x_2)})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\ln x_1+3=4\ln x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$$

β) Έχουμε λαμβάνοντας υπόψη μας ότι η f είναι «1-1»:

$$f\left(f(e^{f(x_1)})\right)=\ln(\ln x^4+3)^2+1 \Leftrightarrow f(4\ln x+3)=\ln(4\ln x+3)^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(4\ln x+3)=2\ln(4\ln x+3)+1,\ x>e^{-\frac{3}{4}}$$

Άρα αν θέσουμε:
$u=4\ln x+3$ έχουμε $f(u)=2\ln u+1,\ u>0$ ή $f(x)=2\ln x+1,\ x>0$

γ) Έχουμε λαμβάνοντας υπόψη μας ότι η f είναι «1-1»:

$$(fof)(x)=f(e^{x-2014}) \Leftrightarrow f(f(x))=f(e^{x-2014}) \Leftrightarrow f(x)=e^{x-2014}$$

Θέτουμε:

$$g(x)=f(x)=e^{x-2014},\ x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$$

και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano.

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ (ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών)
- $$g(1)=f(1)-e^{-2013}=1-\frac{1}{e^{2013}}=\frac{e^{2013}-1}{e^{2013}}>0$$
  $$g\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)-e^{\frac{1}{e}-2014}=-1-e^{\frac{1}{e}-2014}<0$$

Άρα υπάρχει ένα ,τουλάχιστον, $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$:

$$f(x_0)=e^{x_0-2014} \text{ ή } (fof)(x_0)=f(e^{x_0-2014}) .$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Για $x>0$ είναι: $f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$, που είναι προφανής

Για $x<0$ είναι: $f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$

Για $x=0$ είναι: $f(0)=1>0$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$

Δ2. Η είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$f(-x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{f(x)}$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (απ'ο το Δ2).

Δ4. Έχουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$ ως γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow f(a)f(\beta)=1 \Leftrightarrow f(a)=\frac{1}{f(\beta)} \Leftrightarrow f(a)=f(-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$$

Δ5. Η f έχει αντίστροφη αφού είναι»1-1». Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε:

Άρα:

$$f(x)=y \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=y-x \Leftrightarrow x^2+1=y^2-2xy+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2-2xy=1 \Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{2y},\ y\neq 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3 (ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία . **Α2.** Θεωρία.

Α3. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$ **...** $f(x_1) < f(x_2)$

Β2. $x \in (-1,1)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1». **ii)** Στην δεδομένη σχέση θέτω $x=3$ **.**

Γ2. $x=1,\ x=-2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτω $x=y=0$

Δ2. Για $x=y$ **....**Είναι $f(x)=0$ **.**

Δ3. α) Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ καταλήγω σε άτοπο.

β) $f(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1 (ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. **Α2.** Θεωρία **.**

Α3. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2e^{\frac{f(x)}{x}}}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e^{\frac{f(x)}{x}}}\right)'=(\ln x)' \Leftrightarrow \ldots f(x)=x\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)=-x\ln(\ln x), x>1$$

Β2. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[e,+\infty\right)$. Το σύνολο τιμών της f είναι: $f\left(\left[e,+\infty\right)\right)=\left(-\infty,0\right]$.

Β3. Να διακρίνετε περιπτώσεις αν $m\le 1,\ m>1$

Β4. Να μετασχηματίσετε την ανίσωση και να πάρετε την βοηθητική συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+x,\ x>0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\alpha=-1,\ \beta=0$

Γ2. α) Δεν είναι παραγωίσιμη και το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$ **.**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ρίζα της f

γ) 0

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) 0 **β)** θέτω u=2x….

Δ2. $f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Δ3. α) Έστω $M(x_1,f(x_1))$ το σημείο επαφής και (ε) $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$ η εφαπτομένη στο Μ. Αφού η (ε) διέρχεται από το σημείο Β θα την επαληθεύει και έτσι θα βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2 (ΛΥΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία **Α2.** Θεωρία **Α3. α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την στο διάστημα $\left[1,e\right]$. ‘Εχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[1,e\right]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο$\left[1,e\right]$)
- $f(1)=-1<0$
  $f(e)=3(e-1)>0$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον , $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=0$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \geq 1$ με $f'(x)=\ln x+3$.

Για $x \geq 1$ είναι $f'(x)>0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f([1,+\infty)) = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty) \quad .$$

Γ3. Εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano για την συνάρτηση:

$$g(x)=(e-1)f'(x)+2-3e$$

στο διάστημα $[1,e]$. ‘Εχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[1,e]$)
- $g(1)=-1<0$
  $g(e)=e-2>0$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (1,e)$, τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi)=0 \Leftrightarrow (e-1)f'(\xi)+2-3e$$

Γ4. Επειδή $2012 \in f([1,+\infty)) = [-1,+\infty)$, υπάρχει $x_1 \in [1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_1)=2012$. Αφού η f είναι «1-1» (ως γνησίως μονότονη) έπεται ότι το x_1 είναι μοναδικό.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=3x^2+2\lambda x-3, x\in\mathbb{R}$$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατ στο $x_0=1$ θα είναι:

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow 3+2\lambda-3=0 \Leftrightarrow \lambda=0$$

Δ2. Για $\lambda=0$ η f γίνεται $f(x)=x^3-3x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-3,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm1 \ .$$

Άρα:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ (κατασκευάστε πίνακα προσήμου της f').

Η f έχει μέγιστο στο -1 το $f(-1)=1$ και ελάχιστο στο 1 το $f(1)=-4$.

Δ3. Αν $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής ης εφαπτομένης με την C_f θα είναι $f'(x_0)=9$. Έχουμε:

$$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 3x_0^2-3=9 \Leftrightarrow x_0=\pm2$$

Για $x_0=2$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y = 9x - 17$$

Για $x_0 = -2$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι:

$$(\varepsilon_2): y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Rightarrow y = 9x + 15$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3 (ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. **Α2.** Θεωρία.

Α3. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Έχει μέγιστο στο 1, το $f(1) = 2$.

Β2. $(-\infty, 2]$

Β3. Μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$h(x) = x\ln x - x + 1,\ x > 0$$

Γ2. Θ. Bolzano και μονοτονία της g.

Γ3. Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ διότι (λόγω και του Γ1 ερωτήματος):

$$f'(x) = \frac{e^x(x\ln x + 1)}{x} \geq \frac{xe^x}{x} = e^x > 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θ. Fermat … $\alpha = 1$.

Δ2. α) $f''(x) > 0, x > -1$.

β) $f'(x) > 0, x \in (-1,1)$ και $f'(x) < 0, x \in [0,+\infty)$

Δ3. $k(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1),\ x \in [1,2]$. Εφαρμόστε Θ. Balzano.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1 (ΛΥΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Θεωρία **.** **β)** Θεωρία . **Α2.** Θεωρία .

Α3. α) Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$\mathrm{E}(\lambda) = \int_e^{\lambda} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_e^{\lambda} \left(\ln x - \frac{e}{x} \right) dx = \int_e^{\lambda} \ln x dx - e(\ln \lambda - 1) =$$

$$= \int_e^{\lambda} (x)' \ln x dx - e(\ln \lambda - 1) = [x \ln x]_e^{\lambda} - \int_e^{\lambda} 1 dx - e(\ln \lambda - 1) =$$

$$= \lambda \ln \lambda - e - (\lambda - e) - e \ln \lambda + e = \lambda \ln \lambda - e - \lambda + e - e \ln \lambda + e = \lambda \ln \lambda - e \ln \lambda + e - \lambda =$$

$$= (\lambda - e) \ln \lambda + (\lambda - e) = (\lambda - e)(\ln \lambda - 1) \text{ τ.μ.}$$

Β2. Είναι : $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \mathrm{E}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} (\lambda - e)(\ln \lambda - 1) = +\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η F είναι μια παράγουσα της f έχουμε:

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{x+1} > 0, \quad \text{για κάθε } x > -1$$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.
Η f είναι παραγωγίσιμη άρα είναι:

$$F''(x) = f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}, \; x > -1$$

Έχουμε:

- $F''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Επομένως η F στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- $F''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. Επομένως η F στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-1, 0)$.
- η F έχει σημείο καμπής το $A(0, F(0))$, δηλαδή το $A(0,1)$.

Γ2. Έχουμε διαδοχικά:

$$F(F(x-2019)) = 1 \Leftrightarrow F(F(x-2019)) = F(0) \Leftrightarrow F(x-2019) = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $F(x-2019) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα. Θέτουμε:

$$g(x) = F(x - 2019), \; x \geq 2020 ,$$

η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού (λαμβάνοντας υπόχη ότι και η F είναι γνησίως αύξουσα) :

$x_1 > x_2 > 0 \Rightarrow x_1 - 2019 > x_2 - 2019 \Rightarrow F(x_1 - 2019) > F(x_2 - 2019) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι :

$g([2020, +\infty)) = \left[g(2020), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \right) = [F(2020 - 2019), +\infty) = [F(1), +\infty) = [0, +\infty)$

που περιέχει το 0 άρα υπάρχει $x_0 \in [2020, +\infty)$ τέτοιο, ώστε :

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow F(x_0 - 2019) = 0$$

Το $x_0 \in (0, +\infty)$ και είναι μοναδικό διότι η g είναι «1-1» στο $(0, +\infty)$.

Γ3. Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού για την F στο διάστημα $[x+1, x+2], \; x > 0$. Έχουμε:

- Η F παραγωγίσμη στο $[x+1, x+2]$, $x>0$ (άρα και συνεχής) αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x+1, x+2)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)} = F(x+2)-F(x+1)$$

Άρα η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται:

$$F'(\xi) > f(x) \Leftrightarrow F'(\xi) > F'(x),\ x>0$$

Η τελευταία σχέση είνα αληθής διότι η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ (η F στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$) και έχουμε:

$$x < x+1 < \xi < x+2 \Rightarrow x < \xi \Rightarrow F'(x) < F'(\xi)$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Θέτουμε $g(x) = f(x) - x + 1,\ x>0$ και για κάθε $x>0$ έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$f(x) \le x-1 \Leftrightarrow f(x)-x+1 \le 0 \Leftrightarrow g(x) \le 0 \Leftrightarrow g(x) \le g(1)$ για κάθε $x>0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (αφού ή f είναι παραγωγίσιμη) και έχει μέγιστο στο $x_0 = 1$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1)-1=0 \Leftrightarrow f'(1)=1$$

Είναι: $f'(x) = \dfrac{a - a\ln x}{\alpha^2 x^2},\ x>0$ και άρα: $f'(1) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha - 0}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Δ2.

α) Για $\alpha = 1$, η σνάρτηση γίνεται $f(x) = \dfrac{\ln x}{x},\ x>0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0 .$$

Άρα:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$, το $f(e) = \dfrac{1}{e}$. Άρα για κάθε $x>0$ έχουμε:

$f(x) \ge f(e) = \dfrac{1}{e}$ και άρα το σύνολο τιμών είναι το $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

β)

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = x^2 + (e^2-e)\ln x - (e^2-e),\ x \in [1, e]$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την h στο διάστημα $[1, e]$ και έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[1, e]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[1, e]$.
- $h(1) = 1 - e^2 + e < 0$
  $h(e) = e^2 > 0$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1,\ e)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^2 + (e^2 - e)\ln\xi - (e^2 - e) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\xi = \frac{\xi^2}{e^2 - e}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 –ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2 (ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχεδιάστε μια γραφική παράσταση συνάρτησης με πεδίο ορισμού το στηριζόμενοι στην έννοια του εμβαδού (μπορείτε π.χ. να κατασκευάσετε τρίγωνο κάτω από τον οριζόντιο άξονα του οποίου το εμβαδόν θα είναι 2).

Α2. Θεωρία **Α3. α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Έχει μέγιστο στο $x_0 = e$, το $f(e) = \frac{1}{e}$.

Β2. Η f είναι κοίλη στο $(0, e^{\frac{3}{2}})$ και κυρτή στο $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$. Εχει σημείο καμπής το $A\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$.

Β3. Για κάθε $x \in (1, e)$ ισχύει:

$$f(x) \le f(e) \Leftrightarrow f(x) \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow e\ln x \le x \Leftrightarrow \ln x^e \le \ln e^x \Leftrightarrow x^e \le e^x$$

Άρα: $\int_1^{e^2} x^e dx \le \int_1^{e^2} e^x dx$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Μελετήστε την μονοτονία και τα ακρότατα της $h(x) = f(x) - g(x), x > 0$

Είναι:

$$h(x) > 0,\ x > 1 \text{ και και } h(x) < 0,\ x < 1$$

Γ2. $E(\lambda) = \int_1^{\lambda} |h(x)|\, dx$ =... Εξετάστε περιπτώσεις για το λ .

Γ3. $-\infty$

Γ4. $+\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lambda = 1$

Δ2. Είναι:

$$f'(x)=\frac{x^2-2\ln x+2}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2},\ x>0\ .$$

Μελετήστε την $h(x)$, $x>0$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. $y=x+3$

Δ4. Μελετήστε πρώτα την κυρτότητα της f προκειμένου να συμπεράνετε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-y=f(x)-(x+3)$ και μετά βρείτε το:

$$E=\int_1^e\left|\left[f(x)-(x+3)\right]\right|dx$$

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1−1», όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: «Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$»

Α2. Το $\int_\alpha^\beta c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta-\alpha$ και ύψος c.

Α3. Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Δηλαδή:

$$\left(f+g\right)'\left(x_0\right)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Α4.**α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού D_f της f έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{x+1}{1-x}>0\\ 1-x\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}(x+1)(1-x)>0\\ x\neq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow -1<x<1$$

Επομένως $D_f=(-1,\ 1)$

Β2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f=(-1,\ 1)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων αφού οι επόμενες συναρτήσεις:

$$g(x)=\frac{x+1}{1-x}$$

$$h(x)=\ln g(x)$$

$$\Phi(x)=2\ln g(x)+3$$

είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού της.

Β3. Έστω $x_1, x_2 \in D_f=(-1,\ 1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ Θα αποδείξουμε ότι $x_1=x_2$

Έχουμε:

$$f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) \Leftrightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3 = 2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3 \Leftrightarrow \ln\frac{x_1+1}{1-x_1} = \ln\frac{x_2+1}{1-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1} = \frac{x_2+1}{1-x_2} \Leftrightarrow \left(x_1+1\right)\left(1-x_2\right) = \left(1-x_1\right)\left(x_2+1\right) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f αντιστέφεται.

Για την αντίστροφή της έχουμε:

$$y = f\left(x\right) \Leftrightarrow y = 2\ln\frac{x+1}{1-x}+3 \Leftrightarrow 2\ln\frac{x+1}{1-x} = y-3 \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{1-x} = \frac{y-3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x} = e^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \left(1-x\right)e^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow x+1 = e^{\frac{y-3}{2}} - xe^{\frac{y-3}{2}} \Leftrightarrow x + xe^{\frac{y-3}{2}} = e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \Leftrightarrow x\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right) = e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{y-3}{2}}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 < \frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} < 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} < 1 \\ \\ -1 < \dfrac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{\left(1+e^{\frac{y-3}{2}}\right)} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} e^{\frac{y-3}{2}} - 1 < 1 + e^{\frac{y-3}{2}} \\ -1 - e^{\frac{y-3}{2}} < e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \end{array}\right)$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι αληθείς για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$f^{-1}\left(x\right) = \frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{1+e^{\frac{x-3}{2}}},\ x \in \mathbb{R}$$

Η $f^{-1}\left(x\right)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο και σύνθεση των επόμενων συνεχών συναρήσεων:

$$f_1\left(x\right) = e^{\frac{x-3}{2}},\ f_2\left(x\right) = \frac{e^x-1}{1+e^x}$$

Β4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right) = \lim_{u\to\infty}(2u+3) = +\infty \ \left(u = \frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{1-x} = +\infty\right)$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\right) = \lim_{u\to 0^+}\left(2\ln u+3\right) = -\infty$$

$$\left(u=\frac{x+1}{1-x},\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{1-x}=0\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}, & \text{αν } x>0 \text{ και } x\neq 1\\ \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)}, & \text{αν } x<0\\ \kappa, & \text{αν } x=1\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Για το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ έχουμε:

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} = 0$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x^2+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = e\cdot(-1) = -e$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$.

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln(-x)} = 0$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[e^{-x^2+1}(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x^2+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = e\cdot(-1) = -e$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\ln(-x)\right) = -\infty$

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Η συνάρτηση f ίναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0,\ 1\}$ ώς πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Τέλος για να είναι η f συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_1=1$.

Έχουμε, σύμφωνα με τον κανόνα του de L΄ Hospital:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\left[e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right)x\right] = 1$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$

Γ2. α) Η συνάρτηση: $g(x) = f(x)\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $x>0$ γίνεται διαδοχικά:

Για $x=1$ έχουμε $g(1)=f(1)\cdot\ln 1=0$ και

$$g(x)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}\left(\ln 1-\ln x^2\right)=\frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln x}(-2\ln x)=-2e^{-x^2+1}(x-1)$$

Επομένως θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης:

$$g(x)=-2e^{-x^2+1}(x-1),\ x>0$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=-2\left[-2x(x-1)e^{-x^2+1}+e^{-x^2+1}\right]=-2e^{-x^2+1}\left(-2x^2+2x+1\right),\ x>0$$

Επειδή $-2e^{-x^2+1}<0,$ για $x>0$ το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $-2x^2+2x+1$.

Ο πίνακας προσήμου της $g'(x)$ είναι ο επόμενος:

x	0 $\qquad$ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	↘	↗

Επομένως η συνάρτηση g είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$

β) Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της $g'(x)$ του ερωτήματος (i) η συνάρτηση g έχει ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ το $g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)$

Επομένως για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$g(x)\geq g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow -2e^{-x^2+1}(x-1)\geq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow e^{-x^2+1}(x-1)\leq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

Άρα:

- Για $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}$$

- Για $x-1<0\ \kappa\alpha\iota\ x>0 \Leftrightarrow 0<x<1$ έχουμε:

$$e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)}$$

Γ3. α) Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ή αλλιώς η $g(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x)=-4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right)=-4e^{-x^2+1}\left(2x^3-2x^2-3x+1\right)=-4e^{-x^2+1}\left(x+1\right)\left(2x^2-4x+1\right),\ x>0$$

Επειδή $-4e^{-x^2+1}<0\ \gamma\iota\alpha\ x>0$ και $x+1>0$ το πρόσημο της $g''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $2x^2-4x+1$

Ο πίνακας του προσήμου της $g''(x)$ είναι ο επόμενος:

0 $\qquad \frac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$+\infty$

x			
$g''(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Επομένως η συνάρτηση g :

- Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left(0,\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$
- Είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$
- Είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$
- Τα σημεία καμπής της είναι το $A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, g\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το

$A\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}e^{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}\right)$ και το $B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ g\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ή το

$$B\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}e^{-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}\right)$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(2,\ g(2)\right)$ είναι:

$$y-g\left(2\right)=g'\left(2\right)\left(x-2\right)\Leftrightarrow y+2e^{-3}=6e^{-3}\left(x-2\right)\Leftrightarrow y=6e^{-3}x-14e^{-3}$$

Επειδή η g είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο διάστημα $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ θα είναι:

$$y\geq g\left(x\right)\Leftrightarrow 6e^{-3}x-14e^{-3}\geq -2e^{-x^2+1}\left(x-1\right)\Leftrightarrow -3e^{-3}x+7e^{-3}\leq e^{-x^2+1}\left(x-1\right)\Leftrightarrow$$

$$e^{-4}\left(-3x+7\right)\leq e^{-x^2}\left(x-1\right)$$

, για κάθε $x\in\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο

$B\left(1,\ g(1)\right)$ είναι:

$$y-g\left(1\right)=g'\left(1\right)\left(x-1\right)\Leftrightarrow y=-2\left(x-1\right)$$

Επειδή η g είναι κυρτή (στέφει τα κοίλα άνω) στο διάστημα $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)\subset\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ θα είναι:

$$y\leq g\left(x\right)\Leftrightarrow -2\left(x-1\right)\leq -2e^{-x^2+1}\left(x-1\right)\Leftrightarrow x-1\geq e^{-x^2+1}\left(x-1\right)\Leftrightarrow 1\leq e^{-x^2+1}\Leftrightarrow e^{-x^2}\geq e^{-1}$$

,

για κάθε $x<1$ αφού $x-1<0$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ το 1ο μέλος της δοθείσας σχέσης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), όπως προφανώς παραγωγίσιμη είναι η συνάρτηση του 2ου μέλους. Παραγωγίζοντας[1] λοιπόν τα μέλη της δοθείσας σχέσης έχουμε διαδοχικά (όχι ισοδύναμα):

$$e^{f(x)}(f^2(x)-2f(x)+3)=x$$

$$e^{f(x)}f'(x)[f^2(x)-2f(x)+3]+e^{f(x)}[2f(x)f'(x)-2f'(x)]=1$$

$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x)-2f(x)f'(x)+3f'(x)+2f(x)f'(x)-2f'(x)]=1$$

$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x)+f'(x)]=1\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x)+1)=1$$

$$f'(x)=\frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1}>0, x\in(0,\infty)$$

[1] Μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την παραγωγισιμότητα της f με ιδιότητες της ισότητας.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$ άρα είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη.
Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης θέτουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \text{ με } x\in A=(0,\infty) \text{ και } y\in f(A)=\mathbb{R}$$

Άρα, θα έχουμε από την δοθείσα σχέση:

$$e^{y}(y^{2}-2y+3)=f^{-1}(y), y\in\mathbb{R} \text{ ή } f^{-1}(x)=e^{x}(x^{2}-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$$

Δ2. Η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x)=e^{x}(x^{2}-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=e^{x}(x^{2}-2x+3)+e^{x}(2x-2)=e^{x}(x^{2}+1),\ x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $\left(f^{-1}(x)\right)'$ είναι επίσης παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\left(f^{-1}(x)\right)''=e^{x}(x^{2}+1)+2xe^{x}=e^{x}(x+1)^{2},\ x\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή:

$$\left(f^{-1}(x)\right)''>0,\ x\in\left(-\infty,-1\right) \ \kappa\alpha\iota\ x\in\left(-1,\ -\infty\right)$$

που σημαίνει ότι η $f^{-1}(x)$ είναι κυρτή στο $\left(-\infty,-1\right]$ και στο $\left[-1,+\infty\right)$ (δηλαδή στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$).
Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $x=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=3$ δηλαδή στο σημείο $A(0,3)$. Αν θέσουμε $g(x)=f^{-1}(x),\ x\in\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο A είναι :

$$y-3=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+3 \ \ (g'(0)=(f^{-1})'(0)=3$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1\left|f^{-1}(x)-(x+3)\right|dx=\int_0^1[e^{x}(x^{2}-2x+3)-x-3]dx=$$

$$=\int_0^1 x^{2}e^{x}dx-2\int_0^1 xe^{x}dx+3\int_0^1 e^{x}-[\frac{x^{2}}{2}]_0^1-3[x]_0^1=4e-\frac{21}{2}\tau.\mu$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f^{-1} είναι κυρτή δηλαδή ότι: $f^{-1}(x)\geq x+3,\ x\in\mathbb{R}$ άρα

$$f^{-1}\left(x\right)-\left(x+3\right)\geq 0,\ x\in\left(0.1\right)$$

Δ3. α)[2] Έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^{-f(x)}}{f^{2}(x)+1},\ x\in\left(0,\infty\right) \text{ και } \left(f^{-1}(x)\right)'=e^{x}(x^{2}+1),\ x\in\mathbb{R}$$

[2]Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και γενικότερα αφού: $f(f^{-1}(x))=x, x\in D_{f^{-1}}$ και παραγωγίζοντας τα μέλη της έχουμε $f'(f^{-1}(x))\cdot[f^{-1}(x)]'=1$.
Επίσης τα σημεία $A(x,\ f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x),x)$ είναι συμμετρικά ως προς την $y=x$.

$$f'(f^{-1}(x)=\frac{e^{-f(f^{-1}(x))}}{[f(f^{-1}(x))]^2+1}=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$$

Άρα :

$$f'(f^{-1}(x))\cdot[f^{-1}(x)]'=\frac{e^{-x}}{x^2+1}\cdot e^x(x^2+1)=1$$

β) Η απόσταση των σημείων A και B είναι :

$$(\mathrm{AB})^2=2(x-f^{-1}(x))^2,\ x\in\mathbb{R}$$

$$(\mathrm{AB})=\sqrt{2}\left|x-f^{-1}(x)\right|,\ x\in\mathbb{R}$$

$$(\mathrm{AB})=\sqrt{2}(f^{-1}(x)-x),\ x\in\mathbb{R}$$

(Χρησιμοποιήσαμε $f^{-1}(x)\geq x+3>x,\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow f^{-1}(x)-x>0$.

Αν θέσουμε :

$$h(x)=\sqrt{2}(f^{-1}(x)-x)=\sqrt{2}[e^x(x^2-2x+3)-x],x\in\mathbb{R}$$

θα έχουμε ότι η $h(x)$ είναι παραγωγίσμη (ως πράξεις παραγωγίσμων) με:

$$h'(x)=\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1],x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ μοναδικό,}$$

διότι η συνάρτηση: $\varphi(x)=e^x(x^2+1)-1$, $x\in\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αφού η $\varphi'(x)=e^x(x+1)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και άρα γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε:

- Είναι:

$$x<0\Rightarrow\varphi(x)<\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)<0\Rightarrow e^x(x^2+1)-1<0$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]<0$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

- Είναι:

$$x>0\Rightarrow\varphi(x)>\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x(x^2+1)-1>0\Rightarrow\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]>0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και επομένως η συνάρτηση $h(x)$ (μπορεί να φανεί πιο καθαρά από τον πίνακα προσήμου της $h'(x)$) έχει ελάχιστο στο $x_0=0$, το $h(0)=\sqrt{2}(f^{-1}(0))=3\sqrt{2}$ δηλαδή $(AB)_{\min}=3\sqrt{2}$.

2$^{\text{ο}}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση **ή** παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x)\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x \in \Delta\ .$$

Α2.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ.
Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta \ \text{ και }\ f(x) \le f(x_0)\text{, για κάθε } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta). \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$

Α3. **α.** Σωστό. **β.** Λάθος. **γ.** Σωστό. **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει να ισχύει: $e^x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge \ln 2$. Επομένως $D_f = [\ln 2,\ +\infty)$

Β2. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f. Εχουμε διαδοχικά:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1}-2} < \sqrt{e^{x_2}-2} \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}+3 < \sqrt{e^{x_2}-2}+3$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, \ +\infty)$.

<u>Σημείωση:</u> Μπορεί, πιο εύκολα, η μονοτονία της συνάρτησης f να προκύψει και ως εξής:

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 2}}, \ x > \ln 2 \ .$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, \ +\infty)$.

Έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[f(\ln 2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ με:

$$f(\ln 2) = 3, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(4\sqrt{e^x - 2} + 3\right) = +\infty \ ,$$

δηλαδή το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[3, \ +\infty)$.

Η f δεν έχει ρίζες αφού $f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in [\ln 2, \ +\infty)$.

Β3. Για κάθε $y \in [3, \ +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{4} = \sqrt{e^x - 2} \Leftrightarrow \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 = e^x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow x = \ln\left[\left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2\right]$$

Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \ln\left[\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 2\right], \ x \in [3, \ +\infty)$$

Β4. Η συνάρτηση g είναι άρτια , αφού:

$$g(x) = g(-x) = \frac{1}{x^2} + 2 \text{ , για κάθε } \ x \in \mathbb{R}^* \ .$$

Επομένως η g δεν είναι αντστρέψιμη.

Β4. Για το πεδίο ορισμού της fog έχουμε:

$$D_{fog} = \left\{ x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \ / \ \frac{1}{x^2} + 2 \geq \ln 2 \right\} = \mathbb{R}^*$$

(αφού $\frac{1}{x^2} + 2 > 1, \ \ln 2 < 1$ είναι πάντα αληθείς)

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$\left(fog\right)(x) = f\left(g(x)\right) = 4\sqrt{e^{\frac{1}{x^2}+3} - 2} + 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε αφού $x>0$:

$$2x\ln x+\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow 2x^2\ln x+1>0\ ,$$

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=2x^2\ln x+1,\ x>0\ ,$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$g'(x)=4x\ln x+2x=2x\cdot(2\ln x+1)$$

και έχουμε ($x>0$):

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x\ln x+2x=2x\cdot(2\ln x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

και

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow 2x\cdot(2\ln x+1)>0 \Leftrightarrow \ln x>-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow 2x\cdot(2\ln x+1)<0 \Leftrightarrow \ln x<-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},\ +\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{e-1}{e}>0\ .$$

Επομένως:

$$g(x)\geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{e-1}{e}>0 \text{ για κάθε } x>0\ ,$$

άρα αποδείξαμε ότι: $2x\ln x+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

Γ2. Έχουμε:

Η f είναι και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$f'(x)=\left[(x^2+1)\cdot\ln x\right]'=2x\ln x+x+\frac{1}{x}=x+\left(2x\ln x+\frac{1}{x}\right)>0$$

αφού: $x>0$ και $2x\ln x+\frac{1}{x}>0$ από το προηγούμενο ερώτημα. Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$.

Επίσης το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=0$, η οποία λόγω της μονοτονίας της f είναι και μοναδική.

Γ3. Έχουμε:

Η f' είναι και παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$\left(2x\ln x + x + \frac{1}{x}\right)' = 2\ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2},\ x>0$$

και $f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^3} > 0$, για κάθε $x>0$.

Αφού $f^{(3)}(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης:

$f''\left(\dfrac{1}{e}\right) = 1-e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{e},\ 1\right]$,

υπάρχει, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\dfrac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε

$f''(x_0)=0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε:

$$0 < x < x_0 \Leftrightarrow f''(x) < f(x_0) = 0$$

και

$$x > x_0 \Leftrightarrow f''(x) > f(x_0) = 0$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A(x_0,\ f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ4. α) Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\ln x = +\infty$

Άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x^2+1)\cdot\ln x = -\infty,$$

αφού:

$$\lim_{x\to0^+}(x^2+1)=1 \text{ και } \lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty .$$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{e}|f(x)|dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx + \int_1^e f(x)dx = -I_1 + I_2$, όπου $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx$ και

$$I_2 = \int_1^e f(x)dx$$

αφού , επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\frac{1}{e} < x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$$

Έχουμε:

$$I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot \ln x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)' \ln x dx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx = \frac{1}{3e^3}+\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3e^3}+\frac{1}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9} = \frac{4}{9e^3}+\frac{2}{e}-\frac{10}{9}$$

$$I_2 = \int_1^e\left(x^2+1\right)\cdot\ln x dx = \int_1^e\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x dx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x\right)dx = \frac{e^3}{3}+e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx =$$

$$= \frac{e^3}{3}+e-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - \left[x\right]_1^e = \frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}+\frac{10}{9} = \frac{2e^3}{9}+\frac{20}{9}-\frac{4}{9e^3}-\frac{2}{e}\ \ \tau.\mu$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right) = f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x = f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x f'(x)-e^x\right)' = \left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x = xf'(x)+c \ (1)$$

Για $x=0$ είναι $0-1=0+c \Leftrightarrow c=-1$. Επομένως από την σχέση (1) έχουμε:

$$e^x f'(x)-e^x = xf'(x)-1 \Leftrightarrow e^x f'(x)-xf'(x) = e^x-1 \Leftrightarrow \left(e^x-x\right)f'(x) = e^x-1,\ x\in\mathbb{R}\ \ (2)$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$h(x) = e^x - x,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x\in\mathbb{R}$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x\in\mathbb{R}$) με $h'(x) = e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)$ είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$ είναι :

- Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Επομένως η $h(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, δηλαδή: $h(x) \geq h(0) = 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, \; x \in \mathbb{R} \; .$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\left(e^x - x\right)'}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\ln\left|e^x - x\right|\right)' \Leftrightarrow f(x) = \ln\left|e^x - x\right| + c_1, \; x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $0 = 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$. Επομένως από την σχέση (2) έχουμε:

$$f(x) = \ln\left|e^x - x\right| \qquad \text{ή} \qquad (x) = \ln\left(e^x - x\right), \; x \in \mathbb{R} \, ,$$

αφού $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, \; x \in \mathbb{R} \; .$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$ (επειδή η f είναι και συνεχής στο 0).
Δ3. Η f' είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f''(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}, \; x \in \mathbb{R} \; .$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $(2 - x)e^x - 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση:

$$K(x)=(2-x)e^{x}-1,\ x\in\mathbb{R}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$K'(x)=-e^{x}+(2-x)e^{x}=e^{x}\left(1-x\right),\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Έχουμε:

$$K'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

$$K'(x)>0\Leftrightarrow x<1$$

$$K'(x)<0\Leftrightarrow x>1$$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\ 1\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1,\ +\infty\right)$. Έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_1=1$ το $K(1)=e-1>0$.

Θα βρούμε τις εικόνες $K\left((-\infty,1]\right)$, $K\left([1,+\infty)\right)$. Έχουμε:

$$K\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}K(x),\ K(1)\right]=\left(-1,\ e-1\right]$$

$$K\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}K(x),\ K(1)\right]=\left(-\infty,e-1\right]$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty}K(x)=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}K(x)=-\infty$$

Επειδή $0\in\left(-1,\ e-1\right]$ και $0\in\left(-\infty,e-1\right]$ η $K(x)$ έχει μία ρίζα ξ_1 στο $(-\infty,1]$ και μία ρίζα ξ_2 στο $[1,+\infty)$, οι οποίες είναι μοναδικές, επειδή η $K(x)$ είναι «1-1» στα διαστήματα αυτά (ως γνησίως μονότονη στα διαστήματα $\left(-\infty,\ 1\right]$ και $[1,+\infty)$ αντίστοιχα). Για να αποδείξουμε όμως ότι τα σημεία $A\left(\xi_1,\ f(\xi_1)\right)$ και $B\left(\xi_2,\ f(\xi_2)\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f πρέπει να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ (ισοδύναμα η $K(x)$) αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ξ_1,ξ_2 . Έχουμε:

$$1>x>\xi_1\Rightarrow K(x)>K(\xi_1)\Rightarrow K(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$$

$$x<\xi_1\Rightarrow K(x)<K(\xi_1)\Rightarrow K(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$$

$$x>\xi_2\Rightarrow K(x)<K(\xi_2)\Rightarrow K(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$$

$$1<x<\xi_2\Rightarrow K(x)>K(\xi_2)\Rightarrow K(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$$

Επομένως η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής τα $\xi_1\in\left(-\infty,\ 1\right]$ και $\xi_2\in\left[1,\ +\infty\right)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = \ln\left(e^x - x\right) - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- $h(0) = -1 < 0$
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ (διότι $\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f\left(0\right) = 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$). Άρα $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.
- Επομένως υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x_0} - x_0\right) - \sigma\upsilon\nu x_0 .$$

Για τη μοναδικότητα του x_0 θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη (ή «1-1» με τον ορισμό). Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$h'(x) = f'(x) + \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R} .$$

Είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, διότι είναι $f'(x) > 0$ και $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Δ5. Έχουμε:

$$I = \int_0^1 \left(e^x - 1\right)\frac{f(x)}{e^x - x}dx = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x}\cdot f(x)dx = \int_0^1 f'(x)\cdot f(x)dx =$$

$$= \left[\, f(x)\, f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\cdot f'(x)dx$$

Επομένως:

$$I = f^2(1) - f^2(0) - I \Leftrightarrow 2I = \ln^2\left(e-1\right) \Leftrightarrow I = \frac{\ln^2\left(e-1\right)}{2}$$

3^o ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου
Α3. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $3e^x+1>0$,που αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι $D_f=\mathbb{R}$.

Β2. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}<3e^{x_2}\Rightarrow 3e^{x_1}+1<3e^{x_2}+1\Rightarrow \ln(3e^{x_1}+1)<\ln(3e^{x_2}+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(3e^{x_1}+1)-2<\ln(3e^{x_2}+1)-2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε εύκολα ότι $f'(x)=\dfrac{3e^x}{3e^x+1}>0,\ x\in\mathbb{R}$,
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Β3. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y+2=\ln(3e^x+1)\Leftrightarrow e^{y+2}=3e^x+1\Leftrightarrow e^x=\frac{e^{y+2}-1}{3},\quad \frac{e^{y+2}-1}{3}>0$$

Οπότε: $x=\ln\dfrac{e^{y+2}-1}{3},\ y>-2$. Άρα: $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{e^{x+2}-1}{3},\ x>-2$

Β4. Έχουμε:

$$f(x)<f(\ln5-2)-2\Leftrightarrow \ln(3e^x+1)-2<\ln\frac{e^{\ln5}-1}{3}-2\Leftrightarrow \ln(3e^x+1)<\ln\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3e^x+1<\frac{4}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9e^x+3<4\Leftrightarrow 9e^x<1\Leftrightarrow e^x<\frac{1}{9}\Leftrightarrow x<-\ln9$$

Επειδή όμως $x\in(-2,\ +\infty)$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,+\infty)$.

Γ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1},\ f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}$$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f'(0)=0$, άρα

$$-1 < x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \text{, για κάθε } x \in (-1, 0)$$

$$x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{, για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Επιπλέον $f(0) = 0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	-1		0		$+\infty$
f′(x)		-	o	+	
f(x)		↘	0	↗	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Γ2. α. Έχουμε:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left[e^x - \ln(x+1) - 1\right] = +\infty \text{, αφού}$$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \ln(x+1) = \lim\limits_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$, όπου: $\begin{array}{l} u = x+1 \\ x \to -1^+ \Leftrightarrow u \to 0^+ \end{array}$ και $\left[e^x - 1\right] = \dfrac{1}{e} - 1$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1, +\infty)$, μοναδική λύση την $x = 0$, αφού:

$$x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0$$

β. Αναζητούμε τις ασύμπτωτες της f

Κατακόρυφες: Επειδή:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(e^x - \ln(x+1) - 1\right) = +\infty \quad ,$$

η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Οριζόντιες: Η C_f **δεν** έχει οριζόντια ασύμπτωση αφού:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x - \ln(x+1) - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

, διότι είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \left(\frac{0}{0} - D, L\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Πλάγιες: Επειδή:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\ln\left(x+1\right)-1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right) = \left(+\infty\right)\cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right) = 1-0-0 = 1$$

Η C_f **δεν** έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Γ3. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2a+\beta-1}-\ln(2a+\beta)+e^{a+2\beta-2}-\ln(a+2\beta-1)\le 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2a+\beta-1}-\ln\left((2a+\beta-1)+1\right)-1+e^{a+2\beta-2}-\ln\left((a+2\beta-2)+1\right)-1\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(2a+\beta-1)+f(a+2\beta-2)\le 0 \ (1)$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι:

$$f(2a+\beta-1) = f(a+2\beta-2) = 0\ ,\ (2)$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2a+\beta-1)\neq 0$ τότε, επειδή:

$f(x)\ge 0$ για κάθε $x>-1$, θα πρέπει $f(2a+\beta-1)>0$ και η (1) μας δίνει:

$$f(a+2\beta-2)\le -f(2a+\beta-1)<0 \Rightarrow f(a+2\beta-2)<0$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f(2a+\beta-1)=0$ (2) οπότε από την (1) και $f(a+2\beta-2)=0$.

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases}2a+\beta-1=0\\ a+2\beta-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}.$$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}\left(\Omega\right) = \int_0^1\left|f(x)\right|dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\left(e^x-\ln\left(x+1\right)-1\right)dx =$$

$$= \int_0^1 e^x dx - \int_0^1\ln\left(x+1\right)dx - \int_0^1 1dx = \left[e^x\right]_0^1 - \left[x\ln(x+1)\right]_0^1 + \int_0^1\frac{x}{x+1}dx - \left[x\right]_0^1 =$$

$$= e-1-\ln 2+I-1 = e-2-\ln 2+I$$

$$I = \int_0^1\frac{x}{x+1}dx = \int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1\frac{1}{x+1}dx = \left[x\right]_0^1 - \left[\ln\left(x+1\right)\right]_0^1 = 1-\ln 2$$

Επομένως: $\mathrm{E}\left(\Omega\right) = e-2-\ln 2+1-\ln 2 = e-1-2\ln 2\ \tau.\mu$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+x\ln x}{x\ln x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x\ln x}+1 \Leftrightarrow \ln\left|f(x)\right| = \left[\ln(\ln x)\right]' + \left(x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\ln\left|f(x)\right|\right]' = \left[\ln(\ln x)+x\right]' \Leftrightarrow \ln\left|f(x)\right| = \ln(\ln x)+x+c$$

Για $x=e$ έχουμε:

$$\ln\left|f(e)\right| = \ln(\ln e)+e+c \Rightarrow \ln e^{e} = e+c \Rightarrow e=e+c \Rightarrow c=0$$

Επομένως:

$$\ln\left|f(x)\right| = \ln(\ln x)+x \ (1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ (ως παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$) και δεν έχει ρίζες αφού $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$, η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,\ +\infty)$ και αφού $f(e)=e^{e}>0$ θα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Άρα από την σχέση (1) έχουμε:

$$\ln f(x)=\ln(\ln x)+x \Leftrightarrow \ln f(x)=\ln(\ln x)+\ln e^{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x)=\ln\left(e^{x}\cdot\ln x\right) \Leftrightarrow f(x)=e^{x}\cdot\ln x,\ x>1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x)=e^{x},\ h(x)=\ln x$$

δεν έχουν κοινό σημείο, δηλαδή ότι η εξίσωση:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow e^{x}=\ln x \Leftrightarrow e^{x}-\ln x=0 \quad \text{δεν έχει ρίζα στο } (1,\ +\infty)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$K(x)=e^{x}-\ln x,\ x\geq 1\ ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμηστο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με:

$$K'(x)=e^{x}-\frac{1}{x},\ x\geq 1\ .$$

Η συνάρτηση $K'(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1,\ +\infty)$) με:

$$K''(x)=e^{x}+\frac{1}{x^{2}}>0,\ x\geq 1\ .$$

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$. Άρα:

$$x>1\Rightarrow K'(x)>K'(1)=e-1\Rightarrow K'(x)>0,\ x>1$$

Επομένως η συνάρτηση $K(x)$ είναι είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$. Άρα:

$$x>1\Rightarrow K(x)>K(1)=e>0\Rightarrow K(x)>0,\ x>1$$

Οπότε η συνάρτηση $K(x)$ δεν έχει ρίζα στο $(1,\ +\infty)$, δηλαδή ισοδύναμα οι συναρτήσεις $g(x)=e^{x},\ h(x)=\ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1,\ +\infty)$.

Δ2. α) Η συνάρτηση:

$$f(x)=e^{x}\cdot\ln x,\ x>1$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο

$\left(1,\ +\infty\right)$) με:

$$f'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}>0\ \text{, για κάθε}\ \ x>1$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα $\left(1,\ +\infty\right)$. Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right),$$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα $\left(1,\ +\infty\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$$

Αρα: $f\left((1,\ +\infty)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$

β) Έχουμε:

$$f(x)=\frac{\lambda}{x}\Leftrightarrow xf(x)=\lambda\Leftrightarrow\varphi(x)=\lambda\ ,\quad x>1\ ,$$

όπου $\varphi(x)=xf(x),\ x>1$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1,\ +\infty\right)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(1,\ +\infty\right)$) με:

$$\varphi'(x)=f(x)+xf'(x)=e^x\ln x+x\left(e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)=,$$

$$=e^x\ln x+xe^x\ln x+e^x=e^x\left(\ln x+x\ln x+1\right)>0$$

για κάθε $x\in\left(1,\ +\infty\right)$.

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(1,\ +\infty\right)$ και επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$\varphi\left((1,\ +\infty)\right)=\left(\lim_{x\to1^+}\varphi(x),\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=\left(0,\ +\infty\right)$$

, αφού:

$$\lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to1^+}\left(xf(x)\right)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=+\infty$$

Άρα:

- Αν $\lambda\le0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ δεν έχει ρίζα στο $\left(1,\ +\infty\right)$
- Αν $\lambda>0$ η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(1,\ +\infty\right)$, αφού είναι «1-1» στο $\left(1,\ +\infty\right)$ (ως γνησίως αύξουσα στο $\left(1,\ +\infty\right)$).

Δ3. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1,\ +\infty\right)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(1,\ +\infty\right)$) με:

$$f''(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} = e^x \ln x + 2e^x \cdot \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} =$$

$$e^x\left(\ln x + 2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = e^x\left(\frac{x^2 \ln x + 2x - 1}{x^2}\right) > 0,\ x > 1$$

Αφού για κάθε $x \in (1,\ +\infty)$ είναι :

$$e^x > 0$$

$$x^2 > 0$$

$$x^2 \ln x + 2x - 1 > 0\left(x^2 \ln x > 0,\ 2x - 1 > 0\right)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(e,\ f(e)\right)$ είναι:

$$y - e^e = \left(e^e + e^{e-1}\right)(x - e) \Leftrightarrow y = \left(e^e + e^{e-1}\right)x - e^{e+1} - e^e + e^e \Leftrightarrow y = \left(e^e + e^{e-1}\right)x - e^{e+1}$$

, αφού $f'(e) = e^e + e^{e-1}$

Δ4. α) Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (στο σημείο επαφής Α ιχύει η ισότητα). Επομένως θα έχουμε:

,

Για κάθε $x > 1$:

$$f(x) \geq \left(e^e + e^{e-1}\right)x - e^{e+1} \Leftrightarrow f(x) \geq e^{e-1}(e+1)x - e^{e+1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (e+1)x - \frac{e^{e+1}}{e^{e-1}} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (e+1)x - e^2$$

β) Ολοκληρώνοντας[3] την προηγούμενη ανισοισότητα έχουμε:

$$\int_2^3 \frac{f(x)}{e^{e-1}}dx \geq \int_2^3 \left[(e+1)x - e^2\right]dx \Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \geq (e+1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 - e^2\left[x\right]_2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \geq (e+1)\left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) - e^2(3-2) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \geq \frac{5}{2}(e+1) - e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{e-1}}\int_2^3 f(x)dx \geq \frac{5 + 5e - 2e^2}{2} \Leftrightarrow \int_2^3 f(x)dx \geq e^{e-1} \cdot \frac{5 + 5e - 2e^2}{2}$$

Δ5. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1,\ +\infty)$ (προηγούμενο ερώτημα) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\ +\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $\left[x_1,\ \frac{x_1 + x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1 + x_2}{2},\ x_2\right]$, αντίστοιχα, αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις (η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στα $\left[x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right]$).

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in \left(x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2},\ x_2\right)$ τέτοια, ώστε:

$$f'\left(\xi_1\right) = 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'\left(\xi_2\right) = 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'\left(\xi_1\right) < f'\left(\xi_2\right) \Rightarrow 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to \beta^-} f(x)=f(\beta)$$

Α2.

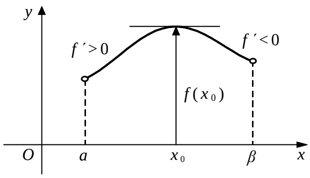
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

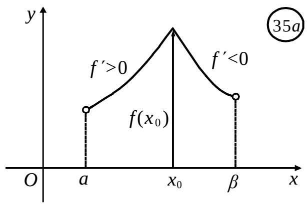
Α3. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0)\ ,\ \text{για κάθε}\quad x\in(\alpha,x_0]\quad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0)\ ,\ \text{για κάθε}\quad x\in[x_0,\beta)\ .\ (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0)\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta)\ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α4.

α. Σωστό (αφού η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\beta]$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$. Επομένως $\int_a^\beta f(x)dx>0$ ή $\int_a^\beta f(x)dx<0$).

β. Λάθος (είναι $(B,\ \mathrm{A})$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα).

γ. Σωστό

δ. Σωστό (αφού η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και χωρίς ρίζες θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι ή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως αύξουσα, ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή γνησίως φθίνουσα).

ε. Σωστό (αν $x_1\in\mathbb{R}$ θέση τοπικού ακροτάτου, τότε από το θεώρημα του Fermat θα είναι

$f'(x_1) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ -οριζόντια εφαπτομένη).

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$. Επομένως:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2+\kappa\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \frac{2+\kappa}{1} = 2+\kappa$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = 4$$

$$f(0) = \lambda$$

Άρα: $\lambda = 4,\ 2+\kappa = 4 \Leftrightarrow \kappa = 2$

Β2. Για $\kappa = 2,\ \lambda = 4$ έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}-3\right) = (+\infty)\cdot\left(\sqrt{8}-3\right) = +\infty$$

Β3. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\cdot\left(2+\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0\cdot 2 = 0$$

αφού τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = 2$

[διότι: $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$] και από το κριτήριο της παρεμβολής είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2$$

Β4. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = f(x) - \ln(8x+1),\ x\in[0,1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ((ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$)

Επίσης:

$$g(0) = f(0) = 4$$

$$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln\frac{e}{9}$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, έχουμε ότι η εξίσωση:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$g'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) - 2\ln x - 1 - 2 =$$
$$= 2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) - 2\ln x - 3 = 0$$,

λόγω της δεδομένης σχέσης. Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x > 0$.

Γ2. Αφού από το ερώτημα Δ1 η συνάρτηση g είναι σταθερή θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $g(x) = c$.

Για $x = 1 \Rightarrow g(1) = c \Rightarrow 2f(1) + f'(1) - 1 = c \Rightarrow c = 0$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) - x\left(2\ln x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) = x\left(2\ln x + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) = 2x\ln x + x \Leftrightarrow \left[x^2 f(x)\right]' = \left[x^2 \ln x\right]' \Leftrightarrow x^2 f(x) = x^2 \ln x + c_1 \ (c_1 \in \mathbb{R})$$

Για $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

Επομένως:

$$x^2 f(x) = x^2 \ln x \Leftrightarrow f(x) = \ln x,\ x > 0$$

Γ3. α). Έστω $A\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης C_f της f με την

εφαπτομένη της (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο Α είναι:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}\left(x - x_0\right)$$

Αφού η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων $0(0,0)$ έχουμε:

$$0-\ln x_0 = \frac{1}{x_0}\left(0-x_0\right) \Leftrightarrow -\ln x_0 = -1 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$y - f(e) = f'(e)\left(x-e\right) \Leftrightarrow y-1 = \frac{1}{e}\left(x-e\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

β) Έχουμε:

$$y(t) = \left(fof\right)(x(t)) = f\left(f(x(t))\right) = \ln\left(\ln(x(t)\right),\ t>0,\ x(t)>1$$

Η συνάρτηση $y(t)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε($t>0$ ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $t>0$) με:

$$y'(t) = \frac{1}{\ln(x(t)}\cdot\left(\ln(x(t)\right)' = \frac{1}{\ln(x(t)}\cdot\frac{1}{x(t)}\cdot x'(t),\ t>0$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ sec είναι:

$$t = t_0 \Rightarrow y'(t_0) = \frac{1}{\ln(x(t_o)}\cdot\frac{1}{x(t_0)}\cdot x'(t_0) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2\ln 2}\ cm/\sec$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = \ln\left(\left|f(x)\right|\right),\ x\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right].$$

Η $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$) με $K'(x) = \frac{1}{x\ln x}$, x $\in\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$.

Η $K'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συνατήσεων στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$) με :

$$K''(x) = \frac{-(1+\ln x)}{x^2\ln^2 x} > 0 \text{, για κάθε } \left(0,\ \frac{1}{e}\right) \text{ (είναι}$$

$$x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0\ \text{)}.$$

Άρα η $K'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$, δηλαδή η Κ είναι κυρτή στο $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στα διαστήματα $\left[a,\ \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ αντίστοιχα αφού:

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[a,\ \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right]$ (άρα και συνεχής σε αυτά). Επομένως, υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(a,\ \frac{a+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{a+\beta}{2},\ \beta\right)$ τέτοια, ώστε:

$$K'(\xi_1) = 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a)}{\beta-\alpha} \quad \text{και} \quad K'(\xi_2) = 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha}.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow K'(\xi_1) < K'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a)}{\beta-\alpha} < 2\frac{K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) - K(a) < K(\beta) - K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < K(a) + K(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right) < \ln|f(a)| + \ln|f(\beta)| \Rightarrow \ln\left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < \ln\left(|f(a)|\cdot|f(\beta)|\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right|\right)^2 < |f(a)|\cdot|f(\beta)| \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{|f(a)|\cdot|f(\beta)|} \Rightarrow \left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{f(a)\cdot f(\beta)}$$

$(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\, f(a) < 0,\ f(\beta) < 0, \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \alpha, \beta \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right))$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0,\ x \in \mathbb{R}\ ,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή είναι «1-1» οπότε η f αντιστρέφεται.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \ge e^5 \cdot x\left(x^4 + x^2 + 1\right) \Leftrightarrow \frac{e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4}}{e^5} \ge x^5 + x^3 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{5(x-1)} + e^{3(x-1)} + e^{x-1} \ge x^5 + x^3 + x \Leftrightarrow f(e^{x-1}) \ge f(x) \Leftrightarrow e^{x-1} \ge x$$

Η τελευταία σχέση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού:

- Για $x > 0$ γίνεται $x - 1 \ge \ln x$ (αληθής με χρήση της εφαρμογής 2,ii) στη σελίδα 266 του σχολικού βιβλίου).
- Για $x \le 0$, είναι προφανής, αφού $e^{x-1} > 0$.

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση: Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = e^{x-1} - x,\ x \in \mathbb{R}$$

και να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της, οπότε αποδυκνείουμε ότι:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Δ2.

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - 1,\ x \in [0,1].$$

- Η συνάρτηση $K(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική).
- $K(0) = f(0) - 1 = -1 < 0$, $K(1) = f(1) - 1 = 2 > 0$, άρα $K(0) \cdot K(1) < 0$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$K(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1.$$

Επειδή η f είναι συνάρτηση «1-1» το x_0 είναι μοναδικό.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x,\ x \in \mathbb{R}$$

και έτσι θέλουμε ισοδύναμα να λύσουμε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(x_0) \quad \text{(I)}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$h'(x) = 12x^5 + 12x^3 + 12x - 1 = 12\left[\left(x^5 + x^3 + x\right) - 1\right] = 12(f(x) - 1),\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = x_0 \in (0,1)$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$$

Επομένως η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = x_0$ και άρα είναι $h(x) \geq h(x_0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

<u>**$2^{ος}$ τρόπος (Δ2 β)**</u>

Έχουμε ισοδύναμα:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0 \Leftrightarrow \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x \geq \frac{x_0^6}{6} + \frac{x_0^4}{4} + \frac{x_0^2}{2} - x_0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R},$$

η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, αφού η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$F'(x) = x^5 + x^3 + x = f(x),\ x \in \mathbb{R}$$

$$F''(x) = f'(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_F της F στο σημείο της $A\left(x_0, F(x_0)\right)$
είναι:

$$y - F(x_0) = F'(x_0)\left(x - x_0\right) \Rightarrow y = F(x_0) + F'(x_0)\left(x - x_0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = F(x_0) + f(x_0)\left(x - x_0\right) \Rightarrow y = F(x_0) + \left(x - x_0\right)$$

Αφού η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$F(x) \geq y \Leftrightarrow F(x) \geq F(x_0) + \left(x - x_0\right) \Leftrightarrow F(x) - x \geq F(x_0) - x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x > \frac{x_0^6}{6} + \frac{x_0^4}{4} + \frac{x_0^2}{2} - x_0,\ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (Ι) είναι το $\mathbb{R}$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\xi_1 + 1,\ \xi_2 + 1\right]$ και επειδή τη f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\xi_1 + 1 \leq t \leq \xi_2 + 1 \Rightarrow f\left(\xi_1 + 1\right) \leq f(t) \leq f\left(\xi_2 + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f\left(\xi_1 + 1\right) dt \leq \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t) dt \leq \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f\left(\xi_2 + 1\right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\xi_1 + 1\right)\left(\xi_2 - \xi_1\right) \leq \int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t) dt \leq f\left(\xi_2 + 1\right)\left(\xi_2 - \xi_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\xi_1 + 1\right) \leq \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t) dt}{\xi_2 - \xi_1} \leq f\left(\xi_2 + 1\right)\ (II)$$

Τώρα έχουμε:

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 \Rightarrow 1 < \xi_1 + 1 < \xi_2 + 1 < 2 \Rightarrow f(1) < f\left(\xi_1 + 1\right) < f\left(\xi_2 + 1\right) < f(2)$$

$$\Rightarrow 3 < f\left(\xi_1 + 1\right) < f\left(\xi_2 + 1\right) < 42\ (III)$$

Επομένως, από τη σχέση (ΙΙ),λόγω της σχέσης (ΙΙΙ) προκύπτει ότι: $3 \leq \dfrac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t) dt}{\xi_2 - \xi_1} \leq 42$

Δ4.

α) Ισχύει ότι $e^{x-1} \geq x,\ x \in \mathbb{R}$ (ερώτημα Δ1,ii). Αν θέσουμε όπου x το $x^2 + 1$ έχουμε:

$$e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{(IV)},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση: $\varphi(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,1\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0,1\right]$) και επίσης δεν είναι παντού μηδέν στο $\left[0,1\right]$.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (IV) έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^1 \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 1 dx \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{4}{3} \Rightarrow 3\int_0^1 e^{x^2} dx > 4$$

β) Θέτουμε $f^{-1}(x) = u$ και έχουμε:

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$
$$dx = f'(u)du$$
$$x = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$
$$x = 1 \Leftrightarrow f(u) = 1 \Leftrightarrow u = x_0$$
$$u \in \left[0, x_0\right] \subseteq \left[0,1\right] \Rightarrow u \geq 0$$

Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^1 \left| f^{-1}(x) \right| dx = \int_0^{x_0} |u| f'(u)du = \int_0^{x_0} u f'(u)du = \int_0^{x_0} u\left(5u^4 + 3u^2 + 1\right)du =$$

$$= \int_0^{x_0} \left(5u^5 + 3u^3 + u\right) du = \left[\frac{5u^6}{6} + \frac{3u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{5x_0^{\,6}}{6} + \frac{3x_0^{\,4}}{4} + \frac{x_0^{\,2}}{2}$$

5ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση και $A\big(x_0,\ f(x_0)\big)$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)\ ,\quad \lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Α2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Α3. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{\left(x-x_0\right)\cdot\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots x_0^{\nu-1}\right)=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$$

Δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$

Α4.

α. Σωστό (πρόταση του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 178)

β. Σωστό (η παράγωγος της f είναι παντού 0 αφού η f είναι σταθερή συνάρτηση, ως ορισμένο ολοκλήρωμα).

γ. Λάθος (όχι σε ένα τουλάχιστον σημείο αλλά σε ένα το πολύ σημείο).

δ. Λάθος (δεν ισχύει υποχρεωτικά, αφού π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ $f'(x)=3x^2\geq 0$, δηλαδή μπορεί και να μηδενίζεται σε κάποια σημεία).

ε. Σωστό[4] (Αν έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=a$ θα είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a\in\mathbb{R}$.

Τότε όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, οπότε ασύμπτωτη είναι πάλι η $y=a$ **)**.

[4] Εδώ προφανώς εννοεί «πλάγια ασύμπτωστη» ευθεία της μορφής $y=ax+\beta$ με $\alpha\neq 0$, όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο .

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η σχέση $\left(fof\right)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε για $x=2$ έχουμε:

$$f(f(2))+2f(2)=2\cdot 2+1\Leftrightarrow f(5)+10=5\Leftrightarrow f(5)=-5$$

Β2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$$

άρα:

$$f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$$

οπότε η f είναι «1-1», και άρα αντιστρέφεται.

Β3. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$$f\left(f(f^{-1}(2))\right)+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow 2f^{-1}(2)=8\Rightarrow f^{-1}(2)=4$$

Β4. Έχουμε:

$$f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2\Leftrightarrow f^{-1}\left(2x^2+7x\right)-1=f^{-1}(2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(2x^2+7x\right)=5\Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5)\Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0\Leftrightarrow\left(x_1=-1 \text{ ή } x_2=-\frac{5}{2}\right)$$

<u>Παρατήρηση:</u> Κανονικά σε τέτοιου είδους ασκήσεις θα πρέπει εξ΄αρχής να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή το σύνολο τιμών της f για να δούμε για ποια x ορίζεται η εξίσωση. Αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Στην προκειμένη περίπτωση είναι $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$f(x)-1\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο $x_1=0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=2x+a-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$f'(0)=0\Leftrightarrow \alpha-1=0\Leftrightarrow \alpha=1$$

<u>Παρατήρηση:</u> Θα πρέπει να επαληθεύσουμε την ευρεθείσα τιμή, αφού το αντίστροφο του Θεώρηματος του Fermat δεν ισχύει. Έχουμε:

Για $\alpha=1$ η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x)=x(x+1)-x+1=x^2+x-x+1=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x)=x^2+1\geq 1=f(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η τιμή $a=1$ είναι δεκτή.

Γ2. Για κάθε $x\in\left(1,\ +\infty\right)$ έχουμε διαδοχικά:

$$g'(x)\ln x = \frac{2g(x)}{x} \Rightarrow g'(x)\ln x - \frac{2g(x)}{x} = 0 \Rightarrow g'(x)\ln^2 x - 2\ln x \cdot \frac{1}{x} g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)\ln^2 x - \left(\ln^2 x\right)' g(x) = 0 \Rightarrow \frac{g'(x)\ln^2 x - \left(\ln^2 x\right)' g(x)}{\ln^4 x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{g(x)}{\ln^2 x}\right)' = 0$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = c\,,\ x \in (1,\ +\infty)$$

Για $x = e$ είναι:

$$x = e \Rightarrow \frac{g(e)}{\ln^2 e} = c \Rightarrow c = -1$$

Επομένως:

$$\frac{g(x)}{\ln^2 x} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -\ln^2 x,\ x \in (1,\ +\infty)$$

Γ3. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 + \ln^2 x,\ x \in (0,\ +\infty)\ ,$$

η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Θα βρούμε το ελάχιστο της $K(x)$.

Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$K'(x) = 2x + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 2\frac{x^2 + \ln x}{x},\ x > 0$$

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = x^2 + \ln x,\ x > 0$$

η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (Οι ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $K(x)$ είναι όμοια με τις ρίζες και το πρόσημο αντίστοιχα της συνάρτησης $\Phi(x)$).

Η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$(ώς άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με $\Phi'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$. Άρα η συνάρτηση $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και στο διάστημα $(0,1)$, οπότε:

$$\Phi\left((0,1)\right) = \left(\lim_{x\to 0^+}\Phi(x),\ \lim_{x\to 1^-}\Phi(x)\right) = (-\infty,1)\ ,\ \text{αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\Phi(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 + \ln x\right) = -\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 + \ln x\right) = 1$$

Επειδή $0 \in (-\infty,1) = \Phi\left((0,1)\right)$ υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο,

ώστε $\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow K'(x_0) = 0$.

Έχουμε:

$$x > x_0 \Rightarrow \Phi(x) > \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) > 0 \Leftrightarrow K'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Rightarrow \Phi(x) < \Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x) < 0 \Leftrightarrow K'(x) < 0$$

Άρα η συνάρτηση $K(x)$ είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,\ x_0]$ (στο x_0 είναι συνεχής) και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[x_0, +\infty\right)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης Κ φαίνονται στον επόμενο πίνακα μεταβολών.

0	x_0	$+\infty$
Κ΄(x)	-	+
Κ(x)	↓	↑

Ολ. Ελ

Επομένως, η συνάρτηση:
παρουσιάζει ένα μόνο ελάχιστο (ολικό) στο $x_0 \in \left(0,1\right)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left(0,\ +\infty\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = g'(\xi).$$

Η συνάρτηση $K(x) = f(x) - g(x)$ έχει ακρότατο στο $x_0 \in \left(0,1\right)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0,1\right)$) με:

$$K'(x) = f'(x) - g'(x)\ ,\ x \in \left(0,1\right).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα είναι:

$$K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$$

Το $x_0 = \xi$ είναι μοναδικό, ως μοναδική ρίζα της συνάρτησης Φ του ερωτήματος (Γ3α) (αφού η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,1\right)$), άρα και μοναδική ρίζα της συνάρτησης K'
.

Γ4. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$I = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\left(x-1\right)^x}{\eta\mu\left(x-1\right) + \dfrac{g(x)}{f(x)}}\right] = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\left(x-1\right)^x}{\eta\mu\left(x-1\right) - \dfrac{\ln^2 x}{x^2+1}}\right] = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\dfrac{\left(x-1\right)^x}{x-1}}{\dfrac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1} - \dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\left(x-1\right)^{x-1}}{\dfrac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1} - \dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}\right]$$

Θα βρούμε ξεχωριστά τα παραπάνω όρια. Με χρήση του κανόνα του de l’ Hospital για τα παραπάνω όρια έχουμε:

Επομένως:

$$I=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\eta\mu\left(x-1\right)}{x-1}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}}=\frac{1}{1-0}=1$$

β) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι:

$$\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\int_1^e\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_1^e\left|K(x)\right|dx=\int_1^e K(x)dx=\int_1^e\left(x^2+1+\ln^2 x\right)dx=$$

$$=\int_1^e x^2dx+\int_1^e 1dx+\int_1^e\ln^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e+\left[x\right]_1^e+J=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}+e-1+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+J\ \ (V)$$

, όπου $J=\int_1^e\ln^2 xdx$. Τώρα για το J έχουμε:

$$u_0=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}}=-\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}=\lim_{u\to u_0}e^u=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu\left(x-1\right)^{x-1}}{x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\ (\acute{o}\pi o\upsilon\ u=x-1,\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ x\to 1\Leftrightarrow u\to 0)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln^2 x}{(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln^2 x}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\frac{1}{x}\ln x}{3x^2-2x+1}=0$$

$$J=\int_1^e\ln^2 xdx=\int_1^e\left(x\right)'\cdot\ln^2 xdx=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=e-2\int_1^e\ln xdx=$$

$$=e-2\int_1^e(x)'\cdot\ln xdx=e-2\left[x\ln x\right]_1^e+2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=e-2e+2\int_1^e 1dx=-e+2\left[x\right]_1^e=-e+2e-2=e-2$$

Επομένως, από τη σχέση (V), έχουμε τελικά:

$$\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\frac{e^3+3e-4}{3}+J=\frac{e^3+3e-4}{3}+e-2=\frac{e^3+3e-4+3e-6}{3}=\frac{e^3+6e-10}{3}$$

, δηλαδή $\mathrm{E}\left(\Omega\right)=\dfrac{e^3+6e-10}{3}$ τ.μ

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αντίστοιχα.

Από την σχέση:

$f(x)+f(1-x)=0$, για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

Άρα ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η $x=\frac{1}{2}$, η οποία είναι μοναδική διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».

Δ2. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ και
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, στο διάστημα $[0,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_0)=f(1)-f(0) \Leftrightarrow f'(x_0)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f'(x_0)=2f(1)$$

(γιατί για $x=1$ από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$ έχουμε
$f(1)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=-f(1)$).

<u>2^ος τρόπος:</u> Αποδεικνύεται και με την εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle για την συνάρτηση:

$$K(x)=f(x)-2f(1)x,\ x\in[0,1],$$

αφού στο διάστημα $[0,1]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

Δ3. Για το σημείο $A(x_1,\ g(x_1))$ στο οποίο η g τέμνει τον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$g(x_1)=\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0 \Leftrightarrow f(x_1)=0 \Leftrightarrow f(x_1)=f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2},$$

αφού η f είναι συνάρτηση «1-1». Άρα $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Για να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g, στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0 πρέπει να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη[5] στο $x_0=\frac{1}{2}$ με $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$. Έχουμε:

---

[5] Η παραγώγιση της συνάρτησης g γενικά από τον τύπο της δεν είναι δυνατή, αφού αυτό απαιτεί η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, το οποίο όμως δεν είναι δεδομένο αλλά ούτε προκύπτει ως συνέπεια των δεδομένων.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{f'(x)}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Αφού: $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(f' \text{ συνεχής στο } \frac{1}{2}\right)$ και $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$,

δηλαδή $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$

Επομένως, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1 \Leftrightarrow \omega=45^0$

Δ4 α) Έχουμε ότι:

$$f(x)+f(1-x)=0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=0 \Rightarrow I_1+I_2=0 \ (1) \ ,$$

όπου $I_1=\int_0^1 f(x)dx$ και $I_2=\int_0^1 f(1-x)dx$. Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε:

$1-x=u \Leftrightarrow x=1-u$

Θέτουμε: $dx=-du$, $x=1 \Leftrightarrow u=0$, $x=0 \Leftrightarrow u=1$, οπότε έχουμε:

$$I_2=\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(u)du=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx=I_1$$

Επομένως , από τη σχέση (1), έχουμε:

$$I_1+I_2=0 \Leftrightarrow 2I_1=0 \Leftrightarrow I_1=0 \Leftrightarrow I_1=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=0$$

β) Είναι: $\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1 \ (I)$. Από την σχέση $f(x)+f(1-x)=0$, για $x=1$ έχουμε:

$$f(0)+f(1)=0 \ (II)$$

Από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ), προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$f(0)=-\frac{1}{2} \ \kappa\alpha\iota \ f(1)=\frac{1}{2} \ .$$

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|f^{-1}(x)\right|dx$.

Θέτουμε:

$$f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$$

$$dx=f'(u)du$$

$$x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=f(0) \Leftrightarrow u=0 \quad \text{(αφού η } f \text{ είναι «1-1»)}$$

$$x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=f(1) \Leftrightarrow u=1$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^1|u|\cdot f'(u)du=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-0=\frac{1}{2}$$

δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega)=\frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ5. α) Θέτουμε ξανά:

$$f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$$

$$dx=f'(u)du$$

$$x=0 \Leftrightarrow u=f^{-1}(0) \Leftrightarrow u=\frac{1}{2} \quad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\, f\left(\frac{1}{2}\right)=0)$$

$$x=f(\lambda) \Leftrightarrow u=f^{-1}\left(f(\lambda)\right) \Leftrightarrow u=\lambda$$

και έχουμε:

$$K(\lambda)=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx+\int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} uf'(u)du=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx+\left[uf(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{\lambda}-\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(u)du=\lambda f(\lambda)-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\lambda f(\lambda)-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\lambda f(\lambda)$$

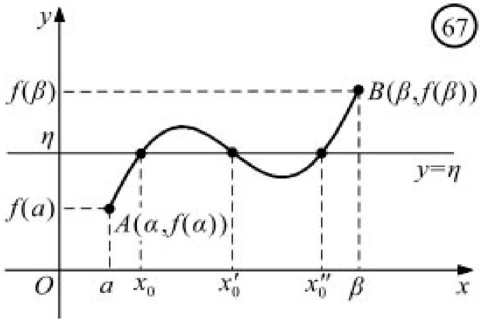
β) Με επαναλαμβανόμενη χρήση του κανόνα του de l' Hospital έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{K}(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda f(\lambda)\cdot\ln\lambda}{f(\lambda)\cdot e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda\cdot\ln\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1+\ln\lambda}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda}}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda}}=0$$

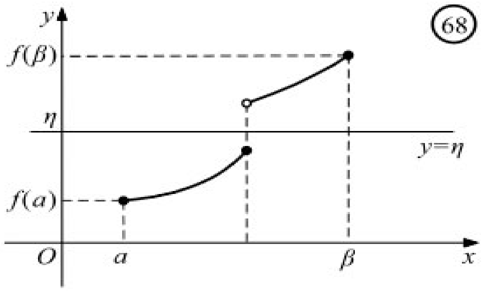
6^o ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. <u>Διατύπωση του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:</u>
Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].
Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και f(α) ≠ f(β) τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.
<u>Απόδειξη του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:</u>
Ας υποθέσουμε ότι f(α) < f(β). Τότε θα ισχύει f(α) < η < f(β) (επόμενο σχήμα).
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g(x) = f(x) − η, x ∈ [α, β], παρατηρούμε ότι :



● η g είναι συνεχής στο [α, β] και
● g(α) g(β) < 0 , αφού g(α) = f(α) − η < 0 και g(β) = f(β) − η > 0 Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.
β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Α2. Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$.

Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u .

Α3. α. Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ**. Σωστό **ε.** Λάθος.

Α4. Το 2 (Το σημείο $A(0,\ f(0))$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f) διότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2,\ 0)$ και συνεχής στο $[-2,\ 0]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

$[-2,\ 0]$. Ακόμα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και συνεχής στο $[0,\ 2]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ 2]$. Επομένως στο $x_0=0$ έχει τοπικό ελάχιστο, δηλαδή το σημείο $A(0,\ f(0))$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου της f.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1». Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$

Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+f(x_1)=1+f(x_2)\Rightarrow f(1+f(x_1))=f(1+f(x_2))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1-6+f(x_1)=2x_2-6+f(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

Β2. Για $x=3$ έχουμε:

$$f(1+f(3))=2\cdot 3-6+f(3)\Leftrightarrow f(1+f(3))=f(3)\Leftrightarrow 1+f(3)=3\Leftrightarrow f(3)=2$$

Β3. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f\left(1+f\left(x^2+x+1\right)\right)=f(1+f(3))\Leftrightarrow 1+f\left(x^2+x+1\right)=1+f(3)\Leftrightarrow x^2+x+1=3$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=-1, x=2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=e^x+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την g στο $[-1,\ 0]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-1,\ 0]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,\ 0]$).
- $g(0)=2>0$
- $g(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0$

Άρα υπάρχει $a\in(-1,\ 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(a)=0\Leftrightarrow e^a+2a+1=0\ .$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων

παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$), με $g'(x)=e^x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in\mathbb{R}$, άρα και «1-1» , δηλαδή η η g έχει μοναδική ρίζα την $x=a$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=e^x+2x+1,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Άρα $f'(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ και η g έχει μοναδική ρίζα την $x=a$. Έχουμε:

$$x<a\Rightarrow g(x)<g(a)\Rightarrow f'(x)<0$$

$$x>a\Rightarrow g(x)>g(a)\Rightarrow f'(x)>0$$

Δηλαδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\ \alpha)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\ \alpha]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ \alpha]$. Ακόμα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(a,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\ +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\alpha$, το $f(a)=e^a+a^2+\alpha$ (1) .

Όμως έχουμε:

$$g(a)=0 \Leftrightarrow e^a+2a+1=0 \Leftrightarrow e^a=-2a-1 \quad (2)$$

Άρα η (1) δίνει:

$$f(a)=e^a+\alpha^2+\alpha=-2a-1+\alpha^2+\alpha=\alpha^2-\alpha-1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x)\ge f(a) \Rightarrow f(x)\ge \alpha^2-\alpha-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

Γ3. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x^2+x\right)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(e^x+x^2+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2}+1+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty .$$

Αν $\Delta_1=\left(-\infty,\ \alpha\right],\ \Delta_2=\left[\alpha,+\infty\right)$ θα έχουμε:

$$f(\Delta_1)=\left[\alpha^2-\alpha-1,\ +\infty\right)$$

$$f(\Delta_2)=\left[\alpha^2-\alpha-1,\ +\infty\right)$$

(επειδή η f γν. φθίνουσα στο Δ_1 και γν. αύξουσα στο Δ_2)

Είναι:

$$\alpha\in(-1,\ 0)\Rightarrow -1<\alpha<0\Rightarrow \begin{cases} 0<\alpha^2<1 \\ 0<-\alpha<1 \end{cases} \Rightarrow -1<\alpha^2-\alpha-1<1 \quad \text{και} \quad \frac{2017}{2016}>1 .$$

Επομένως:

- $\dfrac{2017}{2016}\in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1\in(-\infty,\ \alpha)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_1)=\dfrac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 ,είναι και «1-1».
- $\dfrac{2017}{2016}\in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $\rho_2\in(a,+\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho_2)=\dfrac{2017}{2016}$ και είναι μοναδικός αφού η f, ως γνησίως αύξουσα στο Δ_2, είναι και «1-1».

Επομένως η f έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις $\rho_1,\ \rho_2$.

Γ4. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται διαδοχικά:

$$f(x^2+1)+f(x^2+2)<f(x^2)+f(x^2+3) \Leftrightarrow f(x^2+1)-f(x^2)<f(x^2+3)-f(x^2+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{\left(x^2+1\right)-x^2}<\frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την συνάρτηση f στα διαστήματα:

$$\left[x^2,\ x^2+1\right] \text{ και } \left[x^2+2,\ x^2+3\right] ,\ x\in\mathbb{R}$$

- Η f παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left[x^2,\ x^2+1\right]$ και $\left[x^2+2,\ x^2+3\right]$, $x\in\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$). Άρα η f είναι και συνεχής στα διαστήματα αυτά. Επομένως υπάχουν αντίστοιχα :

$$\xi_1 \in (x^2, x^2+1),\ \xi_2 \in (x^2+2,\ x^2+3) \text{ με:}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{(x^2+1)-x^2} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x^2+3)-f(x^2+2)}{(x^2+3)-(x^2+2)}$$

Έτσι η προς απόδειξη σχέση (1) γίνεται $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, η οποία είναι αληθής αφού:

$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ διότι:

$f''(x) = e^x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (f' συνεχής στο $\mathbb{R}$).

Γ5. Έχουμε ότι:

$$y(t) = e^{x(t)} + x^2(t) + x(t),\ t \geq 0 \qquad (2).$$

Τα μέλη της σχέσης (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για κάθε $t \geq 0$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων για κάθε $t \geq 0$). Επομένως έχουμε:

$$y'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 2x(t) \cdot x'(t) + x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = x'(t)\left(e^{x(t)} + 2x(t) + 1\right) \ (3)$$

Αν $t = t_0$ είναι η χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το $(a, f(a))$, τότε $x(t_0) = \alpha \in (-1,\ 0)$.

Η σχέση (3) για $t = t_0$ γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0)\left(e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1\right) \ (4) \text{ με } x'(t) \neq 0$$

Ισχύει ακόμα ότι :

$$e^{x(t_0)} + 2x(t_0) + 1 = e^a + 2a + 1 = 0 \ (5).$$

Η σχέση (4), λόγω της σχέσης (5) γίνεται:

$$y'(t_0) = x'(t_0) \cdot 0 = 0.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. α. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = x\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\eta\mu x - f(x)\right)' = (x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 0 + c \Leftrightarrow 0 = c \Leftrightarrow c = 0$$

άρα:

$$f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$$

β. Η συνάρτηση: $f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με:

$$f'(x) = x\eta\mu x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow 0 < \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$$

Δ2. $g(x) = |x\varepsilon\varphi x - x^2| = |x| \cdot |\varepsilon\varphi x - x|$

Από το ερώτημα (Δ1 β) ισχύει:

$$\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x > x.$$

‘Εχουμε:

Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(-x) > -x \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x > -x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x < x$$

για $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Άρα $g(x) = x\varepsilon\varphi x - x^2,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) με:

$$g'(x) = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - x = \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + x\left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = = \left(\varepsilon\varphi x - x\right) + x \cdot \varepsilon\varphi^2 x$$

- Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x > 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x > 0$ άρα $g'(x) > 0$
- Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $\varepsilon\varphi x - x < 0$ και $x\varepsilon\varphi^2 x < 0$ άρα $g'(x) < 0$
- Αν $x = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$.

<u>2ος τρόπος:</u>

$$g'(x) = = \left(x\varepsilon\varphi x - x^2\right)' = \varepsilon\varphi x - 2x + \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x - 2x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x\right) + x\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$g'(0) = 0$

- Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma\upsilon\nu x > 0$, $\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x$, $x\eta\mu^2 x > 0$, τότε $g'(x) > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

- Έστω $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow g(-x_1) > g(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η g παρουσιάζει για $x = 0$ ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$

Δ3. α) $g(x) = a$, όπου $a > 0$

- $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$ και $a \in [0, +\infty)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_o \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$) τέτοιο, ώστε $g(x_o) = a$

- $-x_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και

$$g(-x_o) = (-x_o)\varepsilon\varphi(-x_o) - (-x_o)^2 = g(x_o) = a$$

Το $-x_0$ είναι μοναδικό

(γιατί η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$)

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = a$, όταν $a > 0$ είναι $-x_o + x_o = 0$.

β). Επειδή x_1, x_2, x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων $g(x) = 1$, $g(x) = 2$, $g(x) = 3$ αντίστοιχα, έχουμε:

$$g(x_1) = 1,\ g(x_2) = 2,\ g(x_3) = 3$$

και είναι:

$$1 < 2 < 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) \Leftrightarrow x_1 < x_2 < x_3$$

από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού για την g στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$

(αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις διότι gπαραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως και στα, $[x_2, x_3]$, άρα και συνεχής σε αυτά) έχουμε:

$$(x_2 - x_1)\cdot g'(\xi_1) = g(x_2) - g(x_1) = 2 - 1 = 1 \quad ,\xi_1 \in (x_1, x_2)$$

$$(x_3 - x_2)\cdot g'(\xi_2) = g(x_3) - g(x_2) = 3 - 2 = 1 \quad ,\xi_2 \in (x_2, x_3)$$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$(x_2 - x_1)\cdot g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)\cdot g'(\xi_2) = 2$$

Δ4. α. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f\left(x\right)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)+x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} \overset{D.L.P}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x + 2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x + 1} \overset{D.L.P}{=} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0}+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 0 - 2\eta\mu^2 0 + 2\eta\mu 0 + 0\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{2}$$

__2ος τρόπος:__

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f\left(x\right)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)+x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)}{x^2}+1}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}} = l$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\varepsilon\varphi x}{2x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)}{x^2} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = -\frac{1}{2}$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\eta\mu x}{1} = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\eta\mu x - f\left(x\right)\right]-\ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x} = \frac{-\dfrac{1}{2}+1}{1-0} = \frac{1}{2}$$

β. Για $0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$ (Ι) (από το ερώτημα Δ1 β) και $x\eta\mu x > 0$ (ΙΙ) για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x > 0 \quad \text{(III), ΄για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο (0,0) (αφού $f(0) = f'(0) = 0$).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \dfrac{\pi}{2}$

είναι (λόγω της σχέσης (ΙΙΙ) έχουμε:

$$|\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x| = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\text{):}$$

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - f'(x)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx = I_1 - I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu x)' dx = [x\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sigma\upsilon\nu x)' dx = -[x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Άρα: $\mathrm{E}(\Omega) = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 1 = 3 - \frac{\pi}{2}\ \tau.\mu.$

<u>Εναλλακτικά για το μοναδικό σημείο τομής των</u> $f, -f'$ **<u>έχουμε:</u>**

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο (0,0) αφού :

$$f(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x = 0 \quad (1)$$

Προφανώς για $x = 0$ η (1) επαληθεύεται, δηλαδή οι $f, -f'$ τέμνονται στο Ο (0,0) .
Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\mathrm{K}(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) με $\mathrm{K}'(x) = x\eta\mu x + \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η K είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και «1-1» και επομένως η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της (1). Άρα οι $f, -f'$ τέμνονται μόνο στο σημείο Ο (0,0) .

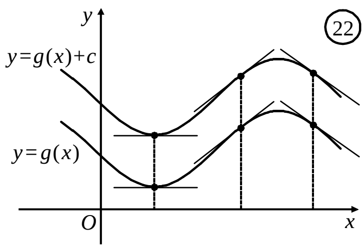
$7^{\text{ο}}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 .$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



ii. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση **ή** παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: F'(x) = f(x) , για κάθε x ∈ Δ.

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και

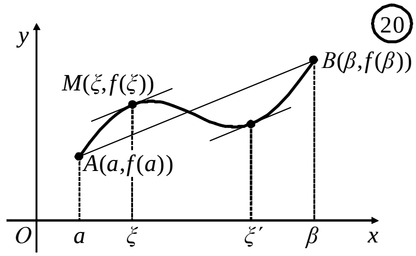
♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α3. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα:
$[-4,\ -2),(-2,\ 0),(0,\ 5]$, διότι δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_1=-2$ και δεν ορίζεται στο σημείο $x_2=0$

Β2. α. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=1$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

Β3.

α. Τα εσωτερικά σημεία $x_3=1,\ x_4=4,\ x_5=3$ του διαστήματος $(0,\ 5]$ είναι τα ζητούμενα κρίσιμα σημεία.
Στα σημεία $A(x_3,\ f(x_3)),\ B(x_4,\ f(x_4))$ υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ και επομένως $f'(x_3)=0$ και $f'(x_4)=0$ άρα οι θέσεις $x_3=1,\ x_4=4$ είναι κρίσιμα σημεία της f. Στο σημείο $\Gamma(x_5,\ f(x_5))$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f και άρα η θέση x_5 είναι επίσης κρίσιμο σημείο της f.

β. Η παράγωγος της f, όταν $x\in(-4,\ -2)$ είναι ίση με $\varepsilon\varphi 135^0=-1$ ή διαφορετικά είναι ο λόγος $\dfrac{(3-1)}{(-4+2)}=-1$.

Β4. Το Ι ορίζεται, αφού η f ορίζεται στο διάστημα $[2,\ 4]$ και είναι συνεχής σε αυτό Το J δεν ορίζεται αφού η f δεν ορίζεται στο σημείο $x_0=0$.

Β5.

α. Το πεδίο ορισμού D_{fog} έχουμε:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ g(x)\in[-4,\ 0)\cup(0,\ 5]\}$$

Είναι:
$g(x)\in[-4,\ 0)\cup(0,\ 5]$ αν, και μόνο αν,

$$(-4\le x+1<0 \text{ ή } 0<x+1\le 5) \text{ ή } x\in[-5,\ -1)\cup(-1,\ 4]$$

Επομένως $D_{fog}=[-5,\ -1)\cup(-1,\ 4]$.

β. Ο τύπος της συνάρτησης fog είναι:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+1),x\in D_{f0g}.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της fog είναι η γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 1 μονάδα αριστερά (οριζόντια μετατόπιση).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με :

$$f'(x)=3x^2+1>0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και "1-1" και επομένως η f αντιστρέφεται.Το σύνολο τιμών της είναι το (A,B), όπου:

$$A = \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,\ B = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$, δηλαδή το $\mathbb{R}$.

Γ2. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το -1. Έχουμε:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x$$

Έστω:

$$g(x) = f(f(x)) - x$$, τότε είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f(x)$

Παρατηρώ ότι:

$$g(-1) = f(f(-1)) + 1 = f(-1) + 1 = -1 + 1 = 0$$

Άρα το -1 είναι ρίζα της g(x)

Η συνάρτηση g(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x) - 1 = \left(3(x^3+x+1)^2+1\right)(3x^2+1) - 1 = (9x^2+3)(x^3+x+1)^2 + 3x^2 > 0$$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1».

Επομένως το -1 είναι η μοναδική ρίζα της

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1, f(-1))$ ή $A(-1, -1)$.

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος:</u>

Έχουμε:

$f(-1) = -1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1) = -1$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \ .$$

Έστω ότι η $f^{-1}(x) = f(x)$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) επομένως και η $f(f(x)) = x$ έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2 .

Θεωρώ τη συνάρτηση: $g(x) = f(f(x)) - x,\ x \in \mathbb{R}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[\rho_1, \rho_2]$)
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (ρ_1, ρ_2)) με:

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) - 1 = \left(3f^2(x)+1\right) \cdot (3x^2+1) - 1 = 9f^2(x) \cdot x^2 + 3f^2(x) + 3x^2 > 0$$

- $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$

Άρα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο αφού $g'(x) > 0$.

Άρα η $x = -1$ η μοναδική ρίζα της $f^{-1}(x) = f(x)$ και επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(-1, f(-1))$ ή

$A(-1,\ -1)$.

Γ3. α.

- Για $x = y$ ισχύει η ισότητα:

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

- Για $x < y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[x, y]$ και έχουμε:

  Η f είναι συνεχής στο $[x, y]$ (ως πολυωνυμική)

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x, y) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (x, y)$: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 1$ ($f'(\xi_1) = 3\xi_1^2 + 1 \geq 1$) , δηλαδή:

$$f(y) - f(x) \geq y - x \quad \text{ή} \quad |f(x) - f(y)| \geq |x - y| \text{ διότι:}$$

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = f(y) - f(x) \geq y - x = |y - x| = |x - y| \quad (1)$$

- Για $x > y$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[y, x]$ και έχουμε:

  Η f είναι συνεχής στο $[y, x]$ (ως πολυωνυμική)

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (y, x) (ως πολυωνυμική)

Άρα υπάρχει $\xi_2 \in (y, x)$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 1$ ($f'(\xi_2) = 3\xi_2^2 + 1 \geq 1$) , δηλαδή:

$$f(x) - f(y) \geq x - y \quad \text{ή} \quad |f(x) - f(y)| \geq |x - y| \text{ διότι:}$$

$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \geq x - y = |x - y| \quad (2)$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \quad \text{(Ι) για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Στην σχέση (Ι) θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και y το $f^{-1}(y)$, αφού η (Ι) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y) \in \mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \quad \text{και τελικά:}$$

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \leq |f(x) - f(y)|$$

β. Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή ότι: $\lim\limits_{x \to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$.

Έχουμε:

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \leq |x - x_0|$$

Είναι $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = \lim\limits_{x \to x_0} (-|x - x_0|) = 0$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε και

$$\lim_{x \to x_0} (f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$$

Γ4. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^{-1}(\xi)+2\xi=0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi)=-2\xi \Leftrightarrow \xi=f(-2\xi) \Leftrightarrow f(-2\xi)-\xi=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=f(-2x)-x,\ x\in\mathbb{R}$

Ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\ 1]$).
- $g(0)=f(0)-0=1>0$
- $g(1)=f(-2)-1=-9-1=-10<0$

Από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0$ ή ισοδύναμα $f^{-1}(\xi)+2\xi=0$.

Επιπλέον η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) (ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο (0, 1)) με:

$$g'(x)=-2f'(-2x)-1=-2(12x^2+1)-1=-24x^2-3<0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1», και επομένως το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

Εναλλακτικά

<u>2ος τρόπος</u>

Ισχύει $f(0)=1$ και $f(-1)=-1$ και η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$. Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει (και είναι μοναδικό) $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_1)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=x_1\in(-1,0)$$

Ακόμα $f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$

Θα εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano για την συνάρτηση:

$$h(x)=f^{-1}(x)+2x$$

στο διάστημα $[0,\ 1]$.

Έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (άθροισμα συνεχών στο $[0,\ 1]$) και

$$h(0)=f^{-1}(0)=x_1<0\ ,\ \ h(1)=f^{-1}(1)+2=2>0$$

Επομένως υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi)+2\xi=0$$

Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα διότι:

Αν $y_1,y_2\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ με $y_1<y_2$.Θα αποδείξουμε ότι: $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.

Έστω $y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)$ με $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$. Άρα

$$x_1=f^{-1}(y_1),\ x_2=f^{-1}(y_2)\quad (*)$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει η (*) έχουμε διαδοχικά:

$$y_1<y_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1<x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα:

Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$$

και με πρόσθεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε:

$$f^{-1}(x_1) + 2x_1 < f^{-1}(x_2) + 2x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Το ξ είναι μοναδικό, αφού η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1» .

Γ5. Έχουμε διαδοχικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$F^2(x) \geq F(x)F(2-x) \Leftrightarrow F^2(x) - F(x)F(2-x) \geq 0 \ (1)$$

Θέτουμε:

$$g(x) = F^2(x) - F(x)F(2-x), \ x \in \mathbb{R}$$

και από την (1) προκύπτει:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1), \ x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημεό του $\mathbb{R}$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων και σύνθεσης παραγωγίσιμψων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x) = 2F(x)F'(x) - F'(x)F(2-x) + F(x)F'(2-x), \ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως από το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 2F(1)F'(1) - F'(1)F(1) + F(1)F'(1) = 0 \quad \text{ή}$$

$$2F(1)F'(1) = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \ (F'(1) = f'(1) = 3 \neq 0)$$

Άρα είναι:

$$F'(x) = f'(x) \Leftrightarrow F(x) = f(x) + c \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 1 \Rightarrow F(1) = f(1) + c \Rightarrow 0 = 3 + c \Rightarrow c = -3$

Επομένως:

$$F(x) = f(x) - 3 = x^3 + x - 2, \ x \in \mathbb{R}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f'(x) + f(x) + 4e^{x-1} = \ln x + \frac{1}{x} + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) + 4e^{2x-1} = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + e^x x + e^x \Leftrightarrow$$

$$<=> \left(e^x f(x) + 2e^{2x-1}\right)' = \left(e^x \ln x\right)' + \left(xe^x\right)' \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^x f(x) + 2e^{2x-1} = e^x \ln x + xe^x + c$$

για $x = 1$ έχουμε:

$$ef(1) + 2e = e\ln 1 + e + c \Leftrightarrow -e + 2e = 0 + e + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα:

$$e^x f(x) + 2e^{2x-1} = e^x \ln x + xe^x \Leftrightarrow f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$$

Δ2. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$$

είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1-2e^{x-1} \quad \text{και} \quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}-2e^{x-1}<0, x>0$$

επομένως η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα ·
Παρατηρούμε ότι:

$$f'(1)=\frac{1}{1}+1-2e^{1-1}=0$$

Έχουμε:

$$\bullet x>1 \overset{f'\downarrow}{\Longrightarrow} f'(x)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<0$$

$$\bullet x<1 \Rightarrow f'(x)>f'(1) \Rightarrow f'(x)>0$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

Μονοτονία

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Ακρότατα: η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το

Εναλλακτικά

2ος τρόπος (για τον υπολογισμό του ακροτάτου).
Για κάθε $x>0$ εχουμε:

$$\ln x \le x-1 \quad (I) \quad \text{και} \quad e^{x-1}\ge x \Leftrightarrow -2e^{x-1}\le -2x \quad (II)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε:

$$\ln x-2e^{x-1}\le -x-1 \Leftrightarrow \ln x-2e^{x-1}+x\le -x-x+x \Leftrightarrow f(x)\le -1 \Leftrightarrow f(x)\le f(1)$$

για κάθε $x>0$.
Επομένως η f παρουσιάζει στο 1 ολικό μέγιστο, το $f(1)=-1$

Δ3 . Είναι:

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f'(x)=\int_e^{e^2}\frac{f'(\ln t)}{t}dt \Leftrightarrow f'(x)=\left[f(\ln t)\right]_e^{e^2}=f(2)-f(1)$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1 ,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού , υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο , ώστε:

$$f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο διάστημα (1, 2) αφού η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1».

Εναλλακτικά:

<u>2^{ος} τρόπος</u>:

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\Lambda(x) = f'(x) + f(1) - f(2)$$

για την οποία ισχύουν:

- είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

$$\Lambda(1) = f'(1) + f(1) - f(2) = 0 + f(1) - f(2) > 0$$

διότι $\quad 1 < 2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(2) \Rightarrow f(1) - f(2) > 0$

$$\Lambda(2) = f'(2) + f(1) - f(2) = \frac{1}{2} + 1 - 2e - 1 - \ln 2 - 2 + 2e = -\frac{3}{2} - \ln 2 < 0$$

Από το Θ.Bolzano υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο, ώστε:

$$\Lambda(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) + f(1) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_o είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

Εναλλακτικά:

<u>3^{ος} τρόπος</u>:

Έστω η συνάρτηση:

$$K(x) = f(x) - x \cdot (f(2) - f(1))$$

Για την f ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο [1,2] (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1,2) (ως παραγωγίσιμη στο (0,+00)

- $k(1) = 2f(1) - f(2)$, $k(2) = 2f(1) - f(2)$

από το Θ.Rolle έχουμε :

υπάρχει x_0 στο (1,2) τέτοιο, ώστε:

$$k'(x_o) = 0 \Leftrightarrow \quad f'(x_o) + f(1) - f(2) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_o) = f(2) - f(1)$$

Η ρίζα x_o είναι μοναδική στο διάστημα (1,2) αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1».

Δ4. Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x) \le f(1) \Rightarrow \quad f(x) \le -1 < 0$$

Επομένως :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) < 0\left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \frac{1}{x} > 0\gamma\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon x > 0\right)$$

$$|h(x)| = \left|\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \frac{1}{x^2}\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right| = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$$

το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$\mathrm{E} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} |h(x)| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left|\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \int_{e}^{1} f(u) du =$$

$$\int_{e}^{1} \left(\ln u + u - 2e^{u-1}\right) du = \int_{e}^{1} \left(u \ln u - u + \frac{u^2}{2} - 2e^{u-1}\right)' du = \frac{4e^{e-1} - e^2 - 5}{2}$$

Δ5. Η f παρουσιάζει για x=1 μέγιστο το f(1) άρα:

$$f(x) \le f(1) \Rightarrow f(x) \le -1 < 0$$

α) Η απόσταση των (A_λ,B_λ) είναι:

$$\left(\mathrm{A}_\lambda \mathrm{B}_\lambda\right) = |f(\lambda) - g(\lambda)| = |2f(\lambda)| = 2|f(\lambda)| = -2f(\lambda)$$

και γράφεται ως συνάρτηση του λ , $d(\lambda) = -2f(\lambda)$

$d'(\lambda) = -2f'(\lambda)$, $\quad d'(\lambda) \ge 0 \Leftrightarrow \quad f'(\lambda) \le 0 \Leftrightarrow \ \lambda \ge 1$

λ	0 +∞	1
$d'(\lambda)$	-	+
$d(\lambda)$	↘	↗

άρα η ελάχιστη τιμή είναι $d(1) = (\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1) = -2f(1) = 2$

β)

$$\mathrm{E}(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda \cdot \left(-2f(\lambda)\right) = -\lambda \cdot f(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1}=\lim_{\lambda\to+\infty}-\frac{\lambda\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1}=-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)}{\lambda^2+1}=$$

$$-\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)\cdot\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1-2\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\right)=-1\cdot\left(0+1-\infty\right)=+\infty$$

$$\bullet\ \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{\lambda}\overset{D.L.H}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0$$

γιατί :

$$\bullet\ \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}\overset{D.L.H}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\left(e^{\lambda-1}\right)'}{(\lambda)'}=\lim_{\lambda\to+\infty}e^{\lambda-1}=+\infty$$

$$\bullet\ \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2}{\lambda^2}=\lim_{\lambda\to+\infty}1=1$$

$$\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\mathrm{E}(\lambda)}{\lambda^2+1}=\lim_{\lambda\to0^+}-\frac{\lambda\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda^2+1}=-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\left(\ln\lambda+\lambda-2e^{\lambda-1}\right)}{\lambda+\frac{1}{\lambda}}\overset{D.L.H}{=}-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}+1-2e^{\lambda-1}}{1-\frac{1}{\lambda^2}}=$$

$$-\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda+\lambda^2-2\lambda^2e^{\lambda-1}}{\lambda^2-1}=\frac{0+0-0}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0$$

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστο διάστημα $[a,\ \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a,β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Α2. i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

ii.Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος <u>δεν</u> ισχύει.

Αντι-παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$ (Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α3. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

Αντιπαραδείγματα στις Λάθος προτάσεις:

β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:

δ) Έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = -[\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi - +\sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 0$$

Αλλά δεν είναι $\eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Θα εξετάσουμε το είδος μονοτονίας της g (για το σκοπό αυτό θα εξετάσουμε το πρόσημο της διαφοράς):

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{f(x_1)}{f^2(x_1)+1}-\frac{f(x_2)}{f^2(x_2)+1}=\frac{f(x_1)\left(f^2(x_2)+1\right)-f(x_2)\left(f^2(x_1)+1\right)}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)}=$$
$$=\frac{f(x_1)f(x_2)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)-\left(f(x_2)-f(x_1)\right)}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)}=\frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\left(f(x_1)f(x_2)-1\right)}{\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)} \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} 0<f(x_1)<1 \\ 0<f(x_2)<1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0<f(x_1)f(x_2)<1 \Rightarrow f(x_1)f(x_2)-1<0$$

και $\left(f^2(x_2)+1\right)\left(f^2(x_1)+1\right)>0$

Άρα:

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow g(x_1)-g(x_2)<0 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

δηλαδή η g είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)<0 \Rightarrow g(x_1)-g(x_2)>0 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

δηλαδή η g είναι επίσης γνησίως φθίνουσα.

Β2. Έστω ότι η f και g είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$ (αφού, σύμφωνα με το ερώτημα Β1 έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας).

- f και g γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.Τότε έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)<f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1)<(fog)(x_2)$$

δηλαδή η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- f και g γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.Τότε έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)<f(g(x_2)) \Rightarrow (fog)(x_1)<(fog)(x_2)$$

Β3. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\left(fog\right)\left(x^3+1\right)=(4x^2+2x) \Leftrightarrow x^3+1=4x^2+2x \Leftrightarrow x^3+1-4x^2-2x=0$$

Θέτουμε: $h(x)=x^3+1-4x^2-2x,\ x\in\mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty, \lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty, h(0)=1, h(1)=-4<0$$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$, υπάρχει $\alpha<0$ τέτοιο, ώστε $h(a)<0$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ υπάρχει $\beta>0$ τέτοιο, ώστε $h(\beta)>0$.

Από το θεώρημα του Bolzano στα διαδοχικά διαστήματα $[\alpha,0]$, $[0,1]$, $[1,\beta]$ (στα οποία πληρούνται οι προϋποθέσεις αφού η $h(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$, άρα και στα διαστήματα αυτά) υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,0\right), \xi_2\in\left(0,1\right), \xi_3\in\left(1,\beta\right)$ τέτοια, ώστε:

$$h(\xi_1)=h(\xi_2)=h(\xi_3)=0 \text{ με } \xi_1,\xi_2>0 \text{ και } \xi_3<0 .$$

Τέλος επειδή η $h(x)$ είναι πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 3 ρίζες και επομένες οι παραπάνω ρίζες είναι μοναδικές.

Β4. Αφού η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$(\text{fog})(x^3+4) > (\text{fog})(3x^2) \Leftrightarrow x^3+4 > 3x^2 \Leftrightarrow x^3+4-3x^2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη .

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y}, & αν\ y \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-y}, & αν\ y < 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & αν\ x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & αν\ x < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι σχετικά απλή (βλέπε εισαγωγή σχολικού βιβλίου)

Αφού η f είναι «1-1» οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα $x'x$ τέμει την γραφική παράσταση C_f της f το πολύ σε ένα σημείο (ή ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετεγμένη).

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $x \in (0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = ημx - x + \frac{1}{6}x^3,\ x \geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:

$$g'(x) = συνx - 1 + \frac{1}{2}x^2,\ x \geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:

$g''(x) = -ημx + x > 0$ για κάθε $x > 0$ (αφού $ημx < x \Leftrightarrow -ημx + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $ημx = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$). Άρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα έχουμε:

$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f\left(\eta\mu x\right) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M\left(x(t_0),\ y(t_0)\right)$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x'(t_0) = y'(t_0)$. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $y(t) = x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$y'(t) = \left[x^3(t)\right]' \Leftrightarrow y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$. Επομένως το ζητούμενο σημε'ιο της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0) = y'(t_0)$ είναι $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Μια φυσική ερμηνεία του προβλήματος είναι η επόμενη:

Όταν το κινητό (σημείο) κινείται πάνω στην καμπύλη $y(t) = x^3(t)$ την χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$ η συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα $x'x$ (οριζόντια συνιστώσα) είναι ίση με την συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα $y'y$ (κατακόρυφη συνιστώσα).

Γ4. Για το ολοκήρωμα:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx$$

αφού η g είναι άρτια $g(x) = g(-x)$ για κάθε $x \in \left[-1,1\right]$ θέτουμε:

$$-x = u \Leftrightarrow x = -u$$

$$dx = -du$$

$$x = -1 \Leftrightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = -1$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 g(-x)dx = -\int_{1}^{-1} (-u)^3 g(u)du =$$

$$= \int_{-1}^{1} (-u)^3 g(u)du = -\int_{-1}^{1} u^3 g(u)du = -I$$

Επομένως:

$$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Η συνάρτηση f είναι παράγουσα της $-3\eta\mu^3 x$ στο $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, άρα $f'(x) = -3\eta\mu^3 x$

Επίσης:

$g'(x) = (3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x)' = 3\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu x = -3\eta\mu x(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) = -3\eta\mu^3 x$

άρα $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$ (1).

Για $x = -\frac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

, οπότε η (1) για $x = -\frac{\pi}{2}$ γίνεται:

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c$ ή $c = 0$ άρα $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Δ2. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επίσης

$g(-x) = 3\sigma\upsilon\nu(-x) - \sigma\upsilon\nu^3(-x) = 3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x = g(x)$ άρα η g είναι άρτια.

Έχουμε:

$g(-x) = g(x) \Rightarrow (g(-x))' = g'(x) \Rightarrow g'(-x)\cdot(-x)' = g'(x) \Rightarrow -g'(-x) = g'(x)$ άρα η g' είναι περιττή.

(Ισχύει ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια. Επίσης αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.
Οι προτάσεις αυτές για να χρησιμοποιηθούν πρέπει να αποδειχθούν).

Δ3. α) Έχουμε $f'(x) = -3\eta\mu^3 x > 0$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$. Επίσης $f''(x)=-9\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x<0$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, άρα η f είναι κοίλη. Η μονοτονία και η κυρτότητα της f φαίνεται συνοπτικά στον διπλανό πίνακα μεταβολών, όπου παρατηρούμε ότι η f έχει ελάχιστο στο $-\dfrac{\pi}{2}$ το $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, μέγιστο στο 0 το $f(0)=g(0)=2$ και δεν έχει σημεία καμπής.

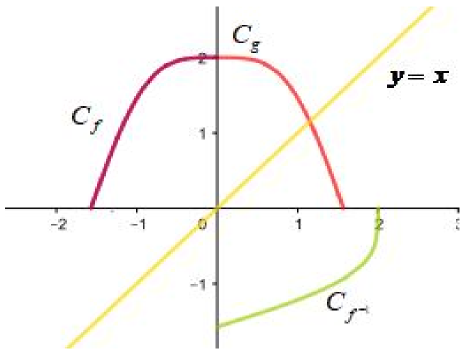
x	$-\pi/2$		0
$f'(x)$		$+$	
$f''(x)$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

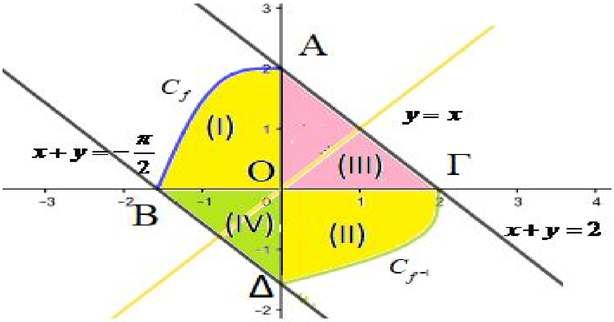
Έχουμε: $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0 \Rightarrow f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow 0\le f(x)\le 2$

άρα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο $[0,2]$ το οποίο είναι και πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Δ4 .Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου.



Δ5.



$$E=(I)+(III)+(II)+(IV)=E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Gamma O\Delta}+E_{\Delta OB}$$

Λόγω συμμετρίας τα χωρία (Ι) και (ΙΙ) είναι ισεμβαδικά, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=2E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Delta OB}$

$$E_{AOB}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x)dx=3\left[\eta\mu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=3-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$=3-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\eta\mu^2 x)(\eta\mu x)'dx=3-\int_{-1}^{0}(1-u^2)du=...=\frac{7}{3}$$

$$u=\eta\mu x\Rightarrow du=\sigma\upsilon\nu x dx$$

*Θέτουμε $x=0\Rightarrow u=0$, οπότε για,

$$x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$$

$$E_{AO\Gamma}=\frac{(OA)\cdot(O\Gamma)}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2 \text{ τ.μ. και } E_{\Delta OB}=\frac{(OB)\cdot(O\Delta)}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi^2}{8} \text{ τ.μ.}$$

Άρα

$$E=2E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Delta OB}=2\cdot\frac{7}{3}+2+\frac{\pi^2}{8}=\frac{20}{3}+\frac{\pi^2}{8} \text{ τ.μ}$$

Δ6. α) Το σημείο

$$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)\in C_{f^{-1}}\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

το οποίο ισχύει.

β) Η κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο Α$\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ είναι ο αριθμός $(f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$.

Έχουμε:

$$\left(fof^{-1}\right)(x) = x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \left(f(f^{-1}(x))\right)' = 1 \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)' = 1$$

Για $x = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ έχουμε:

$$f'\left(f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right) \cdot \left((f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left((f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \left((f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

.

9^o ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Α2.

i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $x_1, x_2 \in \Delta$. Πράγματι:

♦ Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

♦ Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

ii. Η πρόταση:

«Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ» είναι **Ψευδής.**

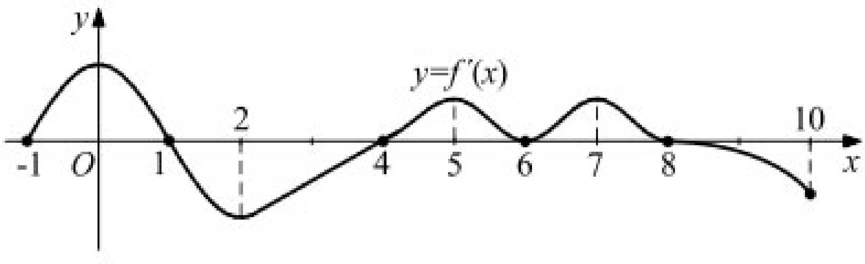
Αντιπαράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^4$ είναι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x^3$. Η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα η f είναι κυρτή. Ωστόσο $f''(x) = 12x^2$ για την οποία δεν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.

Α3. **α)** Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Σωστό, **δ)** Λάθος, **ε)** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1.



α.

♦ Η f στο διάστημα $[-1,1]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

- Η f στο διάστημα $[1,4]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,4)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,4]$.
- Η f στο διάστημα $[4,6]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(4,6)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,6]$.
- Η f στο διάστημα $[6,8]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(6,8)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[6,8]$.

(Μπορούμε να πούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,8]$)

- Η f στο διάστημα $[8,10]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ΄αυτό και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(8,10)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[8,10]$.

β.

- Η f στο διάστημα $[-1,0]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,0)$. Επομένως η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[-1,0]$.
- Η f στο διάστημα $[0,2]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2)$. Επομένως η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[0,2]$.
- Η f στο διάστημα $[2,5]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,5)$. Επομένως η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[2,5]$.
- Η f στο διάστημα $[5,6]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

  $(5,6)$. Επομένως η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[5,6]$

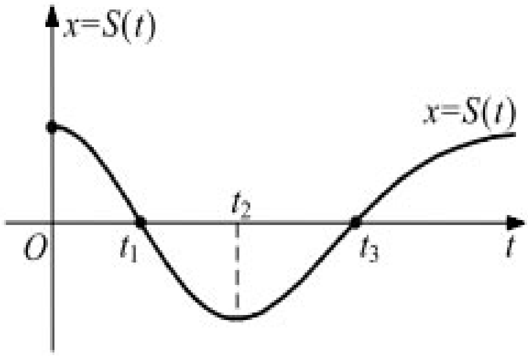
- Η f στο διάστημα $[6,7]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(6,7)$. Επομένως η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα άνω) στο διάστημα $[6,7]$
- Η f στο διάστημα $[7,10]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο
- διάστημα $(7,10)$. Επομένως η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο διάστημα $[7,10]$.

γ.

- Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι τα σημεία 1,4,6,8 που είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της και στα οποία η f'' μηδενίζεται, καθώς και τα σημεία -1,10 που είναι άκρα του πεδίου ορισμού της της f. Οι αριθμοί 1, 8 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων, ενώ οι αριθμοί -1, 4, 10 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων. Ο αριθμός 6 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 6.

Τέλος τα σημεία 0, 2, 5, 6, 7 είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σε αυτά η f είναι συνεχής και αλλάζει η μονοτονία της f'.

Β2.



α. Επειδή η συνάρτηση S είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,t_2]$ το κινητό για $t\in[0,t_2]$ κινείται κατά την αρνητική φορά.

Επειδή η η συνάρτηση S είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[t_2,+\infty)$ το κινητό για $t\geq t_2$ κινείται κατά την θετική φορά.

β. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του κινητού είναι $u(t)=S'(t)$ και ότι τις χρονικές στιγμές t_1,t_3 παρουσιάζει καμπή. Από το δοθέν σχήμα έχουμε:

- Στο διάστημα $[0,t_1]$ η S στρέφει τα κοίλα κάτω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα μειώνεται.
- Στο διάστημα $[t_1,t_3]$ η S στρέφει τα κοίλα άνω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα αυξάνεται.
- Στο διάστημα $[t_3,+\infty)$ η S στρέφει τα κοίλα κάτω και άρα η $u(t)=S'(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα μειώνεται.

Ένας ενδεικτικός πίνακας μεταβολών της ταχύτητας είναι ο επόμενος:

t	0 $\quad t_1$	t_3	$+\infty$
$u(t)=S'(t)$	↘	↗	↘

Άρα, ταχύτητα του κινητού αυξάνεται στο διάστημα $[t_1,t_3]$ και στα διαστήματα $[0,t_1]$ και

$[t_3, +\infty)$ μειώνεται.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να είναι η f αντιστρέψιμη στο πεδίο ορισμού της $D_f = (-2, +\infty)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνάρτηση «1-1». Έστω $x_1, x_2 > -2$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Rightarrow f(e^{f(x_1)}) = f(e^{f(x_2)}) \Rightarrow \ln(x_1+4) = \ln(x_2+4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 + 4 = x_2 + 4 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1».

Γ2. Έχουμε:

$(fof)(e^{f(x)}) = \ln(\ln(x+4)+2) \Leftrightarrow f(f(e^{f(x)})) = \ln(\ln(x+4)+2) \Rightarrow f(\ln(x+4)) = \ln(\ln(x+4)+2)$ (1)

Θέτουμε: $\ln(x+4) = y,\ y+2>0$ και η **(1)** γίνεται:

$$f(y) = \ln(y+2),\ y>-2 \quad ή \quad f(x) = \ln(x+2), x>-2$$

Η γραφική της παράσταση είναι η γνωστή λογαριθμική καμπύλη που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1,\ 0)$ (να την σχεδιάσετε).

Γ3. Το πεδίο ορισμού της fof είναι:

$$D_{fof} = \{x>-2 \,/\, f(x)>-2\} = \{x>-2 \,/\, \ln(x+2)>-2\} = \left\{x>-2 \,/\, x>\frac{1}{e^2}-2\right\} = \left(\frac{1}{e^2}-2, +\infty\right)$$

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e^2}-2, +\infty\right)$ έχουμε:

$$(fof)(x) = f(e^{-x}+2) \Leftrightarrow f(f(x)) = f(e^{-x}+2) \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}+2 \Leftrightarrow f(x) - e^{-x} - 2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - e^{-x} - 2 = \ln(x+2) - e^{-x} - 2,\ x>-2$$

και εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano στο διάστημα $[e^2-2, e^3-2] \subset \left(\frac{1}{e^2}-2, +\infty\right)$. Είναι:

- Η g είναι συνεχής στο $[e^2-2, e^3-2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[e^2-2, e^3-2]$.
- $g(e^2-2) = \ln e^2 - e^{-(e^2-2)} - 2 = -e^{-(e^2-2)} < 0$
- $g(e^3-2) = \ln e^3 - e^{-(e^3-2)} - 2 = 1 - e^{-(e^3-2)} = 1 - \dfrac{1}{e^{(e^3-2)}} > 0$

δηλαδή: $g(e^2-2)\cdot g(e^3-2) < 0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano.

Άρα υπάρχει ένα , τουλάχιστον, $x_0 \in (e^2-2,\ e^3-2)$ έτσι ώστε :

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (fof)(x_0) = f(e^{-x_0}+2)$$

Γ4. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για $x>-2$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2},\ x > -2\ .$$

Η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη $x > -2$ με:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 \quad \text{για κάθε } x > -2\,.$$

Επομένως η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) ή ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα για $x > 1$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στα διαστήματα:

$$\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right] \subset (-2, +\infty),\ \left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right] \subset (-2, +\infty)$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά (άρα και συνεχής) διότι είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, +\infty)$.

Άρα υπάρχουν αντίστοιχα, τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} = 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (I)$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \quad (II)$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow 2\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 2\frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)-\left[g(2-h)-g(2)\right]}{h}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\frac{g(2-h)-g(2)}{h}\right]=0 \;\; (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2) \;\; (2)\; (2+h=x \text{ και } g \; \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\mu\eta)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2-h)-g(2)}{h}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2) \;\; (3)\; (2-h=x \text{ και } g \; \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\mu\eta)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow g'(2)-\left(-g'(2)\right)=0 \Leftrightarrow 2g'(2)=0 \Leftrightarrow g'(2)=0$$

Δ2. Είναι:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} e^x(x^2+x+2)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+x+2}{e^{-x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(x^2+x+2)'}{(e^{-x})'}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Δ3. Έχουμε:

$$f'(x)=e^x(x^2+x+2)>0 \Rightarrow f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R} \quad \text{με:}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} e^x(x^2+x+2)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $(0,+\infty)$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η μονοτονία της f

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	$+$	
f	0	$+\infty$

Δ4. Το σημείο $B\left(x, f(x)\right)$ της C_h απέχει απόσταση από το $A(2,0)$:

$$(AB)=d(x)=\sqrt{(x-2)^2+\left(f(x)-0\right)^2}=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{f(x)}\right)^2},\; x\in\mathbb{R}$$

$$d'(x)=\frac{2(x-2)+f'(x)}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}=\frac{2(x-2)+e^x(x^2+x+2)}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τη συνάρτηση $t(x)=2(x-2)+e^x(x^2+x+2)$ ως προς το πρόσημό της. Η εξίσωση $t(x)=0$ έχει προφανής λύσης την $x=0$ και:

$$t'(x)=2+e^x(x^2+5x+7)>0 \ (e^x>0,\ x^2+5x+7>0)$$

Το πρόσημο της $t(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'	$+$		$+$
$d'=t$	$-\infty \nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow +\infty$

Το πρόσημό της $d(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
d'	$-$		$+$
d	$\searrow$		$\nearrow$

$\min d(0)=\sqrt{7}$

Οπότε το σημείο B είναι $\mathrm{B}(0,h(0))$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{f(0)}\right)$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{3}\right)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_h στο σημείο B είναι:

$\lambda_\varepsilon=h'(0)=\dfrac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι

$\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{0-\sqrt{3}}{2-0}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και άρα: $\lambda_{\mathrm{AB}}\cdot\lambda_\varepsilon=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=-1$

Επομένως: $(\varepsilon)\perp \mathrm{AB}$

Δ5. Από τη σχέση: $g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2\le 0$ αν θέσουμε:

$$H(x)=g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2$$

έχουμε $H(x)\le H(0)$, δηλαδή η συνάρτηση $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στο 0. Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $H(x)$ και παραγωγίσιμη στο 0 άρα ισχύουν οι προϋποθέσειςτουΘεωρήματοςFermat,άρα $H'(0)=0$.

Όμωςισχύει:

$$H'(x)=g(x)+xg'(x)-g'(x+2)-2(f(x)-3)\cdot f'(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x = 0 \Rightarrow H'(0) = 0 \Rightarrow g(0) - g'(2) - 2(f(0) - 3) \cdot f'(0) = 0 \Rightarrow g(0) = g'(2) = 0$ (I)

Έχουμε από τα παραπάνω και τη σχέση (I): $\int_{g(0)}^{g(a)} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{0}^{g(a)} f(x)dx = 0$

- Αν $g(a) > 0$ και επειδή $f(x) > 0 \Rightarrow \int_{0}^{g(a)} f(x)dx > 0$ άτοπο.
- Αν $g(a) < 0$ και επειδή $f(x) > 0 \Rightarrow \int_{0}^{g(a)} f(x)dx < 0$ άτοπο.

Άρα $g(a) = 0$ (II).

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $W(x) = g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,\ a]$.

- $W(x)$ παραγωγίσιμη στο $[0,\ a]$ (γινόμενο παραγωγίσιμων), οπότε και συνεχής στο $[0,\ a]$
- $W(0) = g(0) \cdot \text{συν}0 = 0$
- $W(a) = g(\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 0$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \alpha)$: $W(x_0) = 0$. Είναι όμως:

$$W'(x) = g'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - g(x) \cdot \text{ημ}x \quad .$$

Έχουμε:

$$g'(x_0) \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - g(x_0) \cdot \text{ημ}x_0 = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = g(x_0) \cdot \frac{\text{ημ}x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} \Leftrightarrow g'(x_0) = g(x_0) \cdot \varepsilon\varphi x_0$$

10^{o} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-απόδειξη (Σχολικό βιβλίο)
Α2. α) Θεωρία-διατύπωση (Σχολικό βιβλίο) **β)** Θεωρία-ορισμός (Σχολικό βιβλίο)
Α3. α. Σωστό **β.**Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο που χρειάζεται για να περπατήσει από το Μ στο Σ.Έχουμε:

$$t_1 = \frac{(KM)}{u_1} = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{(M\Sigma)}{u_2} = \frac{300-x}{5}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ είναι:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$$

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} + \frac{300-x}{5}, \; x \in (0,300)$$

Είναι:

$$T'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}} - \frac{1}{5}$$

Η ρίζα της $T(x)=0$ είναι το 75.

Το πρόσημο της $T'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της Τ μπορούν να δοθούν φαίνονται σε πίνακα προσήμου:

Βρίσκουμε ότι η συνάρτηση Τ παρουσιάζει ελέαχιστο για $x = 75\,ft$

Άρα όταν, $x = 75\,ft$ τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln(e^x - 1) - x$$

είναι:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x > 1\} = (0,+\infty)$$

Γ2. Η f είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty)$, ώστε:

$\ln(e^{x_0}-1) - x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{x_0}-1) = x_0 \Leftrightarrow \ln(e^{x_0}-1) = \ln e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0}-1 = e^{x_0} \Leftrightarrow -1 = 0$,που είναι άτοπο. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)$. Δίνοντας μια τιμή στο $(0,+\infty)$ π.χ. για $x=1$: $f(1)=\ln(e-1)-1=\ln\dfrac{e-1}{e}<0\ \left(0<\dfrac{e-1}{e}<1\right)$. Άρα $f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-1=\frac{1}{e^x-1}>0,$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ4. Η f ως γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και «1-1». Άρα η f αντιστρέφεται: Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y=\ln(e^x-1)-x \Leftrightarrow y=\ln(e^x-1)-\ln e^x \Leftrightarrow y=\ln\frac{e^x-1}{e^x}\Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x}=e^y \Leftrightarrow e^x-1=e^ye^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x-e^ye^x=1 \Leftrightarrow e^x(1-e^y)=1 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{1-e^y}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{1-e^y}$$

Πρέπει:

$$1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0. \text{ Άρα } f^{-1}(x)=\ln\frac{1}{1-e^x},\ x<0$$

Γ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\Phi(x)=f(x)-h(x),\ x>0.$$

Είναι:

$$\Phi'(x)=f'(x)-h'(x)=f'(x)+\frac{1}{x}>0\ \text{, για κάθε } x>0$$

Άρα η $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι:

$$\left(\lim_{x\to0^+}\Phi(x),\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

διότι:

$$\lim_{x\to0^+}\Phi(x)=\lim_{x\to0^+}\left(f(x)-h(x)\right)=-\infty-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-h(x)\right)=0-(-\infty)=+\infty$$

Επομένως υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε:

$$\Phi(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=h(x_0)$$

Γ6. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3+x^2+2}{f(2)x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3}{f(2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)}{f(2)}x=+\infty\ \left(f(1)<0,\ f(2)<0\right)$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)dx=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-u\right) f(u)du=\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du+\int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du \quad (1)$$ [6]

Επειδή ισχύει: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du=1$ (2) έχουμε από τις σχέσεις (1) και(2):

$$1=\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Τώρα έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=1$$

Άρα:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=1 \Rightarrow 1-f(0)=1 \Rightarrow f(0)=0$$

Ακόμα από τη σχέση: $f'(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ για $x=0 \Rightarrow f'(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Δ2. Η συνάρτηση g είναι σταθερή γιατί είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πραγματικά, καθώς $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f'(x)$ για x το $\frac{\pi}{2}-x$ έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x) \text{ και },$$

$$g'(x)=2f(x)f'(x)-2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2f(x)f'(x)-2f(x)f'(x)=0$$

Μάλιστα η τιμή της συνάρτησης g είναι:

$$g(x)=g(0)\Leftrightarrow g(x)=f^2(0)+f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow g(x)=1 \,(3)$$

Δ3. Εφόσον $g(x)=f^2(x)+f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

Αλλά από την (3) έχουμε $g(x)=1$, και με την αντικατάσταση $u=\frac{\pi}{2}-x$ στο 2ο ολοκλήρωμα,

[6] Θέτω $u=\frac{\pi}{2}-x$

παίρνουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(u)du \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi^2}{4}$$

Δ4. Από τον ορισμό της συνάρτησης g και λόγω της (3) έχουμε ότι:

$$f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

Από όπου προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$ (4)

Όμως στο Δ1 είδαμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (σχέση 1), που σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση μας δίνει $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικόμέγιστοστο $x_0 = \frac{\pi}{2}$. .

Δ5. Στο Δ1 αποδείξαμε ότι $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$. Σε συνδυασμό με τον ορισμό της παραγώγουέχουμε:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow 1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

Λόγω της (4) παίρνουμε ότι $|f(e^x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left|\frac{f(e^x)}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{f(e^x)}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{f(e^x)}{x}$ με $\lim_{x \to 0} \frac{f(e^x)}{x} = 0$.

11ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-Απόδειξη **Α2.** Θεωρία-Απόδειξη

Α3. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω ότι η g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, δηλαδή ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $g(x_1) > 0, g(x_2) < 0$.

Αφού η g είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) ισχύει το Θ. Bolzano στο $[x_1, x_2]$.

Άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -\eta\mu x_0.$$

Από τη δοθείσα σχέση για $x = x_0$ έχουμε:

$$f^2(x_0) + 2f(x_0)\eta\mu x_0 + \eta\mu^2 x_0 = x_0^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0 + \eta\mu^2 x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x_0) + \eta\mu x_0\right)^2 = x_0^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 = -1$$

Άρα η g(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $g(0) = f(0) + 1 = 1 > 0$ είναι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β2. Έχουμε:

$$f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x) + \eta\mu x\right)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$$

Β3. Έχουμε:

α)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1} - \eta\mu x - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 - 1 + 0 = -1$$

διότι τα όρια υπάρχουν και είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

β)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+1}+\eta\mu x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sqrt{x^2+1}+\eta\mu x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)} = \frac{+\infty(1+0)}{1} = +\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(0,e)\cup[e,+\infty)$. Στα διαστήματα $(0,e)$ και $[e,+\infty)$ η f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στα διαστήματα αυτά). Για να είναι λοιπόν η f συνεχής στο Α πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=e$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=3,\ \lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{x\to e^+}\left[ax+\ln(x-e+1)\right]=ae,\ f(e)=3$$

Άρα $ae=3 \Leftrightarrow a=\dfrac{3}{e}$

β) Για $a=\dfrac{3}{e}$ η f γίνεται:

$$f(x)=\begin{cases} 2+\ln^2 x, & 0<x\le e \\ \dfrac{3}{e}x+\ln(x-e+1), & e<x \end{cases}$$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-6,\ x\in[1,2e]$. Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την g στο διάστημα $[1,2e]$.

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2e]$
- $g(1)=f(1)-6=-4<0$
- $g(2e)=6+\ln(e+1)$

Άρα υπάρχει , ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2e)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=6$

Γ2. α) Έστω $x_1,x_2>0$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1=x_2$.

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\Rightarrow f(e^{f(x_1)})=f(e^{f(x_2)})\Rightarrow 4\ln x_1+3=4\ln x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι «1-1».

β) Έχουμε:

$$f(e^{f(x)})=\ln(4\ln x+3)^2+1,\ x>e^{-\frac{3}{4}}$$

Άρα $f(4\ln x+3)=\ln(4\ln x+3)^2$. Άν θέσουμε $u=4\ln x+3$ έχουμε:

$$f(u)=2\ln u+1,\ u>0 \ \text{ή}\ f(x)=2\ln x+1,\ x>0$$

γ) Έχουμε:

$$f\left(f(x)\right) = f(e^{x-2014}) \Leftrightarrow f(x) = e^{x-2014} \Leftrightarrow f(x) - e^{x-2014} = 0$$

Θέτουμε:

$$h(x) = f(x) - e^{x-2014}, x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right].$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την h στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ και έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο ίδιο διάστημα).
- $\mathrm{h}\left(\frac{1}{e}\right) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{2014}} = -1 - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{2014}} = \frac{-e^{2014} - e^{\frac{1}{e}}}{e^{2014}} < 0$
- $h(1) = f(1) - e^{-2013} = 1 - e^{-2013} = \frac{e^{2013} - 1}{e^{2013}} > 0$

Άρα υπάρχει , ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε: $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = e^{x_0 - 2014}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θα αποδείξουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$, $x \in \mathbb{R}$

- Αν $x > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι προφανής.
- Αν $x < 0$, τότε:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$$

η οποία είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Δ3. Έχουμε:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} - x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{f(x)}$$

Για την μονοτονία της $f(x)$ έχουμε:

- Για $x \in [0, +\infty)$ η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (ερώτημα Δ2)

- Για $x<0$ έχουμε ότι η $\dfrac{1}{f(x)}$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Δ4. Έχουμε:

$$\left(\sqrt{a^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta+1}+\beta\right)=1 \Leftrightarrow f(a)f(\beta)=1 \Leftrightarrow f(a)=\frac{1}{f(\beta)} \Leftrightarrow f(a)=f(-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=-\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$$

Δ5. Η συνάρτηση f είναι «1-1», άρα υπάρχει η f^{-1}.

Θέτω $y=\sqrt{x^2+1}+x,\ y\leq 0$. Έχουμε:

$$y-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (y-x)^2=x^2+1 \Leftrightarrow y^2-2xy+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow y^2-2xy=1 \Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{2y},\ y\neq 0$$

Άρα: $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x},\ x\neq 0$.

12^{ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α
Α1. Θεωρία-Απόδειξη πρότασης (σχολικό βιβλίο).
Α2. Θεωρία –Ορισμός σχολικού βιβλίου.
Α3. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β
Β1.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow 2g(x_1) - x_1 < 2g(x_2) - x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Β2. Γνησίως φθίνουσα.

Β3. α) Για $x = x_0$ η δεδομένη σχέση δίνει $f(x_0) = g(x_0)$, δηλαδή $h(x_0) = 0$ και επειδή η h ειναι γνησίως φθίνουσα θα είναι και «1-1» άρα το x_0 είναι μοναδικό.

β) $x = 2$

γ) $0 < x < \dfrac{1}{e}$

ΘΕΜΑ Γ
Γ1. $a = -1,\ \beta = 0$

Γ2. α) $+\infty$ β) Υπάρχει ρίζα της f γ) 0

ΘΕΜΑ Δ
Δ1.

α) 1 **β)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(2x)-1}{x} = 2\lim_{u\to 0}\frac{f^2(u)-1}{u} = 2\lim_{u\to 0}\left[\frac{f(u)-1}{u}(f(u)+1)\right] =$$

$$= 2\lim_{u\to 0}\frac{f(u)-1}{u}\lim_{u\to 0}(f(u)+1) = 2f'(0)(f(0)+1) = 4f'(0)$$

Δ2. $f(x) = 2 - \sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$

Δ3.

α) Τα σημεία επαφής είναι $\mathrm{M}(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ και $\mathrm{M}'(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$ επομένως οι εφαπτομένες.....

β) Αν $\mathrm{M}(x(t), f(x(t)))$ είναι το κινούμενο σημείο πάνω στην C_f έχουμε:

$$E(t) = E(x(t)) = \frac{1}{2}(OA)f(x(t)) = \frac{1}{2}f(x(t))$$

$$E'(t) = E'(x(t)) = \frac{1}{2}f'(x(t))x'(\mathrm{t}) = \ldots$$

13^{ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α
Α1. Θεωρία-Ορισμός σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.
Α3. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος
Α4. **α)** Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.
β) Έστω συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} -x-1, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}.$$

- Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1\neq \lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$
- Η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού:
$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-1\neq \lim_{x\to 0^-} g(x)=0$$
- Ωστόσο, η συνάρτηση $(f+g)(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω t1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο που χρειάζεται για να περπατήσει από το Μ στο Σ.Έχουμε:

$$t_1=\frac{(KM)}{u_1}=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} \quad \text{και} \quad t_2=\frac{(M\Sigma)}{u_2}=\frac{300-x}{5}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ είναι:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\frac{300-x}{5}$$

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\frac{300-x}{5},\ x\in(0,300)$$

Είναι:

$$T'(x)=\frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}}-\frac{1}{5}$$

Η ρίζα της $T(x)=0$ είναι το 75.

Το πρόσημο της $T'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της Τ φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	**0** **75**	**300**
$T'(x)$	$-$	$+$
$T(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Δηλαδή η συνάρτηση Τ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=75\,ft$
Άρα όταν, $x=75\,ft$, τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$,είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=2xe^{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0\,.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘	min	↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $A(0,f(0))$ ή $A(0,1)$.

Έχουμε:

$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2e^{x^2}(1+2x^2)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο $B(1,f(1))$ είναι:

$$y-1=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-e=2e(x-1)\Leftrightarrow y=2ex-e$$

Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$ θα είναι «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο $B(1,f(1))$. Άρα θα ισχύει:

$$f(x)\geq y\Leftrightarrow f(x)\geq 2ex-e,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\,.$$

Γ2. Γνωρίζοντας ότι $e^x\geq x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (το '=' ισχύει για x=0) και θέτοντας όπου x το x^2 έχουμε:

$$e^{x^2}\geq x^2+1\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq 0$$

και επειδή η συνάρτηση $h(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,1]$, τότε θα έχουμε:

$$\int_0^1(e^{x^2}-x^2-1)dx>0\Leftrightarrow\int_0^1(e^{x^2}-(x^2+1))dx>0\Leftrightarrow\int_0^1e^{x^2}dx-\int_0^1(x^2+1)dx>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1e^{x^2}dx>\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1e^{x^2}dx>\frac{4}{3}$$

Γ3. Αφού η F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $F'(x)=f(x)=e^{x^2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ στο $[0,x]$ με $x>0$.Τότε θα υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\Leftrightarrow F'(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow xe^{\xi^2}=F(x)-F(0)\quad(1)$$

Όμως:

$$\xi \in (0,x) \Rightarrow \xi^2 > 0 \Rightarrow e^{\xi^2} > e^0 \Rightarrow e^{\xi^2} > 1 \Rightarrow xe^{\xi^2} > x \Rightarrow F(x) - F(0) > x \Rightarrow x + F(0) < F(x)$$

β. Από το α) ερώτημα έχουμε $x + F(0) < F(x)$, για κάθε $x > 0$. Όμως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + F(0)\right) = +\infty \text{ , άρα } \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty .$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)+xf(x)}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)+xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{F(x)}{2xe^{x^2}}\right) = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}$$

γιατί:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{xe^{x^2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2x^2} = 0 \ .$$

γ. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την F στο $[0,2]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(2)-F(0)}{2} \Leftrightarrow 2F'(\xi) = F(2)-F(0) \Leftrightarrow 2f(\xi) = F(2)-F(0) \ \ (1).$$

Αλλά $F(2)-F(0) = \int_0^2 F'(x)dx = \int_0^2 f(x)dx \geq \int_0^2 (2ex-e)dx = 4e-2e = 2e \quad (2)$

Οπότε από την (1) έχουμε:

$$2f(\xi) > 2e \Leftrightarrow f(\xi) > e \Leftrightarrow f(\xi) > f(1) \Leftrightarrow \xi > 1$$

Άρα $\xi \in (1,2)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 3x^2+6x+4 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2+6x+4}{3f^2(x)+1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι συνάρτηση «1-1».

Δ2. α) Έχουμε:

$$f^3(0) + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = \frac{2}{f^2(0)+1} > 0$$

$$f^3(-2) + f(-2) = -2 \Leftrightarrow f(-2) = \frac{-2}{f^2(-2)+1} < 0$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[-2,0]$ (διότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$), σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$. Το x_0 είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση f είναι «1-1».

β) Έχουμε διαδοσχικά από το γεγονόςτι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$:

$$f(f(f(x))) > f(f(0)) \Leftrightarrow f(f(x)) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+3x^2+4x+2}{f^2(x)+1} > 0 \Leftrightarrow x^3+3x^2+4x+2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε διαδοχικά από το γεγονός ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$:

$$f(g(x)-4x) = f(3-x^2) \Leftrightarrow g(x)-4x = 3-x^2 \Leftrightarrow g(x) = -x^2+4x+3$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Εύκολα από τον πίνακα προσήμου της g' βρίσκουμε ότι η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = 2$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδον είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-2}^{0} |h(x)|dx = \int_{-2}^{0} |f^3(x)+f(x)|dx = \int_{-2}^{0} |x^3+3x^2+4x+2|\,dx = -\int_{-2}^{0} (x^3+3x^2+4x+2)\,dx = 2 \text{ τ.μ}$$

14^{ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο.

Α3. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

Α4. **α)** Σωστό **β)** Δες σχολικό βιβλίο.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $D_g = [1,+\infty)$

Β2. $(fog)(x) = \dfrac{1}{e^{x-1}-2}$, $x \neq 1+\ln 2$

Β3. Η f δεν είναι «1-1» ενώ η g είναι «1-1». Είναι $g^{-1}(x) = 1+\ln(x^2+1)$

Β4. $x^3 + x = 4x^2 \Leftrightarrow \ldots$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\varepsilon = 2015$

Γ2. $g'(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{3g^2(x)+2015} \Leftrightarrow 3g^2(x)g'(\mathrm{x}) = 1 - 2015g'(\mathrm{x}) \Leftrightarrow \ldots.$

Γ3. Η g είναι «1-1» και $y = g(x) \Leftrightarrow \ldots.x =$

Γ4. Είναι:

$$g'(\mathrm{x}) = \frac{1}{3g^2(x)+2015} \Leftrightarrow g''(\mathrm{x}) = \frac{-6g(x)g'(\mathrm{x})}{\left(3g^2(x)+2015\right)^2} = 0 \Leftrightarrow g(x)g'(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{3g^2(x)+2015} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Με τη βοήθεια του Γ2 βρίσκουμε σημείο καμπής στο $x_0 = -2016$

Γ5. Απλοποιήστε την f(x).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(\mathrm{x}) = -3\eta\mu^3 x \Leftrightarrow f(x) = \ldots + c, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Βρείτε το c.

Δ2. $g(x) = g(-x), x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad g'(x) = -g'(-x), x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Δ3. α) Πίνακα μονοτονίας και κυρτότητας. **β)** f γνησίως μονότονη, άρα και «1-1» και άρα είναι αντιστρέψιμη με $D_{f^{-1}} = f\left(\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.

15ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο

Α2.

$(\alpha) \to$ (Ε) $\quad$ (β) $\to$ (Α) $\quad$ (γ) $\to$ (Γ) $\quad$ (δ) $\to$ (Δ)

Α3. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

Α4. α) Σωστό. **β)** $(f+g) - g = f$, συνεχής ως διαφορά συνεχών.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = [1,4]$

Β2. $x \in \left(1, \dfrac{5}{2}\right)$

Β3. $x_0 = \dfrac{5}{2}$

Β4. Εξετάστε αν η f είναι «1-1».

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Γνησίως αύξουσα στο (0,1] και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Έχει μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2$.

Γ2. $(-\infty, 2]$

Γ3. $f(x) = -\dfrac{2011}{3} < 2$ και αφού η f είναι κατά τμήματα γνησίως μονότονη (άρα και «1-1») έχει μοναδική λύση.

Γ4. $E = -\int_1^2 f(x)dx = ...$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Και στα δύο ολοκληρώματα θέτουμε:

$x = \dfrac{\pi}{2} - u$ και θα πάρουμε: $\begin{Bmatrix} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - f(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{Bmatrix}$

Δ2. $g'(x) = ...0, x \in \mathbb{R}$

Δ3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)dx = ...$

Θέτουμε: $\dfrac{\pi}{2} - x = u....$

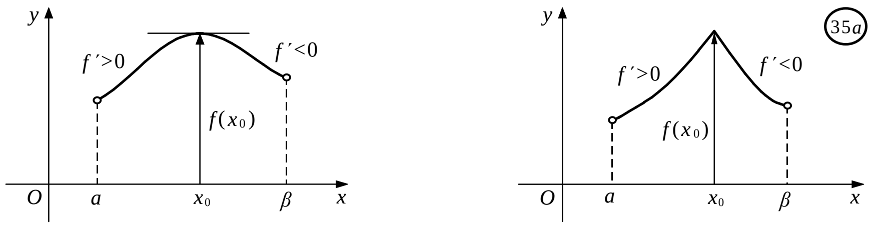
ΘΕΜΑ Α

Α1. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0)\text{, για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0)\text{, για κάθε } x \in [x_0, \beta) \quad (2)$$



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0)\text{, για κάθε } x \in (\alpha, \beta)\ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2 Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3

Διατύπωση:

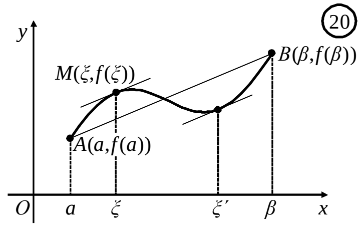
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- ♦ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- ♦ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *AB*.



Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$\left(x^2+1\right)^2>0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f θα είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0 , το $f(0)=0$

Ο πίνακας μεταβολών (μονοτονίας-ακροτάτων) της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↓	↑

Ολ. ελάχιστο

Β2. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=\frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(x^2+1\right)^3>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$.
- Κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

Ο πίνακας μεταβολών (Κυρτότητας και Σημείων Καμπής) της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Β3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$).

<u>Πλάγιες-οριζόντιες:</u> $y=\lambda x+\beta\ (\lambda,\beta\in\mathbb{R})$ με:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

Επομένως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$.

Ακόμα:

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

Επομένως η C_f έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=1$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

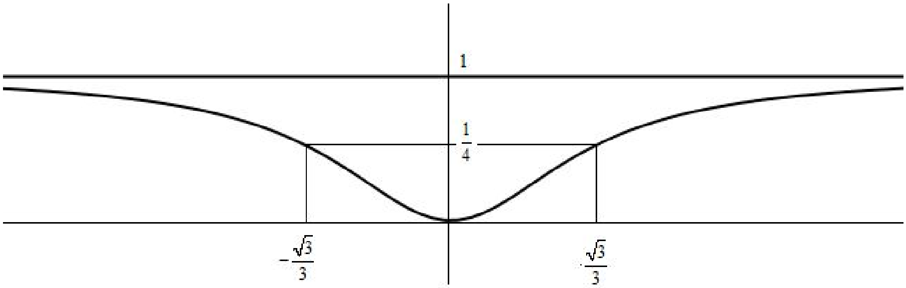
1. Μπορούμε να παρατηρήσουμε (και να αποδείξουμε) ότι η συνάρτηση f είναι άρτια ($f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$) και άρα θα έχει την ίδια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$**,** αποφεύγοντας έτσι να ξαναβρούμε τα παραπάνω όρια στο $-\infty$.

2. Μπορούμε, επίσης, να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ και να δικαολογήσουμε ότι μια συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ αντίστοιχα (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

Β4. Συνοπτικά ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	+	-
f'	-	-	+	+
$f(x)$	$\downarrow \cap$	$\downarrow \cup$	$\uparrow \cup$	$\uparrow \cap$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (αφού λάβουμε και υπόψη μας ότι είναι άρτια και θετική) είναι η επόμενη:



Σημείωση: Για την σωστή παρουσίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε, ότι αυτή είναι άρτια και θετική ($f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x = 0$, δηλαδή να διέρχεται από το Ο(0,0)).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει προφανή ρίζα το $x_0 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \quad .$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right), \; x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \left(e^{x^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0, \; x \in \mathbb{R}$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ και άρα:

$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο $x=0$, αφού στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1»).

2ος Τρόπος

Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (εφαρμογή 2/ii στη σελίδα 266) γνωρίζουμε ότι:

$\ln x\leq x-1$, για κάθε $x>0$ (η ισότητα ισχύει για $x=1$)

Θέτοντας όπου x το $e^{x^2}>0$ (για κάθε $x\in\mathbb{R}$) έχουμε:

$$\ln e^{x^2}\leq e^{x^2}-1\Leftrightarrow x^2\leq e^{x^2}-1\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

(η ισότητα ισχύει για $e^{x^2}=1\Leftrightarrow e^{x^2}=e^0\Leftrightarrow x=0$).

3ος Τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσουμε την μονοτονία και τα ακρότατά της και να πάρουμε $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έπειτα να πάρουμε $g(x^2)\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$$

(Επειδή, από το προηγούμενο ερώτημα: $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει ρίζες σε αυτά, διότι αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα $\rho\in(-\infty,0)$ ή $\rho\in(0,+\infty)$, τότε θα είναι από το θεώρημα του Fermat (που πληρούνται οι προϋποθέσεις του) ότι $f(\rho)=0$. Οπότε έχουμε:

$$|f(\rho)|=0\Leftrightarrow e^{\rho^2}-\rho^2-1=0\Leftrightarrow \rho=0$$

άτοπο.

Άρα η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

$$x>0,\ f(x)>0\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$$

$$x>0,\ f(x)<0\Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$$

$$x<0,\ f(x)<0\Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$$

$$x<0,\ f(x)>0\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$$

Επειδή οι ζητούμενες συναρτήσεις πρέπει να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (και συνεχείς στο $x_0=0$ με $f(0)=0$) θα έχουμε:

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{ή}$$

$$f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R} \quad \text{ή}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0\end{cases}$$ ή

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x< 0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0\end{cases}$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι οι μοναδικές οι οποίες επαληθεύουν την δοσμένη σχέση και είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x)=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right)>0\ ,$$

για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$, αφού $x^2e^{x^2}\geq 0$ και $e^{x^2}-1>0$

Επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων) η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$ (την επαληθεύει).

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x+3)-f(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$g'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$$

αφού $x+3>x\Rightarrow f'(x+3)>f'(x)$ (η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, διότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$).

Για $x>0$ έχουμε διαδοχικά:

$$|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow g(|\eta\mu x|)<g(x)\Leftrightarrow f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)<f(x+3)-f(x)$$

Επομένως μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x=0$

<u>2ος Τρόπος</u>

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$ (την επαληθεύει).

Εξετάζουμε τις επόμενες περιπτώσεις ($x>0$):

1η περίπτωση) Αν $|\eta\mu x|+3>x$, τότε προκύπτει η διάταξη:

$$|\eta\mu x|<x<|\eta\mu x|+3<x+3$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x,\ |\eta\mu x|]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x,\ |\eta\mu x|]$ (επομένως και συνεχής στο $[x,\ |\eta\mu x|]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_1\in\left(|\eta\mu x|,x\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_1\right) = \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(I)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x| + 3,\ x+3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x| + 3,\ x+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x| + 3,\ x+3\right]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_2 \in \left(|\eta\mu x| + 3, x+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_2\right) = \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x| + 3)}{(x+3) - \left(|\eta\mu x| + 3\right)} = \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x| + 3)}{x - |\eta\mu x|} \quad \text{(II)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (I) και (II) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'\left(\xi_1\right) < f'\left(\xi_2\right) \Rightarrow \frac{f(x) - f(|\eta\mu x|)}{x - |\eta\mu x|} < \frac{f(x+3) - f(|\eta\mu x| + 3)}{x - |\eta\mu x|}$$

Επειδή $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow x - |\eta\mu x| > 0$ έχουμε:

$$f(x) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(|\eta\mu x| + 3) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) < f(x+3) - f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x = 0$.

2η περίπτωση). Αν $|\eta\mu x| + 3 < x$, τότε προκύπτει η διάταξη:

$$|\eta\mu x| < |\eta\mu x| + 3 < x < x+3.$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x| + 3\right]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x| + 3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x| + 3\right]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi_3 \in \left(|\eta\mu x|,\ |\eta\mu x| + 3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_3\right) = \frac{f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|)}{\left(|\eta\mu x| + 3\right) - |\eta\mu x|} = \frac{f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|)}{3} \quad \text{(III)}$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x,\ \mathrm{x}+3\right]$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[x,\ \mathrm{x}+3\right]$ (επομένως και συνεχής στο $\left[x,\ \mathrm{x}+3\right]$).

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi_4 \in \left(x,\ \mathrm{x}+3\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi_4\right) = \frac{f(x+3) - f(x)}{(x+3) - x} = \frac{f(x+3) - f(x)}{3} \quad \text{(IV)}$$

Τώρα έχουμε διαδοχικά από τις σχέσεις (III) και (IV) και αφού η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα:

$$\xi_3 < \xi_4 \Rightarrow f'(\xi_3) < f'(\xi_4) \Rightarrow \frac{f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)}{3} < \frac{f(x+3)-f(x)}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|) < f(x+3)-f(x)$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$.

Σημείωση: Ακόμα και αν $|\eta\mu x|+3=x$, τα παραπάνω θεωρήματα και τα συμπεράσματα εφαρμόζονται χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Εναλλακτικά:

Υποθέτουμε, αντίθετα, ότι υπάρχει $x_0>0$ που να είναι λύση της εξίσωσης. Ισχύει $|\eta\mu x_0| < x_0$ (από τη γνωστή ανισότητα $|\eta\mu x| \le x$ με την ισότητα μόνο για $x=0$) καθώς επίσης $|\eta\mu x_0| < |\eta\mu x_0|+3$ και $x_0 < x_0+3$.

Αν διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|\eta\mu x_0|+3 \le x_0$, τότε:

$$|\eta\mu x_0| < |\eta\mu x_0|+3 < x_0 < x_0+3$$

- Αν $x_0 \le |\eta\mu x_0|+3$, τότε:

$$|\eta\mu x_0| < x_0 \le |\eta\mu x_0|+3 < x_0+3 \; .$$

και εφαρμόσουμε ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[|\eta\mu x_0|, |\eta\mu x_0|+3\right]$ και $\left[x_0,\ x_0+3\right]$ και άρα υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in \left(|\eta\mu x_0|, |\eta\mu x_0|+3\right)$ και $\xi_2 \in \left(x_0,\ x_0+3\right)$ και καταλήγουμε σε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και «1-1» παίρνουμε $\xi_1=\xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα. Επομένως σε κάθε περίπτωση η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=0$.

3ος Τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(t)=f(t+3)-f(t),\ t\ge 0$$

Επομένως αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$h(|\eta\mu x|)=h(x),\ x\ge 0$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα διαφοράς και σύνθεσης παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$) με:

$$h'(t)=f'(t+3)-f'(t),\ t\ge 0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα (αφού η f είναι κυρτή) έχουμε διαδοχικά:

$$t+3>t \Rightarrow f'(t+3)>f'(t) \Rightarrow f'(t+3)-f'(t)>0 \Rightarrow h'(t)>0,\ t\ge 0$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και άρα είναι «1-1» στο $[0,+\infty)$. Άρα η δοθείσα εξίσωση για $x\ge 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$h(|\eta\mu x|)=h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x|=x \Leftrightarrow |\eta\mu x|=|x| \Leftrightarrow x=0\ ,$$

Αφού στην ανισοισότητα $|\eta\mu x|\le|x|$ το **=** ισχύει **μόνο** για $x=0$ (πρόταση σελίδας 171, σχολικό βιβλίο).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx=\pi$

$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \ (1)$

Τώρα θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\eta\mu x\right)=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\eta\mu x=1\cdot 0=0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0) θα είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f\left(\pi\right)=\pi$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Δ2. α) Έστω οτι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, θα έχουμε ότι $f'(x_0)=0$.

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (αφού τα μέλη της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) έχουμε:

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+e^{x},\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=x_0$ από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε:

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)+e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0}=1 \Leftrightarrow e^{x_0}=e^{0} \Leftrightarrow x_0=0,$$

Δηλαδή $f'\left(x_0\right)=f'\left(0\right)=0$, άτοπο αφού $f'\left(0\right)=1$.

Επομένως η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

β) Από το ερώτημα Δ2 (α) έχουμε ότι $f'\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (δηλαδή η συνάρτηση f' δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι επίσης συνεχής (αφού f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$). Επομένως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $f'\left(0\right)=1>0$ (Δ1 ερώτημα) θα είναι $f'\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ [1].

Έχουμε: $\begin{matrix}-1\le \eta\mu x\le 1\\ -1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1\end{matrix}$.

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με $f(x)>0$ (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα $f(x)>0$ «κοντά» στο $+\infty$) έχουμε:

$$-2\le \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)}\le \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le \frac{2}{f(x)}$$

Τώρα έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}=0$ και, από το κριτήριο της παρεμβολής, παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$$

Δ4. Για ευκολία θέτουμε $\mathrm{I}=\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx$. Θα δείξουμε ότι $0<\mathrm{I}<\pi^2$. Θέτουμε (αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα):

$$u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\Rightarrow du=\frac{1}{e^u}dx\Rightarrow e^u du=dx$$

$$u=\ln x\Rightarrow x=e^u$$

$$x=1\Leftrightarrow u=0$$

$$x=e^\pi \Leftrightarrow u=\pi$$

Οπότε :

$$\mathrm{I}=\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^\pi \frac{f(u)}{e^u}e^u du=\int_0^\pi f(u)du$$

Έχουμε, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$:

$$0\le x\le\pi \Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(x)\le\pi$$

Η ισότητες στην προηγούμενη σχέση δεν ισχύουν παντού και άρα έχουμε:

$$\int_0^\pi 0dx<\int_0^\pi f(x)dx<\int_0^\pi \pi dx\Rightarrow 0<\int_0^\pi f(x)dx<\pi^2 \Leftrightarrow 0<I<\pi^2$$

2ος Τρόπος

Επειδή η συνάρτηση $\ln x$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσες (από το ερώτημα Δ2(β))

---

[1] Στην πραγματικότητα ο ισχυρισμός αυτός είναι το αντίστροφο γνωστής πρότασης του σχολικού βιβλίου. Για την πλήρη δικαιολόγηση μπορούμε να πούμε: Αν ήταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ θα είχαμε:

$$f\left(\mathbb{R}\right)=f\left(\left(-\infty,+\infty\right)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ l\right)$$

άτοπο αφού $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$. Επίσης αν ήταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ θα είχαμε $f(x)<0$ για κάποια $x>0$ που είναι άτοπο (αφού η $f\uparrow$ και άρα $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$).

έχουμε διαδοχικά:

$$1 \le x \le e^{\pi} \Rightarrow \ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi} \Rightarrow 0 \le \ln x \le 2 \Rightarrow f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$$

Διαιρώντας με $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ (δηλαδή $x > 0$) έχουμε:

$$\frac{f(0)}{x} \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{f(\pi)}{x} \Leftrightarrow 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Δηλαδή έχουμε τις ανισώσεις:

- $\frac{f(\ln x)}{x} \ge 0$, $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = e^{\pi}$ δίνει $\frac{f(\ln e^{\pi})}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \ne 0$) . Επομένως έχουμε: $\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx > 0$
- $\frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x} \le 0$, $x \in \left[1,\ e^{\pi}\right]$ και η συνάρτηση $\frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x}$ δεν είναι παντού 0 (αφού π.χ για $x = 1$ δίνει $\frac{f(\ln 1)}{1} - \frac{\pi}{1} = f(0) - \pi = -\pi \ne 0$).

Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx - \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x}dx < 0 \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x}dx \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left[\ln x\right]_1^{e^{\pi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left(\ln e^{\pi} - \ln 1\right) \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left(\pi - 0\right) \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$$

Άρα:

$$0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$$

<u>3ος Τρόπος</u>

Έστω F μία αρχική της f στο $\left[0,+\infty\right)$ (αυτό εξασφαλίζεται αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$). Άρα ισχύει ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$, $x \ge 0$.

Έτσι ισχύει ότι: $\frac{f(\ln x)}{x} = \left[F\left(\ln x\right)\right]'$, $x \ge 0$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{I} = \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_1^{e^{\pi}} \left[F\left(\ln x\right)\right]'dx = \left[F\left(\ln x\right)\right]_1^{e^{\pi}} = \quad (*)$$
$$= F\left(\ln e^{\pi}\right) - F\left(\ln 1\right) = F(\pi) - F(0)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την F στο διάστημα $\left[0,\pi\right]$, αφού F παραγωγίσιμη στο $\left[0,\pi\right]$ (άρα και συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$), οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in \left(0,\ \pi\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(\pi) - F(0)}{\pi} \Rightarrow f(\xi) = \frac{F(\pi) - F(0)}{\pi} \Rightarrow F(\pi) - F(0) = \pi f(\xi) \quad (**)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (*) και (**) έχουμε:

$$0 < \xi < \pi \Rightarrow f(0) < f(\xi) < f(\pi) \Rightarrow 0 < f(\xi) < \pi \Rightarrow 0 < \pi f(\xi) < \pi^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < F(\pi) - F(0) < \pi^2 \Rightarrow 0 < \mathrm{I} < \pi^2$$

<u>4ος Τρόπος</u>

Για το $I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$, θέτουμε (αλλαγή μεταβλητής):

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = \ln 1 \Leftrightarrow u = 0$$

$$x = e^\pi \Leftrightarrow u = \ln e^\pi \Leftrightarrow u = \pi$$

και έχουμε ότι $I = \int_0^\pi f(u) du$.

Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

$$0 \le u \le \pi \Rightarrow f(0) \le f(u) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le f(u) \le \pi$$

Επομένως έχουμε: $f(u) \ge 0$ και η f δεν είναι παντού 0, άρα $\int_0^\pi f(u) du > 0 \Leftrightarrow I > 0$ (1).

Ακόμα $f(u) \le \pi \Leftrightarrow f(u) - \pi \le 0$ και η συνάρτηση $f(u) - \pi$ δεν είναι παντού 0, άρα:

$$\int_0^\pi (f(u) - \pi) du < 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u) du - \int_0^\pi \pi du < 0 \Leftrightarrow I < \pi [x]_0^\pi \Leftrightarrow \mathrm{I} < \pi^2 \quad (2)$$

Επομένως $0 < \mathrm{I} < \pi^2$.

<u>5ος Τρόπος</u>

Εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση στο $I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$ και έχουμε:

$$I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^{e^\pi} f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^{e^\pi} f(\ln x)(\ln x)' dx =$$

$$= [f(\ln x)(\ln x)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} (\ln x) \cdot [f(\ln x)]' dx =$$

$$= f(\ln e^\pi)(\ln e^\pi) - 0 - \int_1^{e^\pi} (\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= f(\pi) \cdot \pi - \int_1^{e^\pi} K(x) dx = \pi^2 - \int_1^{e^\pi} K(x) dx \quad (\mathrm{I})$$

, όπου $K(x) = (\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \ge 0, \ x \in [1, e^\pi]$ διότι:

$$x \ge 11 \Rightarrow \ln x \ge \ln 1 \Rightarrow \ln x \ge 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$$

Επομένως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και $f'\left(\ln x\right) > 0$.

Αφού η συνάρτηση $K(x)$ δεν είναι παντού 0, έχουμε (χρησιμοποιούμε και τη σχέση (1)):

$$\int_1^{e^\pi} K(x)dx > 0 \Leftrightarrow -\int_1^{e^\pi} K(x)dx < 0 \Leftrightarrow \pi^2 - \int_1^{e^\pi} K(x)dx < \pi^2 \Leftrightarrow I < \pi^2$$

Επομένως $0 < I < \pi^2$.

<u>Σχόλιο:</u> Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ από τα δεδομένα). Επίσης η συνάρτηση $\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ +\infty\right)$ οπότε και η συνάρτηση $f'(\ln x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,\ e^\pi\right]$ που μας ενδιαφέρει.

Επομένως, η συνάρτηση:

$$K(x) = \left(\ln x\right) \cdot f'\left(\ln x\right) \cdot \frac{1}{x} \geq 0,\ x \in \left[1,\ e^\pi\right]$$

είναι συνεχής και άρα το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^\pi} K(x)dx$ έχει νόημα.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, στη σελίδα 260 του σχολικού βιβλίου (Θ. Fermat).
Α2. Θεωρία, στη σελίδα 169 του σχολικού βιβλίου.
Α3. Θεωρία-Ορισμός, στη σελίδα 280 του σχολικού βιβλίου.
Α4. α. Λάθος. **β.** Λάθος. **γ.** Σωστό. **δ.** Λάθος. **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f είναι $D_f = (1,5) \cup (5,\ 9]$.

Το σύνολο τιμών Α είναι $A = f\left(D_f\right) = (-2,5]$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^+} f(x) = 3$

Β3.

α) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (2,3)$

β) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (5,7)$

γ) Θέτουμε $f(x) = u$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f(x) = u_0 \Rightarrow \lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = 5 = u_0 \ .$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right) = \lim_{u\to u_0} f(u) = \lim_{u\to 5} f(u) = 3$$

Β4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 3$ και $x_2 = 7$ αφού:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

$$x_3 = 4$$

Β5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x) = 0$ είναι $x_4 = 6$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου

$$x_5 = 8$$

σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα x΄x οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0 \ .$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη .

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y}, & \alpha\nu\ y \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-y}, & \alpha\nu\ y < 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \alpha\nu\ x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \alpha\nu\ x < 0 \end{cases}$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $x \in (0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3, \ x \geq 0 \quad ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}x^2, \ x \geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με:

$g''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$

(αφού $\eta\mu x < x \Leftrightarrow -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $\eta\mu x = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$).

¨Αρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0 \ ,$$

δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ **.**

Είναι:

$$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0 .$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f\left(\eta\mu x\right) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M\left(x(t_0),\ y(t_0)\right)$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x'(t_0) = y'(t_0)$.

Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $y(t) = x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$y'(t) = \left[x^3(t)\right]' \Leftrightarrow y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Επομένως το ζητούμενο σημε'ιο της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0) = y'(t_0)$ είναι $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Για το ολοκήρωμα:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx$$

(αφού η g είναι άρτια $g(x) = g(-x)$ για κάθε $x \in \left[-1,1\right]$) θέτουμε:

$$-x = u \Leftrightarrow x = -u$$

$$dx = -du$$

$$x = -1 \Leftrightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = -1$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 g(-x)dx = -\int_{1}^{-1}\left(-u\right)^3 g(u)du =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(-u\right)^3 g(u)du = -\int_{-1}^{1} u^3 g(u)du = -I$$

Επομένως $I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- Για κάθε $x \in (0,1)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).
- Για κάθε $x > 1$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- στο $(0,1)$).

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1} = (D'L) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x} = 1$$

$$f(1) = 1$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, επομένως είναι συνεχής και στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ και άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες για $x_0 > 0$. Θα εξετάσουμε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωστη στο $x_0 = 0$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\ln x \cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} + 1 = -\infty$$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Δ2.

- Για $x \in (0,1)$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$)με :

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e \notin (0,1)$$

Άρα $f'(x) \neq 0,\ x \in (0,1)$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$

- Για $x > 1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,+\infty)$ με :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = x - 1 - x\ln x, x > 0 \ ,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με :

$$h'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x, x > 0$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Έχουμε:

- $x > 1 \Rightarrow h'(x) < 0$, άρα η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ (αφού είναι και συνεχής στο $[1,+\infty)$) και άρα:
  $x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0$ για κάθε $x > 1$

Επομένως $h(x) < 0,\ x \in (0,+\infty)$ άρα $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x(x-1)^2} < 0,\ x > 1$.

Το μοναδικό πιθανό κρίσιμο σημείο ειναι το $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x(2x-1)} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{2x(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $x_0 = 1$.

Δ3. α) Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ (αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

- $f\left((0,1]\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ f(1)\right] = (-\infty,1]$ επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $f(1) = 1$.

Αφού $0 \in (-\infty,1]$ η f θα έχει μία ρίζα η οποία θα είναι μοναδική αφού η f είναι «1-1» ως γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$.

Αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ (αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

- $f\left([1,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\ f(1)\right] = (0,1]$ επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Όμως $0 \notin (0,1]$ και άρα η f δεν έχει ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1]$

β) Το Εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$E(\Omega)=\int_{x_0}^{1}\left|f(x)\right|dx,\ x_0\in(0,1].$$

Επειδή η είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ έχουμε:

$$x\geq x_0\Rightarrow f(x)\geq f(x_0)\Rightarrow f(x)\geq 0$$

Άρα :

$$E(\Omega)=\int_{x_0}^{1}f(x)dx=\int_{x_0}^{1}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)dx=\int_{x_0}^{1}\frac{\ln x}{x}dx+\int_{x_0}^{1}1dx=\int_{x_0}^{1}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+\left[x\right]_{x_0}^{1}=I+1-x_0$$

$$\mathrm{I}=\int_{x_0}^{1}\ln x\cdot(\ln x)'dx=\left[\ln^2 x\right]_{x_0}^{1}-\int_{x_0}^{1}\ln x\cdot(\ln x)'dx=-\ln x_0-I$$

$$2I=-\ln x_0\Rightarrow I=\frac{-\ln x_0}{2}$$

$$E(\Omega)=\frac{-\ln x_0}{2}+1-x_0\ \ (1)$$

Επειδή το x_0 είναι ρίζα της f έχουμε:

$$f(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x_0}{x_0}+1=0\Leftrightarrow\frac{\ln x_0+x_0}{x_0}=0\Leftrightarrow\ln x_0+x_0=0\Leftrightarrow\ln x_0=-x_0\ .$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$E(\Omega)=-\frac{x_0^{\ 2}}{2}+1-x_0=\frac{-x_0^{\ 2}-2x_0+2}{2}\quad \text{τ.μ.}$$

Δ4. Για κάθε $x>1$ έχουμε $f'(x)<0\Rightarrow F''(x)<0$. Η F' είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $x=1$ λόγω της αντίστοιχης συνέχειας της f. Άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Ισχύει: $1<x<x^2$ στο $[1,+\infty)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την F στα διαδοχικά διαστήματα $[1,x],[x,x^2]$ στα οποία ικανοποιούνται οι προυποθέσεις (Η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε και στα $[1,x],[x,x^2]$).

Επομένως υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1\in(1,x)$ και $\xi_2\in(x,x^2)$ με:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(x)-F(1)}{x-1},\quad F'(\xi_2)=\frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}$$

Έχουμε διαδοχικά :

$$\xi_1<\xi_2\Rightarrow F'(\xi_1)>F'(\xi_2)\Rightarrow\frac{F(x)-F(1)}{x-1}>\frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}\Rightarrow\frac{F(x)-F(1)}{x-1}>\frac{F(x^2)-F(x)}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow F(x)-F(1)>\frac{F(x^2)-F(x)}{x}\Rightarrow xF(x)-xF(1)>F(x^2)-F(x)\Rightarrow xF(x)+F(x)>xF(1)+F(x^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2)$$

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. (Το Α2 των Ημερησίων Λυκείων 2016)
Α3. (Το Α3 των Ημερησίων Λυκείων 2016)
Α4. α) Λάθος **β**) Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β (Το ΘΕΜΑ Γ των Ημερησίων Λυκείων 2016)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η συνάρτηση f θα είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.
- Έχει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο 0 , το $f(0) = 0$.

Ο πίνακας μεταβολών (μονοτονίας-ακροτάτων) της συνάρτησης f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$ Ολ.	ελάχιστο $\uparrow$

Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πηλίκου παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f''(x) = \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3},\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3} > 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{\left(x^2+1\right)^3} < 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 < 0 \Leftrightarrow \left(x > \frac{\sqrt{3}}{3}\ ή\ x < -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ο πίνακας προσήμου της $f''(x)$ είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-

Γ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$).

<u>Πλάγιες-οριζόντιες:</u> $y = \lambda x + \beta$ $(\lambda, \beta \in \mathbb{R})$ με:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$.

Ακόμα:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Επομένως η C_f έχει οριζοντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=1$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Μπορούμε επίσης να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ και να δικαιολογήσουμε ότι μια συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα και πλάγια και οριζόντια στο $-\infty$ και στο $+\infty$ αντίστοιχα (άρα δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτη).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)\cdot f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x) = 2x \Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]' = (x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + c$$

Για $x = 0 \Rightarrow f^2(0) = c \Rightarrow c = 1$. Άρα $f^2(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$. (1)

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αφού αν είχε μία ρίζα $\rho \in \mathbb{R}$ θα είχαμε:

$$f^2(\rho) = \rho^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = \rho^2 + 1 \Leftrightarrow \rho^2 = -1$$ που είναι άτοπο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η (1) είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Εχουμε:

$$x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \lambda\right),\ x > 0$$

Άρα:

$$\text{A}= \lim_{x\to+\infty} f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \lambda\right) = (1-\lambda)\cdot(+\infty)$$

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1η) $1-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$, τότε $\text{A} = +\infty$

2η) $1-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, τότε $\text{A} = -\infty$

3η) $1-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε έχουμε:

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x},\ x > 0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$.

Άρα:

$$f([0,\ +\infty)) = [1,+\infty)$$
$$f((-\infty,0]) = [1,+\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = [1,+\infty)$.

Δ4. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$ πρέπει για να έχει λύση η δοθείσα εξίσωση να είναι:

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Το Α1 των Επαναληπτικών Ημερησίων Λυκείων)
Α2. (Το Α2 των Επαναληπτικών Ημερησίων Λυκείων)
Α3. ((Το Α3 των Επαναληπτικών Ημερησίων Λυκείων)
Α4. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β (Το ΘΕΜΑ Β των Επαναληπτικών Ημερησίων Λυκείων)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$ ως πολυωνυμική.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1,\ f(0) = 1$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(1)$ και άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, δηλαδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ (ως συνεχής στο $\mathbb{R}$). Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,\ 0)$ και $(0,\ 1)$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x+1-1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και άρα η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[-1,\ 1]$.

Γ3. Έστω $B\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη. Η εξίσωση της C_f στο σημείο Β είναι:

- Για $x \le 0$, έχουμε:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\left(x - x_0\right)$$

$$y - \left(-x_0^2 + 1\right) = -2x_0\left(x - x_0\right)$$

$$y + x_0^2 - 1 = -2x_0 x + 2x_0^2$$

Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ θα είναι:

$$\frac{5}{4} + x_0^2 - 1 = 2x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{2}$$

Δεκτή τιμή $x_0 = -\frac{1}{2}$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{3}{4} = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{5}{4}$$

- $x > 0$, έχουμε:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\left(x - x_0\right) \Rightarrow y - \left(-x_0 + 1\right) = -\left(x - x_0\right) \Rightarrow y + x_0 - 1 = -x + x_0 \Rightarrow y - 1 = -x \Rightarrow y = -x + 1$$

Η οποία δεν επαληθεύεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$. Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = x + \frac{5}{4}$**.**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u> (Το ΘΕΜΑ Γ των Επαναληπτικών Ημερησίων Λυκείων)

ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για κάθε $x \in R_1$ έχουμε :

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$

Α3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να διέρχεται η C_f από το σημείο $A(3,\ 2)$ πρέπει:

$$f(3) = 2 \Leftrightarrow \frac{3a-1}{4} = 2 \Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = 3$$

Β2. Για $\alpha = 3$ η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1},\ x \neq -1$.

Έστω $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1-1}{x_1+1} = \frac{3x_2-1}{x_2+1} \Leftrightarrow 3x_1x_2 + 3x_1 - x_2 - 1 = 3x_1x_2 + 3x_2 - x_1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_1 - x_2 = 3x_2 - x_1 \Leftrightarrow 4x_1 = 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1».

Β3. Αφού η f είναι «1-1» υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}. Έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x-1}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = 3x-1 \Leftrightarrow x(y-3) = -y-1$$

Αν $y \neq 3$, έχουμε $x = \dfrac{y+1}{3-y}$. Πρέπει , επιπλέον, να είναι:

$$x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{3-y} \neq -1 \Leftrightarrow y+1 \neq -3+y \Leftrightarrow 1 \neq -3$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής και επομένως έχουμε: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3-x}$, $x \neq 3$.

Β4. Έχουμε διαδοχικά:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{3-x} = \frac{3x-1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -3x^2 + 10x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2,\ +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = 1 - \frac{-1}{(x-2)^2} = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \text{, για κάθε } x \in (2,\ +\infty).$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,\ +\infty)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = -\frac{2}{(x-2)^3} < 0 \text{ ,για κάθε } x \in (2,\ +\infty) .$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $(2,\ +\infty)$.

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(x + 1 - \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$$

Επομένως η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Τώρα επειδή:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$$

η C_f δεν έχει οριζόντιες και πλάγιες ασύτμπτωτες στο $+\infty$.

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} |f(x) - (x+1)| dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \left| -\frac{1}{x-2} \right| dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= [\ln|x-2|]_{\lambda}^{\lambda+1} = [\ln(x-2)]_{\lambda}^{\lambda+1} = \ln(\lambda-1) - \ln(\lambda-2) = \ln\frac{\lambda-1}{\lambda-2},\ \lambda > 2$$

Γ4. Έχουμε: $\mathrm{E}(\lambda) > \ln 2 \Leftrightarrow \ln\frac{\lambda-1}{\lambda-2} > \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda-2} > 2 \Leftrightarrow \lambda < 3$

Επομένως $2 < \lambda < 3$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,\ 1)$ και στο $(1,\ +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων). Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$.

Για $x_0 = 0$ έχουμε: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$, αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}(x-1) = -1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ και επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$

Για $x_1 = 1$ (σύμφωνα με τον κανόνα του D'L Hospital):

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1} = \frac{\ln x + 1}{1} = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$ και επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_1 = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ και στο $(1,\ +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2} = \frac{h(x)}{(x-1)^2}$$

με $h(x) = x - \ln x - 1,\ x > 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$h'(x) > 0,\ x > 1$$

$$h'(x) < 0,\ 0 < x < 1$$

Άρα η h έχει ελάχιστο στο $x_1 = 1$ και επομένως $h(x) \geq h(1) = 0$.

Άρα:

- $h(x) > 0,\ x \in (0,1)$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\ 1)$ και επειδή η f είναι συνεχής στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ 1]$.
- $h(x) > 0,\ x \in (1,+\infty)$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Δ3. Για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = \frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} + \ln x = \frac{-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1-x}{x}} + \ln x = -\frac{\ln x}{1-x} + \ln x = \frac{-\ln x + \ln x - x\ln x}{1-x} = \frac{x\ln x}{x-1} = f(x)$$

Δ4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{e^x\ln e^x}{e^x-1}}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot e^{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{xe^x}{e^x-1}}{xe^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\cdot\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}\right] \quad (1)$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}$ θέτουμε $u=e^x$ και έχουμε:

$$x\to+\infty \Leftrightarrow u\to+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u-1}=1$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}$ θέτουμε $t=\dfrac{1}{x}$ και έχουμε (f συνεχής στο 0):

$$x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{e^{f(t)}}=\frac{1}{e^{f(0)}}=1$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}==\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=1\cdot1=1$$

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-Απόδειξη θεωρήματος, παράγραφος 2.6.

Α2. α) Ψευδής (Ψ)

β) 1ο παράδειγμα (από το σχολικό βιβλίο[2])

Η συνάρτηση $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

2ο παράδειγμα (από το σχολικό βιβλίο)

Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

3ο παράδειγμα (από το θέμα Δ)

Η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(e^x\eta\mu x)=0$$

$$f(0)=0$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Ακόμα:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim_{x\to0^-}\left(-x^{\frac{1}{3}}\right)=0$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to0^-}e^x\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot1=1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Α3. Θεωρία-ορισμός παράγραφος 1.8 στο σχολικό βιβλίο.

Α4. **α)** Λάθος, **β)** Σωστό , **γ)** Λάθος , **δ)** Σωστό, **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $D_f=(0,+\infty)$ και $D_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Για να ορίζεται η fog πρέπει $D_{fog}=\left\{x\in D_g\ /\ g(x)\in D_f\right\}\neq\varnothing$.

---

[2] Εφόσον υπάρχει στο σχολικό βιβλίο δεν απαιτείται απόδειξη της συνέχεια και της μη παραγωγισιμότητας στο $x_0=0$.

Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Άρα $D_{fog} = (0,1)$

Η fog έχει τύπο:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \ln(g(x)) = \ln\frac{x}{1-x},\ x \in (0,1) \ ,$$

Β2.

<u>1ος τρόπος</u>

Η συνάρτηση: $h(x) = \ln\dfrac{x}{1-x},\ x \in (0,1)$

Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g με:

$$h'(x) = \frac{1}{\dfrac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)}$$

(Μπορούμε και $h'(x) = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x(1-x)}$)

Επομένως η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$,άρα και συνάρτηση «1-1», ,οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της h^{-1} αρκεί να βρούμε το σύνολο τιμών της h .

Είναι:

$$h\left((0,1)\right) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x),\ \lim_{x\to 1^+} h(x)\right)$$

Θέτουμε $u = \dfrac{x}{1-x},\ 0 < x < 1$ και έχουμε διαδοχικά:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1-x} = 0$, με $\dfrac{x}{1-x} > 0\ (u \to 0^+)$

  $$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} u = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{1-x} = +\infty$

  $(\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1,\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x) = 0,\ 1-x > 0\ \ \gamma\iota\alpha\ \ 0 < x < 1)$

  $$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της h είναι $h\left((0,1)\right) = \mathbb{R}$, οπότε $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.

Για να βρούμε τον τύπο της h^{-1} έχουμε:

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln\frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y - xe^y = x \Leftrightarrow e^y = xe^y + x \Leftrightarrow$$

$$e^y = x(e^y + 1) \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y+1},\ y \in \mathbb{R}$$

Άρα: $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$

<u>2ος τρόπος:</u>

Θα αποδείξουμε άμεσα ότι η h είναι «1-1»:

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1) = h(x_2)$ έχουμε ισοδύναμα:

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \Leftrightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1\left(1-x_2\right) = x_2\left(1-x_1\right) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης h^{-1} έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\begin{cases} y = h(x) \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \\ x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = \dfrac{x}{1-x} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y - xe^y = x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^y = xe^y + x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = x(e^y+1) \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{e^y}{e^y+1},\ y \in \mathbb{R} \text{ διότι } e^y + 1 > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ισχύει: $0 < \dfrac{e^y}{e^y+1} < 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο:

Β3. Η συνάρτηση: $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Η συνάρτηση φ' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^x\cdot(e^x+1)e^x}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{(e^x+1)e^x\left[(e^x+1)-2e^x\right]}{\left(e^x+1\right)^4}=$$

$$=\frac{e^x(1-e^x)}{\left(e^x+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$\varphi''(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x(1-e^x)}{\left(e^x+1\right)^3}=0\Leftrightarrow e^x(1-e^x)=0\Leftrightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$$

$$\varphi''(x)>0\Leftrightarrow\frac{e^x(1-e^x)}{\left(e^x+1\right)^3}>0\Leftrightarrow e^x(1-e^x)>0\Leftrightarrow e^x>1\Rightarrow x>0$$

Ο πίνακας μεταβολών της φ'' είναι:

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$
$\varphi''(x)$	+	-
$\varphi(x)$	$\cup$	$\cap$

Σ.Κ.

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,0]$ και κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$

Η γραφική παράσταση της $\varphi(x)$ έχει σημείο καμπής το $A\big(0,\ \varphi(0)\big)$, δηλαδή το $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

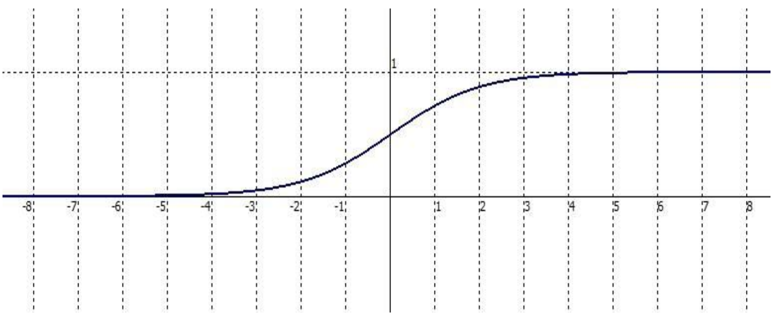
Β4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

Άρα η γραφικη παράσταση της φ έχει στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωση την ευθεία $y=0$ (άξονα $x'x$). Επίσης: $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

Άρα η γραφικη παράσταση της φ έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωση την ευθεία $y=1$.

Η γραφική παράσταση της φ φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\pi]$ με: $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in [0,\pi]$ έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 (x - x_0)$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ αν και μόνο αν:

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)\sigma\upsilon\nu x_0 + \eta\mu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \frac{\pi}{2},\ x \in [0,\pi]$$

Είναι $h(0) = 0$ και $h(\pi) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι η h δεν έχει άλλες ρίζες στο διάστημα $[0,\pi]$.

<u>1ος τρόπος για την μοναδικότητα των δύο ριζών (με μονοτονία)</u>

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,\pi]$) με:

$$h'(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x,\ x \in [0,\pi]$$

Έχουμε:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ή } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ ή } x = \pi\right)$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} < x < \pi$

Ο πίνακας μεταβολών της h' είναι ο επόμενος:

x	0	$\frac{\pi}{2}$ π
h'	-	+
h	↘	↗

- Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και $0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

  Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.
- Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $0 \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ και

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το π.

<u>2ος τρόπος για την μοναδικότητα των δύο ριζών (με άτοπο)</u>

Έστω ότι υπάρχει και τρίτη ρίζα $x_0 \in (0,\pi)$ της εξίσωσης $h(x) = 0$. Έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, \pi]$

- Η h είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,\ x_0)$ και $(x_0,\ \pi)$
- $h(0) = h(x_0) = h(\pi)$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$$

Δηλαδή η εξίσωση:

$$h'(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x = 0 \quad \text{(I)}$$

έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,\ \pi)$, που είναι άτοπο αφού η εξίσωση (I) έχει μόνο μία ρίζα στο $(0, \pi)$, την $x = \frac{\pi}{2}$.

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $[0,\ \pi]$ που είναι το 0 και το π.

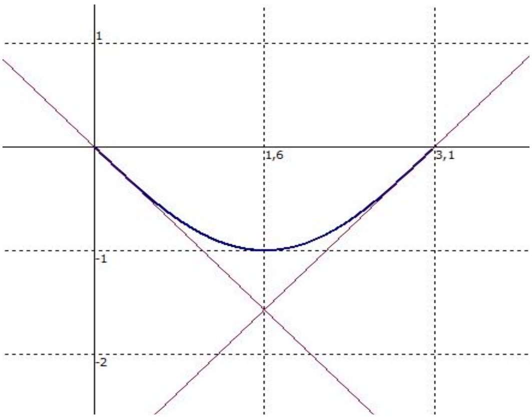
Άρα θα έχουμε δύο ακριβώς σημεία επαφής τα $M_1(0, h(0)),\ M_2(\pi, h(\pi))$

Οι δύο αντίστοιχες εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία M_1 και M_2 είναι:

$$(\varepsilon_1): y = -x$$

$$(\varepsilon_2): y = x - \pi$$

Γ2. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και οι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2):



$$E_2 = \int_0^{\pi} |f(x)dx| = -\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = 2\ \tau.\mu$$

$$E_1 = (OAB) - E_2 = \frac{|\pi| \cdot \left|-\frac{\pi}{2}\right|}{2} - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2\ \tau.\mu$$

Επομένως:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

Γ3. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$f(x)-x+\pi=-\eta\mu x-x+\pi>0 \quad \text{(I) για κάθε } x\in[0,\pi)$$

<u>1ος τρόπος (για τη σχέση (I))</u>

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f''(x)=\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,\pi)$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται «κάτω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο $B(\pi,0)$.

Επομένως ισχύει: $f(x)>x-\pi \Leftrightarrow -\eta\mu x-x+\pi>0,\ x\in[0,\pi)$

<u>2ος τρόπος (για τη σχέση (I))</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=-\eta\mu x-x+\pi,\ x\in[0,\pi]$$

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\pi)$ με $g'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$. Άρα η g είναι

γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Έχουμε:

$$0\le x<\pi \Leftrightarrow g(x)>g(\pi)\Leftrightarrow -\eta\mu x-x+\pi>0$$

<u>3ος τρόπος (για τη σχέση (I))</u>

Για κάθε $x\in[0,\pi)$ ισχύει:

$$|\eta\mu(\pi-x)|<|\pi-x|\Leftrightarrow \eta\mu(\pi-x)<\pi-x\Leftrightarrow \eta\mu x<\pi-x\Leftrightarrow -\eta\mu x-x+\pi>0$$

Άρα το ζητούμε όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\cdot\frac{1}{f(x)-x+\pi}\right]$$

και

$$\lim_{x\to\pi}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=\pi>0$$

$$\lim_{x\to\pi}\left(f(x)-x+\pi\right)=\lim_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x-x+\pi\right)=0, \text{ αφού } f(x)-x+\pi>0.$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$$

Άρα :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\cdot\frac{1}{f(x)-x+\pi}\right]=\pi\cdot(+\infty)=+\infty$$

4ος τρόπος του ερωτήματος Γ3

Θέτουμε $u = \pi - x$, οπότε $\lim\limits_{x\to\pi} u = \lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x) = 0$ και το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim_{x\to\pi}\left[\left(-\eta\mu x + x\right)\cdot\frac{1}{-\eta\mu x - x + \pi}\right] = \lim_{u\to0^+}\left[\left(-\eta\mu(\pi-u)+\pi-u\right)\cdot\frac{1}{-\eta\mu(\pi-u)+u}\right] =$$

$$= \lim_{u\to0^+}\left[\left(-\eta\mu u + \pi - u\right)\cdot\frac{1}{u-\eta\mu u}\right] = \pi\cdot(+\infty)$$

Γ4.

1ος τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,\pi)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = \eta\mu x > 0,\ x\in(0,\pi)$. Άρα η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$, οπότε και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται «κάτω» από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi,0)$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f(x) > x - \pi \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x},\ \text{για κάθε } x\in[1,e]\subseteq(0,\pi)$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^e\frac{f(x)}{x}dx > [x]_1^e - [\pi\ln|x|]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e\frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$$

2ος τρόπος

Για κάθε $x\in[1,e]\subseteq(0,\pi)$ ισχύει:

$$\eta\mu x \le 1 \Leftrightarrow -\eta\mu x \ge -1 \Leftrightarrow \frac{-\eta\mu x}{x} \ge \frac{-1}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \ge -\frac{1}{x}$$

Επειδή η ισότητα δεν ισχύει παντού, είναι:

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^e\frac{f(x)}{x}dx > -[\ln|x|]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e\frac{f(x)}{x}dx > -1 > e-1-\pi$$

αφού $e-1-\pi < -1 \Leftrightarrow e-\pi < 0$

3ος τρόπος

$$\eta\mu e^u \le 1 \Leftrightarrow -\eta\mu e^u \ge -1 \Leftrightarrow f\left(e^u\right) \ge -1$$

Επειδή η ισότητα δεν ισχύει παντού, είναι:

$$\int_0^1 f\left(e^u\right)du > \int_0^1 -1du \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(e^u\right)du > -[u]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(e^u\right)du > -1$$

Θέτουμε $e^u = x \Leftrightarrow u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx$ και έχουμε ισοδύναμα:

$$\int_0^1 f\left(e^u\right)du > -1 \Leftrightarrow \int_1^e\frac{f(x)}{x}dx > -1 > e-1-\pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $[-1,0)\cup[0,\pi] = [-1,\pi]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ (ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,0)$)

Η f είναι συνεχής στο $\left(0,\pi\right]$ (ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $\left(0,\pi\right]$)

Ακόμα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x \eta\mu x\right) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ επομένως η f είναι συνεχής και στο 0 δηλαδή η f είναι συνεχής στο $[-1,\ \pi]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' = \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)' = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$$

Είναι $f'(x) = -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0,\ x\in(-1,0)$,οπότε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x\in(-1,0)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με:

$$f'(x) = (e^x\eta\mu x)' = e^x\eta\mu x + e^x\sigma\upsilon\nu x = e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right)$$

Για $x\in(0,\pi)$ έχουμε:

$e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x$ και αφού $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι:

$$\sigma\varphi x = -1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Εξετάζουμε τώρα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = -\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^+}e^x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x} = 1\cdot 1 = 1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα 0 (σημείο που η f δεν είναι παραγωγίσιμη) και το $\dfrac{3\pi}{4}$ (σημείο μηδενισμού της f').

Δ2. Είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, & x\in[-1,0) \\ e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right), & x\in\left(0,\pi\right] \end{cases}$$

- Αν $x\in[-1,0)$ είναι $f'(x) < 0$

- Αν $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ ισχύει $f'(x) = e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right) \neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$. Είναι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$.
- Αν $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ ισχύει $f'(x) = e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right) \neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ με $f'(\pi) = -e^{\pi} < 0$ άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Ο πίνακας μεταβολών της f' είναι ο επόμενος:

x	-1 0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Μονοτονία της f

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

Ακρότατα της f

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1, το $f(-1) = 1$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$, το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο π, το $f(\pi) = 0$

Σύνολο τιμών της f **:**

<u>1ος τρόπος:</u> Το ολικό ελάχιστο της f είναι το $m = 0$ και το ολικό μέγιστο το $M = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ διότι ισχύει:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} > \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}} > 2$$

Επιπλέον η f είναι συνεχής και άρα το σύνολο τιμών είναι $[m, M] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

2ος τρόπος:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = [-1, 0]$, άρα:

$$f(\Delta_1) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, άρα:

$$f(\Delta_2) = \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, άρα:

$$f(\Delta_3) = \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Επομένως:

$$f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^{\pi} |f(x) - e^{5x}| dx = \int_0^{\pi} |e^x \eta\mu x - e^{5x}| dx \quad (1)$$

Έχουμε: $e^x \eta\mu x - e^{5x} = e^x(\eta\mu x - e^{4x}) < 0$

διότι: $x \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x} \geq 1$ (η ισότητα ισχύει για $x = 0$) και $1 \geq \eta\mu x$ (η ισότητα ισχύει για $x = \frac{\pi}{2}$)

Άρα: $e^{4x} > \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x - e^{4x} < 0 \Leftrightarrow e^x \eta\mu x - e^{5x} < 0$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$E = \int_0^{\pi} (e^{5x} - e^x \eta\mu x) dx = \int_0^{\pi} e^{5x} dx - \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx = \frac{1}{5}[e^{5x}]_0^{\pi} - \mathrm{I} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \mathrm{I},$$

όπου $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx$. Έχουμε:

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} (e^x)' \eta\mu x dx = [e^x \eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x dx = -\int_0^{\pi} (e^x)' \sigma\upsilon\nu x dx = -[e^x \sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx$$

Άρα $I = e^{\pi} + 1 - \mathrm{I} \Leftrightarrow 2\mathrm{I} = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow \mathrm{I} = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$

Επομένως: $\mathrm{E} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^{\pi} + 1}{2} \; \tau.\mu.$

Δ4. 1ος τρόπος: Έχουμε:

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{8\sqrt{2}}{16}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} \quad (2)$$

Προφανής ρίζα της (2) είναι η $x=\frac{3\pi}{4}$.θα αποδείξουμε ότι είναι η μοναδική.

Από το σύνολο τιμών έχουμε:

$$f(x)\le \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(4x-3\pi)^2}{16}\le 0$$

Άρα ισχύει μόνο αν $4x-3\pi=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$

<u>2ος τρόπος</u>

Από το ολικό μέγιστο της f έχουμε:

$$f(x)\le \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow 16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)\le 8\sqrt{2}$$ (3) (Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$)

Επίσης έχουμε: $-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2\le 0$ (4) (Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$)

Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη έχουμε:

$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2\le 8\sqrt{2}$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$. Επομένως η μοναδική ρίζα της δοθείσας εξίσωσης ειναι η $x=\frac{3\pi}{4}$.

ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΛΥΚΕΙΟ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Είναι το Α1 του Ημερησίου Λυκείου 2017.
Α2. Είναι το Α2 του Ημερησίου Λυκείου 2017.
Α3. Είναι το Α3 του Ημερησίου Λυκείου 2017.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 0)$ (ως πολυωνυμική)

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ (ως πολυωνυμική)

Πρέπει η f να είναι είναι συνεχής και στο 0.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2 + x + \beta\right) = \beta$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x + 5\right) = 5$$

$$f(0) = 5$$

Για να είναι η f συνεχής στο 0 πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 5 \Leftrightarrow \beta = 5$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = 2x + 1,\ x < 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1,\ x > 0$

Για $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 + x + 5 - 5}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x + 5 - 5}{x} = 1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$

Β3. Η εξίσωση (ε) της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 6 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 5$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $D_f = [1, +\infty),\ D_g = \mathbb{R} - \{2\}$. Έχουμε: Άρα $D_{fog} = \left[\frac{5}{6},\ 2\right)$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \ /\ g(x) \in D_f\right\}$$

$$\begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{3-5x}{x-2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{3-5x}{x-2} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{5-6x}{x-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (5-6x)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{5}{6} \leq x < 2 \end{cases}$$

Για τον τύπο της fog έχουμε για κάθε $x \in \left[\frac{5}{6},\ 2\right)$:

$$\left(fog\right)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3-5x}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{3-5x}{x-2} - 1} = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}$$

Γ2. Η συνάρτηση :

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}},\ x \in \left[\frac{5}{6},\ 2\right)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$ (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}} \cdot \left(\frac{5-6x}{x-2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}} \cdot \frac{-6(x-2)-(5-6x)}{(x-2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}} \cdot \frac{7}{(x-2)^2},\ x \in \left[\frac{5}{6},\ 2\right)$$

Είναι $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{5}{6},\ 2\right)$ και άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$. Η φ έχει ελάχιστο στο $\frac{5}{6}$, το $\varphi\left(\frac{5}{6}\right) = 0$.

Γ3. Αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$.θα είναι και συνάρτηση «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Για την εύρεση της φ^{-1} έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{5-6x}{x-2} \Leftrightarrow y^2x - 2y^2 = 5-6x \Leftrightarrow x\left(y^2+6\right) = 5+2y^2 \Leftrightarrow x = \frac{5+2y^2}{\left(y^2+6\right)}$$

Άρα $\varphi^{-1}(x) = \frac{5+2x^2}{x^2+6}$ με $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$ αφού είναι το σύνολο τιμών της φ δηλαδή, επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2},\ 2\right)$. Είναι:

$$f\left(\left[\frac{5}{2}, 2\right)\right) = \left[f\left(\frac{5}{2}\right), \lim_{x\to 2^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

αφού $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} = +\infty$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0), (0, \pi]$.Θα αποδείξουμε ότι είναι συνεχής και στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \eta\mu x = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, οπότε η f είναι συνεχής και στο 0.

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία θα βρούμε τα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγος και τα σημεία στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος. Έχουμε:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}(-x)' = -\frac{1}{2\sqrt{-x}},\ x \in [-1,0)$$

Είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,0)$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi]$ με:

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in (0,\pi]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

- Για $x = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x}}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επομένως τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Έχουμε:

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} < 0,\ x \in [-1,0) \text{ και για κάθε } x \in (0,\pi]:$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Ο πίνακας μεταβολών της f η οποία είναι συνεχής παντού είναι ο επόμενος:

x	-1	0 $\qquad \frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Μονοτονία της f

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1,0\right)$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$

Ακρότατα:

- Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$
- Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\dfrac{\pi}{2}$, το $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

Επίσης παίρνει τις τιμές στα άκρα $f(-1)=1$ (μέγιστο) και $f(\pi)=0$ (ελάχιστο)

Δ3. Έστω $x\in\left(0,\pi\right]$. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι:

$$(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\eta\mu x_0=\sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0)$$

Αφού η (ε) πρέπει να διέρχεται από το σημείο $M\left(0,3\right)$ θα έχουμε:

$$3-\eta\mu x_0=\sigma\upsilon\nu x_0\left(0-x_0\right)\Leftrightarrow 3-\eta\mu x_0=-x_0\sigma\upsilon\nu x_0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+3,\ x\in\left[0,\pi\right]$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,\pi\right)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$

Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\pi\right]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων) με:

$$h(0)=3>0,\ h(\pi)=-\pi+3<0$$

Άρα , από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(0,\pi\right)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ-ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

Α2. α) Ψ

β) Για να είναι το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f πρέπει να ορίζεται η εφαπτομένη στο σημείο Α και η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 (να αλλάζει κοίλα). Αν πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4$ και $x_0 = 0$ έχουμε:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 12x^2$.
- $f''(0) = 0$
- Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής το 0 αφού $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και γραφική παράσταση της f (η οποία υπάρχει στο σχολικό βιβλίο στην παράγραφο 2.8).

Α3. Το δ)

Α4. α) Σωστό , β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Λάθος, ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο και άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Β2. Επειδή το ΘΕΖΗ είναι τετράγωνο αν Ε το εμβαδόν του έχουμε:

$$E = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4 \text{ με } EB = x \geq 0,\ BZ = 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \ .$$

Άρα $E = f(x) = 2x^2 - 4x + 4$, $0 \leq x \leq 2$

Β3. Θα μελετήσουμε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,2\right)$ με:

$$f'(x) = 4x - 4,\ x \in (0,2) \ .$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο επόμενος:

x	0 1	2
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Μονοτονία της f

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,1\right]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,2\right]$

Ακρότατα:

Η f έχει έχει ελάχιστο στο 1, το $f(1) = 2$ και μέγιστο στα σημεία 0 και 2 με:

$$f(0) = f(2) = 4$$

Β4. Θα εξετάσουμε αν υπάρχει $x_0 \in \left[0,2\right]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$

Η f είναι συνεχής στο $\Delta_1 = \left[0,1\right]$ και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 θα είναι

$$f(\Delta_1) = [f(1), f(0)] = [2, 4]$$

Η f είναι συνεχής στο $\Delta_2 = [1, 2]$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 θα είναι:

$$f(\Delta_2) = [f(1), f(2)] = [2, 4] .$$

Άρα $f([0, 2]) = [2, 4]$. Επομένως για κάθε $x \in [2, 4]$ ισχύει $2 \le f(x) \le 4$. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$. Έχουμε:

$$2 \le 4e^{x_0} + 1 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le 4e^{x_0} \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le e^{x_0} \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow \ln\frac{1}{4} \le x_0 \le \ln\frac{3}{4}$$

Δηλαδή το $x_0 \in \left[\ln\frac{1}{4}, \ln\frac{3}{4}\right]$ (με $\ln\frac{1}{4} < 0$, $\ln\frac{3}{4} < 0$). Αυτό είνα άτοπο αφού $x_0 \in [0, 2]$. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο x_0 .

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ καθώς και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$, οπότε:

$$E = \int_0^3 |f'(x)|\,dx = -\int_0^2 f'(x)dx + \int_2^3 f'(x)dx =$$

$$= -\big(f(2) - f(0)\big) + f(3) - f(2) = -2f(2) + 2 + f(3)$$

Αφού $\mathrm{E} = 8$ έχουμε:

$$\mathrm{E} = 8 \Leftrightarrow -2f(2) + 2 + f(3) = 8 \Leftrightarrow f(3) - 2f(2) = 6 \quad \text{(I)}$$

Επειδή η f δεν ικανοποιεί τις υποέσεις του Θ.Ε.Τ. στο διάστημα $[0, 3]$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$ (άρα και συνεχής στο $[0, 3]$) πρέπει να ισχύει: $f(0) = f(3) = 2$ (II)

Από τις σχέσεις (I) και (II) προκύπτει $f(2) = -2$.

Τώρα έχουμε (κανόνας του D΄L):

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to1}\big(xf'(x)\big) = \lim_{x\to1} x \cdot \lim_{x\to1} f'(x) = 1\cdot(-3) = -3$$

διότι η f είναι συνεχής (δοθείσα γραφική παράσταση της f) και άρα $\lim\limits_{x\to1} f'(x) = f'(1) = -3$.

Ακόμα έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x) - 2} = \lim_{x\to0}\frac{1}{f'(x)} = -\infty ,$$

διότι $f'(x) < 0$ «κοντά» στο 0 και $f'(0)=0$.

Γ2. Ισχύει: $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ καθώς και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$ και $f'(2) = 0$. Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2, το $f(2) = -2$. Επίσης από το δοθέν σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$
- $f''(1) = 0$ (διότι η $C_{f'}$ δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(1, f'(1))$

Ο πίνακας μονοτονίας-ακροτάτων της f είναι ο επόμενος:

x	0 2	3
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Ο πίνακας για τα κοίλα της f είναι ο επόμενος:

x	0 1	3
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Επομένως:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$
- Η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$, το $f(2) = -2$
- Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 0$ και $x_2 = 3$, το $f(0) = f(3) = 2$
- Η f είναι κοίλη στο $[0,1]$ και κυρτή στο $[1,3]$
- Η f έχει σημείο καμπής στο σημείο $(1, f(1))$

Γ3. Για να μην υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$ θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και η f να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 (διαφορετικά αν $f(x_0) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$ υπάρχει). Τώρα ισχύουν:

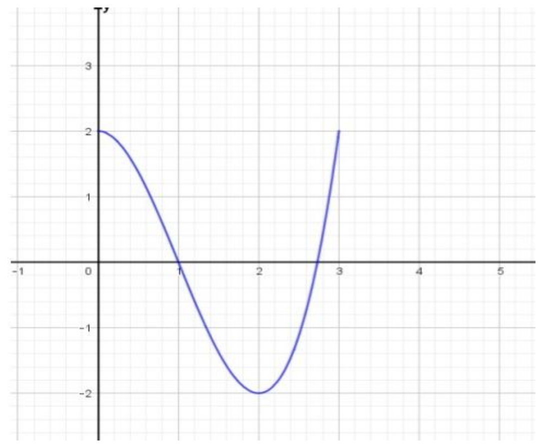
- η f είναι συνεχής στο $[0,3]$
- $f(2)\cdot f(3) = (-2)\cdot 2 = -4 < 0$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$, άρα και συνάρτηση «1-1» το x_0 είναι μοναδικό.
Τώρα έχουμε:

- $2 < x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = -\infty$
- $x_0 < x < 3 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Η Γραφική παράσταση της f αφού λάβουμε υπόψη μας τους παραπάνω πίνακες είναι:



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,2]$ (ως πολυωνυμική).Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^3 - 3x^2 + 2) = 2 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο 2, δηλαδή είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$

Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x, x \in (0,2)$.

Επομένως η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,2]$.

Δ2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\eta\mu x}{x} + a\right) = 2 \Rightarrow -1 + a = 2 \Rightarrow a = 3$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) \\ 3x^2 - 6x & , x \in (0,+\infty) \end{cases}$$

Θέτουμε $g(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x) = x\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.Άρα έχουμε:

$$x < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) = 0$$

Άρα:

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} < 0, \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$$

Η f είναι συχεχής και στο 0 (άρα και στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$). Άρα, επειδή είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Ακόμα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow (x = 0, x = 2)$$

Ο πίνακας προσήμου της f' είναι ο επόμενος:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0 2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	↘	↘	↗

Άρα, αφού η f είναι παντού συνεχής:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

Δ4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2)dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_0^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ έχουμε διαδοχικά:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ge f(x) \ge f(0) \Rightarrow 3 - \frac{2}{\pi} \ge f(x) \ge 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)dx \ge \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx \ge \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2dx \Rightarrow \left(3 - \frac{2}{\pi}\right)\cdot\frac{\pi}{2} \ge \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx \ge 2\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx \le \frac{3\pi}{2} - 1$$

Δ5. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $-\frac{\pi}{2}x,\ -\frac{\pi}{2}e^{-x} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ για κάθε $x \in [0,1]$, προκειμένου να εκμεταλευτούμε το γεγονός ότι στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ η f είναι συνάρτηση «1-1» (ως γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$). Έχουμε:

$0 \le x \le 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2}x \le 0$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le -x \le 0 \Rightarrow e^{-1} \le e^{-x} \le e^{0} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}e^{-1} \ge -\frac{\pi}{2}e^{-x} \ge -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2}e^{-x} \le -\frac{\pi}{2}e^{-1} < 0$

Άρα η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{2}e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - x = 0$$

και έτσι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης στο $[0,1]$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $e^{-x} - x = 0$ στο $[0,1]$. Θέτουμε: $K(x) = e^{-x} - x,\ x \in \mathbb{R}$.

- Η K είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $K(1) = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$

Άρα από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $K(x_0) = 0$. Όμως η K είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$K'(x) = -e^{-x} - 1 < 0,\ x \in \mathbb{R}$, άρα η K είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, δηλαδή και συνάρτηση «1-1», οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2017

ΘΕΜΑ Α (Το ΘΕΜΑ Α ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$h'(x)=\frac{e^x\left(1+e^x\right)-e^xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0\text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα (Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$) .
Β2. Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Επομένως $f(\mathbb{R})=\left(0,1\right)$.

Β3. Η h δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=\frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}}\in\mathbb{R}\,.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ η h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=0$ (ο άξονας $x'x$). Επειδή ακόμα $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$ η h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$ (πλάγιες ασύμπτωτες δεν έχει, αφού:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x}{x(1+e^x)}=0\text{).}$$

Β4. Έχουμε: $\mathrm{I}=\int_0^1 e^xh(x)dx=\int_0^1 e^x\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_0^1\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$

Θέτουμε: $e^{2x}=u\Rightarrow 2x=\ln u\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln u\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u}du$ και έχουμε:

$$x=0\Leftrightarrow u=1$$

$$x=1\Leftrightarrow u=e^2$$

Άρα $I=\int_1^{e^2}\dfrac{u}{1+u}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u}du=\dfrac{1}{2}\int_1^{e^2}\dfrac{1}{1+u}du=\dfrac{1}{2}\Big[\ln(1+u)\Big]_1^{e^2}=\dfrac{1}{2}\Big[\ln(1+e^2)-\ln 2\Big]=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+e^2}{2}$

ΘΕΜΑ Γ (Το ΘΕΜΑ Β ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ)
ΘΕΜΑ Δ (Το ΘΕΜΑ Γ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ)

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία-απόδειξη θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελίδα 216.

Α2. α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση που δίνεται στο σχολικό βιβλίο:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$ η οποία είναι «1-1» και δεν είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη:

«1-1»: Το πεδίο οισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{x_2}\,(\text{απορρίπτεται αφού } x_1\le 0 \text{ και } x_2>0) \\ x_2=\dfrac{1}{x_1}\,(\text{απορρίπτεται αφού } x_2\le 0 \text{ και } x_1>0) \\ x_1=x_2\,(\text{Δεκτή}) \end{cases}$$

Μονοτονία: Είναι $f'(x)=1>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Ακόμα $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$. Επομένως στο $\mathbb{R}$ η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Α3. Θεωρία-διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελίδα 216.

Α4. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f'(x)=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}, x\neq 0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3(x^3+8)>0 \Leftrightarrow x^3(x+2)(x^2-2x+4)>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}<0 \Leftrightarrow x^3(x^3+8)<0 \Leftrightarrow x^3(x+2)(x^2-2x+4)<0$$

Τα πρόσημα των παραγόντων και της παραγώγου της f καθώς και η μονοτονία της φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$\quad$ 0	$\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 0$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)' = \frac{3x^5-(x^3+8)\cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} < 0,\ x \neq 0$$

Επομένως η C_f είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. Στα σημεία $x_0 \neq 0$ η f είναι συνεχής και άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμτωτες.

Για $x_0 = 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ (άξονας $y'y$)

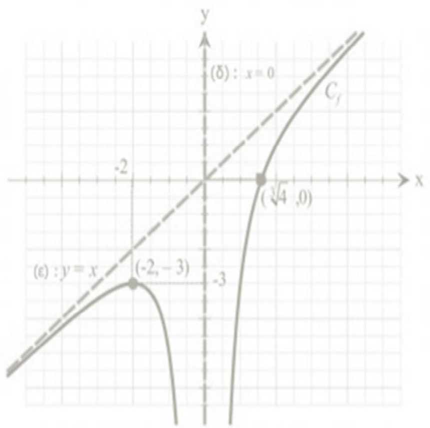
Θα αναζητήσουμε τις πλάγιες-οριζόντιες ασύμτωτες:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3} = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4}{x^2}-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

Άρα η $y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f (η διχοτόμος του 1ου -3ου τεταρτημορίου)

Β4. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα προηγούμενα συμπεράσματα η γραφική παράσταση C_f της f είναι η επόμενη:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω x το μήκος του σύρματος που θα χρησιμοποιήσουμε για το τετράγωνο , τότε $8-x$ το μήκος του σύρματος που θα χρησιμοποιήσουμε για τον κύκλο.

Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha = \frac{x}{4}$ m. Το μήκος του κύκλου L είναι $L = 2\pi\rho$, όπου ρ η ακτίνα του.

Έχουμε:

$$L = 2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}\ m \quad \text{και}$$

$$\mathrm{E}(x) = a^2 + \pi\rho^2 = \frac{x^2}{16} + \pi\frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\ x \in (0,8)$$

Γ2. Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ (ολικό εμβαδό) είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,8)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων σναρτήσεων) με:

$$\mathrm{E}'(x) = \left(\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}\right)' = \frac{1}{16\pi}[\pi+4)x^2 - 64x + 256]' = \frac{1}{16\pi}\big[2(\pi+4)x - 64\big] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\big[(\pi+4)x - 32\big],\ x \in (0,8)$$

Έχουμε:

$$\mathrm{E}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\big[(\pi+4)x - 32\big] = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

$$\mathrm{E}'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\big[(\pi+4)x - 32\big] > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$$

$$\mathrm{E}'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\big[(\pi+4)x - 32\big] < 0 \Leftrightarrow x < \frac{32}{\pi+4}$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η μονοτονία και τα ακρότατα της $\mathrm{E}(x)$:

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{32}{\pi+4}$	8
$\mathrm{E}(x)$	-	+
$\mathrm{E}'(x)$	↘	↗

Η πλευρά του τετραγώνου γίνεται ίση με τη διάμετρο του κύκλου όταν:

$$\frac{x}{4} = \frac{8-x}{2\pi} \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

Άρα για $x = \frac{32}{\pi+4}$ το $\mathrm{E}(x)$ γίνεται ελάχιστο.

Επομένως όταν η πλευρά του τετραγώνου γίνεται ίση με τη διάμετρο του κύκλου, τότε το άθροισμα των δύο εμβαδών ελαχιστοποιείται.

Γ3. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{E}(x) = \frac{16}{\pi}$

Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$, άρα το σύνολο τιμών της είναι στο Δ_1 είναι το: $\left[\mathrm{E}(0),\ \mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$.

Έχουμε:

$$5 \in \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right) \Leftrightarrow \frac{16}{\pi+4} \le 5 < \frac{16}{\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\pi < 16 \\ 5(\pi+4) \ge 16 \end{cases}$$

και άρα υπάρχει $x_0 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $E(x_0) = 5$. Το x_0 είναι μοναδικό, αφού η $\mathrm{E}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα και «1-1» στο Δ_1.

Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4},\ 8\right)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι στο Δ_2 είναι το: $\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\ \mathrm{E}(8)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$.

Έχουμε ότι $5 \notin \Delta_2$ και άρα δεν υπάρχει $x_0 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $E(x_0) = 5$

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,8)$ τέτοιο, ώστε $E(x_0) = 5$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-a} - x^2,\ a > 1$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής , στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x,\ x \in \mathbb{R}$$

Ακόμα η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη, στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με: $f''(x) = 2e^{x-a} - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 1 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} < 1 \Leftrightarrow x - a < 0 \Leftrightarrow x < a$$

Ο πίνακας για την κυρτότητα και τα σημεία καμπής είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$ α	$+\infty$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Άρα η παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το $A(a,\ f(a))$ η $A(a, 2 - a^2)$.

Δ2. Έχουμε:

$$f'(\alpha) = 2e^{a-a} - 2a = 2 - 2a = 2(1-a)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2e^{x-a} - 2x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-a} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[2e^{x-a}\left(1-\frac{x}{2e^{x-a}}\right)\right] = +\infty$$

(με χρήση του κανόνα De L΄Hospital αφού πληρούνται οι προϋποθέσεις). Έχουμε:

- Η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ a]$, διότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\ a]$. Αφού η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,\ a]$ (ως παραγωγίσιμη στο $(-\infty,\ a]$) είναι $f'((-\infty,\ \alpha]) = [\,f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)) = [2-2\alpha,\ +\infty)$.
- Η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\ +\infty]$, διότι η f είναι κυρτή στο $[\alpha,\ +\infty]$. Αφού η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\ +\infty]$ (ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\ +\infty]$) είναι $f'((\alpha,\ +\infty]) = [\,f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)) = [2-2\alpha,\ +\infty)$.

Ισχύει $0 \in [2-2\alpha, +\infty)$ (αφού $0 > 2-2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha > 2 \Leftrightarrow a > 1$ που είναι αληθής).

Άρα $0 \in f'([\alpha,\ +\infty])$ και $0 \in f'([-\infty,\ \alpha])$.

Επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μοναδική ρίζα $x_1 \in (-\infty,\ a]$και μία μοναδική ρίζα στο $x_2 \in [\alpha,\ +\infty]$ (αφού η $f'(x)$ είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα).

Έχουμε:

- $x < x_1 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$)
- $x > x_1 \Rightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, +\infty)$).
- $\alpha < x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, x_2)$).
- $x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_2, +\infty]$).

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα συμπεράσματα για την η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της C_f .

x	$-\infty$ $\quad x_1$	α	x_2	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	+	+
$f'(x)$	↘	↘	↗	↗
$f(x)$	∩	∩	∪	∪

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο α, άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$. Επομένως η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in (-\infty, \alpha]$ και μοναδικό τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in [\alpha, +\infty]$.

Δ3. Αφού $f'(x_1) = 0 \Rightarrow 2e^{x-a} - 2x = 0 \Rightarrow e^{x-a} = x_1$. Όμως:

$$x_1 \in (-\infty,\ a] \Rightarrow x_1 < a \Rightarrow x_1 - a < 0 \Rightarrow e^{x_1 - a} < 1 \Rightarrow x_1 < 1$$

$x_1 < 1 < a < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(1) > f(a) > f(x_2)$ (αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$)

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (a, x_2).

Δ4. Για $\alpha = 2$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = 2e^{x-2} - x^2 \text{ και } f'(x) = 2e^{x-2} - 2x.$$

ίναι $f(2) = -2,\ f'(2) = -2$ και άρα η εξίσωση της εφαπτομένηςτης C_f στο σημείο $A(2, -2)$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 2$$

Ισχύει: $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f'(2)(x-2) + f(2)$ (αφού η f είναι κυρτή στο $[0,\ 3]$)

Έχουμε:

$$f(x) \geq -2x + 2 \Rightarrow f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2} \Rightarrow f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq -2(x-1)\sqrt{x-2}$$

Άρα:

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2}\,dx \geq \int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}\,dx = I$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα I: Θέτουμε $u = x - 2$ καιέχουμε:

$$u = x - 2 \Rightarrow x = u + 2 \Rightarrow dx = du$$

$$x = 2 \Rightarrow u = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow u = 1$$

Άρα :

$$\int_0^1 -2(u+1)\sqrt{u}\,du = -2\int_0^1 u\sqrt{u}\,du - 2\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \ldots = -\frac{32}{15}$$

Επομένως:

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2}\,dx \geq -\frac{32}{15}$$

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α (Το ΘΕΜΑ Α των Ημερησίων Λυκείου 2018)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$, αφού για $x > 3$ και $x < 3$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Πρέπει:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3^+}(2ax+6) = \lim_{x\to 3^-}[-x^2+(3-a)x+3a] \Leftrightarrow 6a+6=0 \Leftrightarrow a=-1$$

Β2. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 3$, αφού για $x > 3$ και $x < 3$ είναι παραγωγίσισμη ως πολυωνυμική.

Πρέπει τα όρια $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$, $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ να υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον να ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{-x^2+4x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{-(x-3)(x-1)}{x-3} = -\lim_{x\to 3^+}(x-1) = -2$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{-2x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{-2(x-3)}{x-3} = -2$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ επομένως είναι παραγωγίσιμη και στο $\mathbb{R}$.

Β3. Στο διάστημα $[3,+\infty)$ η συνάρτηση είναι $f(x) = -x^2+4x-3$ η οποία ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $[3,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = -2x+4$, $f'(x) = -2x+4, x>3$ (από το ερώτημα Β2 είναι $f'(3) = -2$).
Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$
$$x > 3 > 2 \Rightarrow -2x+4 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ (Το ΘΕΜΑ Β των Ημερησίων Λυκείου 2018)

ΘΕΜΑ Δ (Το ΘΕΜΑ Γ των Ημερησίων Λυκείου 2018)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ-ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η απόδειξη της σελίδας 145 του Σχολικού Βιβλίου.
Α2. Ο Ορισμός της σελίδας 15 του Σχολικού Βιβλίου.
Α3. Της Τ μπορεί να είναι η f .
Της Η μπορεί να είναι η g .
Α4. α) Ψευδής.
β) Το παράδειγμα της παραγράφου 1.6 στο σχολικό βιβλίο με:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1,\ g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 0} g(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right) = 1 \neq 0$$

Α5. α) Σωστή **β)** Σωστή **γ)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Για τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$

Β1.

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(1,\ +\infty)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- (πολυωνυμικών)
- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,\ 1)$, ως πολυωνυμική.

Η f Θα πρέπει να είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 1$, δηλαδή πρέπει και αρκεί:
Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α = 1 .
Β2. Η συνάρτηση είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 4)$, με παράγωγο $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσμιμη στο $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=-1$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσμιμη στο $x_0=1$ και άρα η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

Β3. Αν $A_\kappa\left(x_0, f(x_0)\right)$ τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$, τότε πρέπει να ισχύει: $f'(x_0)=-\frac{1}{4}$

Είναι:

- Αν $x_0<1$, τότε $f'(x_0)=2x_0$ και άρα:

$f'(x_0)=2x_0 \Leftrightarrow 2x_0=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=-\frac{1}{8}$. Το αντίστοιχο σημείο είναι:

$$A_1\left(-\frac{1}{8}, f\left(-\frac{1}{8}\right)\right) \quad \text{ή} \quad A_1\left(-\frac{1}{8}, \frac{65}{64}\right).$$

- Αν , $x_0>1$ τότε $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ και άρα:

$f'(x_0)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=\pm 2$ και επειδή $x_0>1$ δεκτή τιμή είναι η $x_0=2$. Το αντίστοιχο σημείο είναι $A_2\left(2, f(2)\right)$ ή $A_2\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

- Αν $x_0=1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά είναι:

- Στο A_1:

$$y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{4}(x+\frac{1}{8}) \Leftrightarrow y-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{32} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$$

- Στο A_2 :

$$y-f(2)=-\frac{1}{4}(x+2) \Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+2$$

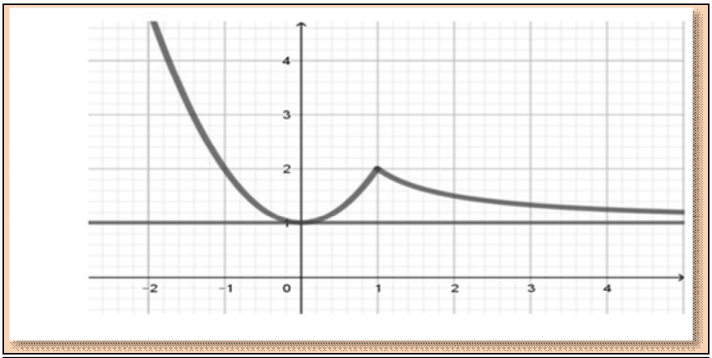
Β4.

- Στο $-\infty$ η f δεν έχει πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες, ως πολυώνυμο 2[ου] βαθμού.
- Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x+1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο επόμενο σχήμα:



Γραφική παράσταση της f

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\pi]$ με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1, x\in[0,\pi]$. Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

Ο πίνακας προσήμου της f' δίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{3}$ π
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

(Το πρόσημο της f' βρίσκεται με την σκέψη ότι επειδή η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών. Δίνοντας μια οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των ριζών π.χ. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1=-1<0$)

Γ2. Η f είναι δύο φορές με $f''(x)=-2\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$. Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,\pi]$ και επομένως η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο Α, εκτός του ίδιου του σημείου Α. Άρα η εφαπτομένη και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινό μόνο το σημείο Α.

Γ3. $\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\pi} (2\eta\mu x - x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2\int_0^{\pi} \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x dx = 2I - J$,

όπου $I = \int_0^{\pi} \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx,\ J = \int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x dx$.

Για το I : Θέτουμε:

$$u = \eta\mu x \Rightarrow du = \sigma\upsilon\nu x$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = \pi \Rightarrow u = 0$$

και άρα $I = 0$. Για το J έχουμε:

$$J = \int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\pi} x(\eta\mu x)'dx = [x\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = 0 + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -2$$

Άρα: $\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx = 2$

Γ4.

α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} - 1\right) = 2\cdot 1 - 1 = 1$$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}[(f(x) - f(2x))\ln x] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x} x\ln x\right] (1)$$

$$K = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - 2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{2x} = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$K = (-1)\cdot 0 = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)\ln(1+x) > x \Leftrightarrow (x+1)\ln(1+x) - x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = (x+1)\ln(1+x) - x > 0, x \geq 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη για $x \geq 0$ με:

$$h(x) = (x+1)\ln(1+x) - x > 0, x \geq 0$$

$$h'(x) = \ln(1+x), x \geq 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 0$. Επομένως:

$$x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1) - x > 0$$

Δ2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1»**.** f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}\cdot x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{(x+1)x^2} = -\frac{h(x)}{(x+1)x^2} < 0$$

$$(h(x) > 0,\ (x+1)x^2 > 0)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και «1-1».

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f που, επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f((0,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (0,1)$$, διότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(0,1)$.

Δ3. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα (αφού $f(x) > 0$):

$$f(x)+1 > 2^{f(x)} \Leftrightarrow \ln(f(x)+1) > f(x)\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)} > \ln 2 \Leftrightarrow f(f(x)) > f(1) \Leftrightarrow f(x) < 1\ (f \searrow)$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής άρα, ισοδύναμα, αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = x(x-2)f(a) + x(x-1)f^{-1}(a) + (x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi), x \in [0,2]$$

Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη:

$$\frac{\mathrm{f}(\alpha)}{\mathrm{x}-1} + \frac{\mathrm{f}^{-1}(\alpha)}{\mathrm{x}-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{\mathrm{x}} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0, x \in (0,1)\cup(1,2)$$

Στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική 2ου βαθμού)
- $g(0) = 2\eta\mu(\alpha\pi) > 0\ (0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha\pi < \pi)$
- $g(1) = -f(a) < 0\ (a > 0 \Leftrightarrow 0 < f(a) < 1)$

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Στο διάστημα $[1,2]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ (ως πολυωνυμική 2ου βαθμού)

- $g(1) = -f(a) < 0 \ (a > 0 \Leftrightarrow 0 < f(a) < 1)$
- $g(2) = 2f^{-1}(a) > 0$ (αφού το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το $(0, +\infty)$).

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. Επειδή η εξίσωση $g(x) = 0, x \in (0,1) \cup (1,2)$ είναι πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού θα έχει το πολύ 2 πραγματικές ρίζες. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0, x \in (0,1) \cup (1,2)$ θα έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

<u>Σχόλιο:</u> Ο βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης $g(x) = 0, x \in (0,1) \cup (1,2)$ είναι 2, διότι ο συντελεστής του x^2 είναι :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (f(a) + f^{-1}(a) + \eta\mu(a\pi))x^2 + (2f(a) - f^{-1}(a) - 3\eta\mu(a\pi))x + 2 \text{ και}$$

$$f(a) + f^{-1}(a) + \eta\mu(a\pi) > 0.$$

Δ5. Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $[1, e]$.

- F συνεχής στο $[1, e]$
- F παραγωγίσιμη στο $(1, e)$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1, e) : F'(\xi) = \dfrac{F(e) - F(1)}{e - 1} \Leftrightarrow f(\xi) = \dfrac{F(e) - F(1)}{e - 1}$. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα [αφού η F είναι αρχική της της f στο διάστημα (0, +∞) έπεται ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$] : Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$1 < \xi < e \Rightarrow f(1) > f(\xi) > f(e) \Leftrightarrow \ln 2 > \frac{e\ln 2 - F(1)}{e-1} > \frac{\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e-1)\ln 2 > e\ln 2 - F(1) > \frac{(e-1)\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow \frac{(e-1)\ln(e+1)}{e} < e\ln 2 - F(1) < (e-1)\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(e-1)\ln(e+1) - e^2\ln 2}{e} < -F(1) < (e-1)\ln 2 - e\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e\ln 2 - (e-1)\ln 2 < F(1) < \frac{e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 < F(1) < \frac{e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow \frac{e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e} < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1) < \ln 2^{e+1} - \ln(e+1) \Leftrightarrow e^2\ln 2 - (e-1)\ln(e+1) < e\ln 2^{e+1} - e\ln(e+1)$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής και άρα αποδείχθηκε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2018

ΘΕΜΑ Α (Το ΘΕΜΑ Α των επαναληπτικών εξετάσεων Ημερησίου-Εσπερινού Λυκείου 2018)
ΘΕΜΑ Β (Το ΘΕΜΑ Β των επαναληπτικών εξετάσεων Ημερησίου-Εσπερινού Λυκείου 2018)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1»
Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>1$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0,\ x>1$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, άρα και «1-1».
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f που, επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^x}{x}=e,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(e,+\infty)$.

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=x(x-2)f(a)+x(x-1)f^{-1}(a)+(x-1)(x-2)(\eta\mu a-2),\ x\in[0,2]$$

Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη:

$$\frac{f(a)}{x-1}+\frac{f^{-1}(a)}{x-2}+\frac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0\ \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0,\ x\in(0,1)\cup(1,2)$$

Στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολυωνυμική 2ου βαθμού)
- $g(0)=2\eta\mu a-2=2(\eta\mu\alpha-1)<0\ (-1<\eta\mu\alpha<1,\ \alpha>e)$
- $g(1)=-f(a)<0\ (a>1\Leftrightarrow f(a)>e)$

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Στο διάστημα $[1,2]$ έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$(ως πολυωνυμική 2ου βαθμού)
- $g(1)=-f(a)<0\ (a>0\Leftrightarrow 0<f(a)<1)$
- $g(2)=2f^{-1}(a)>0$ (αφού το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το$(1,+\infty)$).

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Επειδή η εξίσωση $g(x)=0, x\in(0,1)\cup(1,2)$ είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού θα έχει το πολύ 2 πραγματικές ρίζες.
Άρα η εξίσωση $g(x)=0, x\in(0,1)\cup(1,2)$ θα έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Σχόλιο: Ο βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης $g(x)=0, x\in(0,1)\cup(1,2)$ είναι 2, διότι ο συντελεστής του x^2 είναι :

$g(x)=0\Leftrightarrow (f(a)+f^{-1}(a)+(\eta\mu\alpha-2)x^2+(2f(a)-f^{-1}(a)-3(\eta\mu\alpha-2))x+2\eta\mu(\alpha-2)$ και

$f(a)+f^{-1}(a)+\eta\mu\alpha-2>0$.

Γ3. Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f(x)+1 > e+\ln f(x) \Leftrightarrow e^{f(x)+1} > e^{e+\ln f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot e > e^{e}\cdot e^{\ln f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e\cdot e^{f(x)} > e^{e} f(x) \Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{f(x)} > \frac{e^{e}}{e} \Leftrightarrow f(f(x)) > f(e) \Leftrightarrow f(x) > e \ (f \nearrow)$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής και , ισοδύναμα, αποδείχθηκε το ζητούμενο.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\pi]$ με: $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1,\ x\in[0,\pi]$.
Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

Ο πίνακας προσήμου της f' δίνεται στον επόμενο πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{3}$ $\qquad\qquad$ π
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

(Το πρόσημο της f' βρίσκεται με την σκέψη ότι επειδή η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών. Δίνοντας μια οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των ριζών π.χ.
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1=-1<0$)

Δ2. Η f είναι δύο φορές με $f''(x)=-2\eta\mu x, x\in[0,\pi]$. Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,\pi]$ και επομένως η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο A, εκτός του ίδιου του σημείου Α. Άρα η εφαπτομένη και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινό μόνο το σημείο A.

Δ3. $\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\pi}(2\eta\mu x - x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2\int_0^{\pi}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x dx = 2I - J$,

όπου $I=\int_0^{\pi}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx,\ J=\int_0^{\pi}x\sigma\upsilon\nu x dx$.
Για το I : Θέτουμε:

$$u=\eta\mu x \Rightarrow du=\sigma\upsilon\nu x$$

$$x=0\Rightarrow u=0$$

$$x=\pi\Rightarrow u=0$$

και άρα $I=0$. Για το J έχουμε:

$$J=\int_0^{\pi}x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\pi}x(\eta\mu x)'dx=[x\eta\mu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=0+[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=-2$$

Άρα: $\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx = 2$

Δ4.

α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} - 1\right) = 2\cdot 1 - 1 = 1$$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(f(x) - f(2x)\right)\ln x\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x}x\ln x\right](1)$$

$$K = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - 2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{2x} = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x\ln x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$K = (-1)\cdot 0 = 0$$

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

"Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y".

β) i) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 35:

«Μια συνάρτηση $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη αν η συνάρτηση f είναι «1-1» (ένα προς ένα) στο Α.»

ii) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 36:

<u>1η Διατύπωση:</u> *«Μια συνάρτηση $g:\ f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$ ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της »*

Εναλακτικά μπορε΄να δοθεί και ο ορισμός:

<u>2η Διατύπωση:</u> «*Έστω μια συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $f(A)$ (δηλαδή το σύνολο τιμών της f) και $x \in A,\ y \in f(A)$. Αν η f αντιστοιχεί το y στο x και η g αντιστοιχίζει το x στο y και αντιστρόφως, τότε η g ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} .»*

<u>3η Διατύπωση:</u> *«Μια συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f ($f(A)$), που συμβολίζεται με f^{-1}, ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f αν ισχύει η ισοδυναμία:*

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \quad \text{για όλα τα } x \in A,\ y \in f(A) \text{ »}$$

Η η λεκτική διατύπωση: «ισχύει $f(x) = y$ αν και μόνο αν *$f^{-1}(y) = x$ »*

Α2. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελίδα 142. Θεώρημα του Fermat.

« Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$ ».

Α3. Απόδειξη Θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ..Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$,οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α4. α) Λάθος . Αιτιολόγηση (Σχόλιο σχολικού βιβλίου).

Η συνάρτηση:

$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι σταθεή στο $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Λάθος. Αιτιολόγηση: (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$ έχει $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$. Όμως $f(1) = 2$

Εναλλακτική αιτιολόγηση:

Οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας υπάρχει το όριο της στο $\mathbb{R}$ όταν $x \to x_0$ και ***ΔΕΝ*** *είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Αυτό σημαίνει ότι*

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Α5. Το (γ) είναι η σωστή απάντηση (Ερώτημα 10- Ερωτήσεις κατανόησης Κεφάλαιο 3ου).

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να έχει η f οριζόντια ασύμπτωστη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$ πρέπει και αρκεί να είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} [e^{-x} + \lambda] = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Β2. Θέτουμε ως συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2,\ x \in [2,3]\ .$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[2,3]$. Έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[2,3]$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[2,3]$).
- $g(2) = e^{-2} > 0$
  $g(3) = e^{-3} - 1 = \dfrac{1-e^{3}}{e^{3}} < 0$

Δηλαδή $g(2)\cdot g(3) < 0$ και άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in (2,3)$, τέτοιο ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0\ .$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2,3]$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[2,3]$ με:

$$g'(\mathrm{x}) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} - 1) < 0\ ,\ \text{για κάθε } x \in (2,3),$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2,3)$.

Επομένως το $x_0 \in (2,3)$ είναι μοναδικό, διότι η συνάρτηση g ως γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2,3)$ είναι και συνάρτηση «1-1» στο $(2,3)$.

B3. Για την απόδειξη του «1-1» στο $\mathbb{R}$.

<u>A΄τρόπος:</u>

Η f είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι συνάρτηση «1-1» στο $\mathbb{R}$.

<u>B΄τρόπος (με την βοήθεια του ορισμού)</u>

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{-x_1} + 2 = e^{-x_2} + 2 \Rightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

άρα η f είναι συνάρτηση «1-1».

Για την εύρεση της αντίστροφης f^{-1} :

Αφού η f είναι συνάρτηση «1-1» υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1}:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $y > 2$ θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$$

Άρα η αντίστροφη της f είναι:

$$f^{-1}(x) = -\ln(x-2),\ x > 2$$

Β4.

Κατακόρηφη ασύμπτωση θα αναζητήσουμε μόνο στο $x = 2$

Έχουμε:

Θα βρούμε το $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right)$. Θέτουμε $x - 2 = u$ και έχουμε

$x \to 2^+ \Leftrightarrow u \to 0^+$. Επομένως είναι:

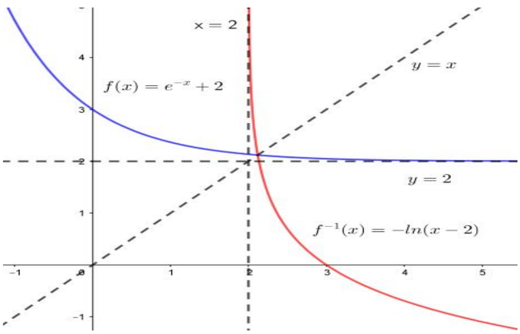
$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right) = \lim_{x\to 0^+}(-\ln u) = -\lim_{x\to 0^+}(\ln u) = +\infty$$

Άρα η κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1} είναι η ευθεία $x = 2$.

Για τη γραφική παράσταση $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1}:

Οι γραφικές παραστάσεις $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο των γωνιών του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου στο σύστημα συντεταγμένων.

Οι γραφικές παραστάσεις των $C_f, C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1} φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 1$. Επομένως στο σημείο $x_0 = 1$ είναι και συνεχής. Άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(e^{x-1} + \beta x) = 1+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + a) = 1+a$$

$$f(1) = 1+a$$

Άρα: $1+a = 1+\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 1$. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό της παραγωγισιμότητας σε ένα σημείο $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της, υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}, \ \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσα:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+ax-1-a}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+a\right] = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+a = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}}{1}+a = 1+a$$

Άρα: $1+a = 2 \Leftrightarrow a = 1,\ \beta = 1$.

Γ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ με:

- $f'(x) = 2x > 0$, για κάθε $x \geq 1$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty]$.
- $f'(x) = e^{x-1}+1 > 0$ για κάθε $x < 1$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$.

και αφού η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο

$(-\infty,1)\cup[1,+\infty] = \mathbb{R}$

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε (αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$):

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

διότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{x-1} + x) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 + 1) = +\infty$$

Γ3. i) Η εικόνα του διαστήματος $(-\infty, 0)$ (του αρνητικού ημιάξονα) είναι:

$f\left((-\infty,0)\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 0^-} f(x)\right) = (-\infty, e^{-1})$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty, 0)$.

Αφού $0 \in (-\infty, e^{-1}) = f\left((-\infty,0)\right)$ υπάρχει, τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\infty, 0)$, τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 0$. Το x_0 είναι προφανώς αρνητικό και μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και συνάρτηση «1-1».

ii) Για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0$$

Όμως:

- $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) = 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$
- $f(x) > 0 > x_0 \Rightarrow f(x) - x_0 > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$

Άρα $f(x)\left(f(x) - x_0\right) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ και επομένως η εξίσωση;

$$f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0$$

είναι αδύνατη στο διάστημα $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Το εμβαδόν Ε του τριγώνου MOK είναι:

$$E = \frac{1}{2}(OK)\cdot(KM) = \frac{1}{2}x_K \cdot y_M \quad (1)$$

όπου x_K η τετμημένη του σημείου Κ και y_M η τεταγμένη του σημείου Μ.

Αφού $x_K = x \geq 1,\ y_M = x^2 + 1$ η (1) γίνεται:

$$E = \frac{1}{2}x(x^2+1),\ x \geq 1$$

Επειδή το $x_K = x$ είναι συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t)(x^2(t)+1),\ x(t) \geq 1$$

Ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ είναι η παράγωγος ως πος t:

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left(3x^2(t)x'(\mathrm{t}) + x'(\mathrm{t})\right)$$

Για $t = t_0$ είναι $x'(\mathrm{t}) = 2, x(t_0) = 3$ και άρα:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\left(3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2\right) = 28 \text{ τ.μ. ανά δευτερόλεπτο.}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι: $f(1) = 1, f'(1) = -1$. Άρα $f(1) = \alpha + \beta = 1$ (1).

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(\mathrm{x}) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + a,\ x \in \mathbb{R}$$

Άρα:

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \ln 1 + 0 + a = -1 \Leftrightarrow a = -1$$

και από την (1) προκύπτει $\beta = 2$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E} = \int_1^2 \left| f(x) - (-x+2) \right| dx = \int_1^2 \left| f(x) + x - 2 \right| dx = \int_1^2 \left| (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2 \right| dx =$$

$$= \int_1^2 \left| (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) \right| dx \quad (2)$$

Επειδή για κάθε $x \in [1,2]$ είναι $(x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) > 0$ διότι:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \end{cases}$$

Το εμβαδόν Ε γίνεται λόγω της (2):

$$E = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2 - 2x + 2)'\ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

Θέτουμε: $u = x^2 - 2x + 2$ και άρα $du = (x^2 - 2x + 2)'\mathrm{dx}$ και για $\begin{matrix} x = 1 \Leftrightarrow u = 1 \\ x = 2 \Leftrightarrow u = 2 \end{matrix}$.

Άρα:

$$E = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2}\int_1^2 (u)' \ln u du = \frac{1}{2}\Big[u \ln u\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 u(\ln u)' du = \ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 1 du =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\Big[u\Big]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3. i) Από το Δ1 ερώτημα έχουμε:

$$f'(\mathrm{x}) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$f'(\mathrm{x}) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 2x + 2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0$$

$$\ln(x^2 - 2x + 2) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2)$$

$$\frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} > 0$$

Άρα $f'(\mathrm{x}) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) **<u>Α΄τρόπος</u>**

Η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται διαδοχικά:

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \quad (\text{I})$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφοικού Λογισμού για την συνάρτηση f

στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ αφού:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right]$ (ως συνεχής στο $\mathbb{R}$)
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)

Επομένως υπάρχει

$$\xi \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right):\ f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda} \Rightarrow f'(\xi)=2\left[f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right] \quad \text{(II)}$$

Όμως $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και :

$$f'(\xi) \geq -1 \Leftrightarrow 2\left[f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right] \geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

που είναι ισοδύναμη (I)

Β΄τρόπος:

Έχουμε:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)-\lambda+\frac{3}{2},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Η ζητούμενη σχέση γίνεται διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)-\lambda+\frac{3}{2} \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+1 \Leftrightarrow\right)-\lambda \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2) \quad \text{(I)}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=x\ln(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}$ και η σχέση (I) γίνεται ισοδύναμα:

$$h\left(\lambda-\frac{1}{2}\right) \geq h(\lambda-1) \quad \text{(II)}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την σχέση (II). Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$h'(x) = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε: $h'(x) = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} \geq 0$ (το = ισχύει μόνο για $x = 0$).

Άρα:

- $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.
- $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

και επειδή η h είναι συνεχής και στο 0 η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$-1 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda - 1 < \lambda - \frac{1}{2} \Leftrightarrow h(\lambda-1) < h\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

(προφανώς ισχύει και $h(\lambda-1) \leq h\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$ αν και αυτό που αποδείχθηκε είναι πιο ισχυρό).

Επομένως αποδείξαμε την ισοδύναμη ζητούμενη σχέση.

Δ4. **<u>Α΄τρόπος</u>**

Έστω $A(x_1, f(x_1)),\ B(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g με τις εφαπτομένες τους αντίστοιχα. Πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι:

(ε_1) $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1 + f(x_1)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο Β είναι:

(ε_2)

$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)x - g'(x_2)x_2 + g(x_2)$

Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) συμπίπτουν (αφού δέχονται κοινή εφαπτομένη) και άρα έχουμε:

$$f'(x_1) = g'(x_2)$$
$$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

Ισχύουν:

$$f'(x_1) = g'(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) = -3x_2^2 - 1$$

$$f'(x_1) \geq -1 \Leftrightarrow -3x_2^2 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow -3x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Για $x_2 = 0$ έχουμε:

$$f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} - 1 = -1 \Leftrightarrow \ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) = 0 \\ \dfrac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 1$$

Για τις τιμές $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ επαληθεύεται και η σχέση:

$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$ (αφού τότε $f'(1) - f(1) = g(0) \Leftrightarrow -1 = -1$).

Άρα οι τιμές $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ είναι δεκτές αφού επαληθεύουν όλες τις σχέσεις και άρα η κοινή εφαπτομένη είναι:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \Leftrightarrow y = -(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Οι τιμές των $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ που επαληθεύουν το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι μοναδικές και άρα η κοινή εφαπτομένη είναι μοναδική.

Β΄τρόπος:

Η συνάρτηση g είναι παραγωίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -3x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Έστω $A(x_1, f(x_1)),\ B(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g με τις εφαπτομένες τους αντίστοιχα. Πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$.

Από το ερώτημα Δ3i) έχουμε $f'(x_1) \geq -1$ και το = ισχύει μόνο για $x_1 = 1$ (η f είναι «1-1»). Επίσης $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$ και το - ισχύει μόνο για $x_2 = 0$

Άρα τα σημεία επαφής είναι $A(1, f(1))$ και $B(0, g(0))$ τα οποία είναι μοναδικά αφού τα $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ είναι μοναδικά.

Η εξίσωση επομένως της κοινής εφαπτομένης τους είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 2 \text{ ή}$$

$$y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 2 = -x \Leftrightarrow y = -x + 2$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ-ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία **Α2.** Θεωρία **Α3.** Θεωρία

Α4. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A = D_{fog} = \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)-2} = \sqrt{x^2-1},\ x \in A$$

Β2.

$$\lambda = \lim_{x\to\infty}\frac{(gof)(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[(gof)(x) - x] = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1} - x) = 0$$

Άρα η $y = \lambda x + b$ είναι η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Β3.

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+}\left[\sqrt{x^2-1}\,\frac{1}{x-2}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-}\left[\sqrt{x^2-1}\,\frac{1}{x-2}\right] = +\infty$$

και επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 2} h(x)$

Β4. Είναι:

$$t(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, x \in A \\ 1-x^2, \quad x \in (-1,1) \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{t(x)-t(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x^2)\eta\mu(\pi x)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}(x+1)\eta\mu(\pi x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{t(x)-t(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}\ \eta\mu(\pi x)}{x-1} = -\pi\lim_{x\to 1^+}\left[\sqrt{x^2-1}\,\frac{\eta\mu(\pi-\pi x)}{\pi-\pi x}\right] = 0$$

Άρα η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$

Άρα:

- Η $t(x)$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).
- Η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων).
- $t(0) = t(2) = 0$

Άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,2]$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x>0$ έχουμε διαδοχικά και ισδύναμα:

$$f(x)f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]' = (x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x + c$$

Για $x = 1 \Rightarrow f^2(0) = 0 + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f^2(x) = x \Rightarrow |f(x)| = x,\ x > 0$. Επειδή:

$$f^2(x) = x \Rightarrow |f(x)| = x,\ x > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

και η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι $f(1) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$.

Γ2. Έστω $M\left(x,\sqrt{x}\right), x>0$ το σημείο της C_f και $A\left(\frac{3}{2},0\right)$. Η απόσταση των Μ και Α είναι:

$$d(x) = (MA) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + x},\ x > 0$$

Έχουμε:

$$d'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + x}}, x > 0$$

Η d έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και άρα $M(1,1)$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,1)$ είναι (ε) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K(-1,0)$.

Επιπλέον η f ειναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ και επομένως η (ε) βρίσκεται πάνω από την C_f .

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \sqrt{x}\right)dx = \ldots = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

Γ4. Θέτουμε την συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - g(x),\ x > 0 \ .$$

Η $h(x)$ είναι συνεχής (ως διαφορά συνεχών) και επιπλέον:

$$h(0) = -g(0) < 0$$

$$h(1) = 1 - g(1) > 0$$

Άρα από το Θ. Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο,ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$$

Για να δείξουμε ότι το x_0 είναι μοναδικό αρκεί να δείξουμε ότι η $h(x)$ είναι «1-1» .

Θα αποδείξουμε ότι η $h(x)$ είναι γνησίως μονοτονη (επομένως και «1-1»).

Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \ (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \ (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) έχουμε:

$\sqrt{x_1} - g(x_1) < \sqrt{x_2} - g(x_2) \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$, δηλαδή η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$) με:

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} > 0,\ x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0),\ (0,1),\ (1, +\infty)$ και επειδή είναι συνεχής και στα σημεία 0 και 1 θα είναι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Θέτουμε :

$$g(x) = f(x) + f(1-x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με: $g'(x) = f'(x) - f'(1-x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$

Άρα η g είναι σταθερή , δηλαδή $x = 0 \Rightarrow g(0) = c \Rightarrow f(0) + f(1) = c \Rightarrow c = 1$.

Για $x = 0 \Rightarrow g(0) = c \Rightarrow f(0) + f(1) = c \Rightarrow c = 1$.

Άρα: $f(x) + f(1-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Για κάθε $x \in [0,1]$ και αφού η f είναι νησίως αύξουσα έχουμε:

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(1) \Rightarrow 0 \le f(x) \le 1$$

Άρα για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει: $f^2(x) \le f(x)$ και άρα έχουμε:

$$\int_0^1 2f^2(x)dx < \int_0^1 2f(x)dx = 2\frac{1}{2} = 1$$

Δ4. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f\left(\varepsilon\varphi x e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\right) \Leftrightarrow f(\eta\mu^2 x) + f(1 - \eta\mu^2 x) = f\left(\varepsilon\varphi x e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = f\left(\varepsilon\varphi x e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\right) \Leftrightarrow f(1) = f\left(\varepsilon\varphi x e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{ημx}}{\text{συνx}} \frac{e^{\text{συνx}}}{e^{\text{ημx}}} = 1 \Leftrightarrow \text{ημx}e^{\text{-ημx}} = \text{συνx}e^{\text{-συνx}} \ \ (\mathrm{I})$$

Θεωρούμε την συνάρτηση: $k(x) = xe^{-x},\ x \in (0,1)$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$k'(x) = (1-x)e^{-x} > 0,\ x \in (0,1)$$

Άρα η $k(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και συνεπώς «1-1». Άρα η (I) γίνεται:

$$k(\text{ημx}) = k(\text{συνx}) \Leftrightarrow \text{ημx} = \text{συνx} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \ \text{(αφού } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\text{)}$$

ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2019

ΘΕΜΑ Α (ΟΜΟΙΟ ΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ Α ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ 2019)
ΘΕΜΑ Β ((ΟΜΟΙΟ ΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ Β ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ 2019)
ΘΕΜΑ Γ
Γ1. ΟΜΟΙΟ ΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ Γ1 ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ 2019)
Γ2. ΟΜΟΙΟ ΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ Γ2 ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ 2019)

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,1)$ είναι (ε) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Η ευθεία ΑΜ έχει συνετελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AM}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$. Άρα $\lambda_{AM}\lambda_\varepsilon=(-2)\frac{1}{2}=-1$ και επομένως $(\varepsilon)\perp AM$.

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_1^2|f(x)|dx=\int_1^2\sqrt{x}dx=...=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\ \tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ
Δ1. ΟΜΟΙΟ ΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ Δ1 ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ 2019)
Δ2. Δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Στο $+\infty$ και στο $-\infty$ είναι:

$$\lambda=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x^3-3x^2+x}=\frac{1}{3}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{3x^2-3x+1}-\frac{1}{3}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-x}{9x^2-9x+3}=\frac{1}{3}$$

Άρα ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$ είναι η $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

Δ3. Πράξεις.
Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx$$

Από τη σχέση: $f(x)+f(1-x)=1$ ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 1dx\Rightarrow E(\Omega)+E(\Omega)=1\Rightarrow E(\Omega)=\frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

Διότι είναι:

$$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx=E(\Omega)$$