ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα. $[\alpha, \beta]$. Αν:

♦ η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ♦ $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2. α) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha > \beta$.

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ. Μία συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x)+1}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(g\left(x^3+1\right)\right) = f\left(g\left(4x^2+2x\right)\right)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Μονάδες 10

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(fog)\left(x^3+4\right) > (fog)\left(3x^2\right).$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\left(e^x - 1\right) - x.$$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν είναι $h(x)=\ln\frac{1}{x}$, να αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=h(x_0).$$

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^2+x^2+2}{f(2)x^2-x+1}.$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x)+2f(x)=x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της f.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 4

Δ5. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to-1}f(x)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=-1$.

Μονάδες 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

ισχύει: $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ με $x_0 \in \mathbb{R}$.

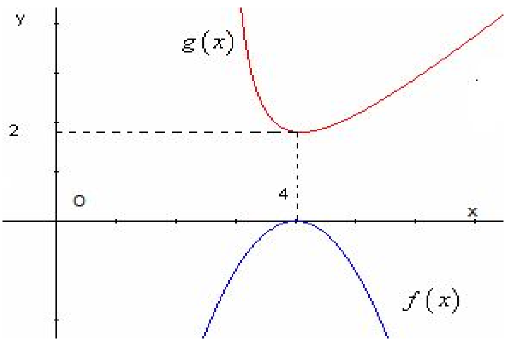
Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή,ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Δίνεται το παρακάτω σχήμα, τότε $\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.



β. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Η f είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

δ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,\ 4]$.

ε. Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^{-1}(-2015)=4$, $f^{-1}(1949)=-1$, τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1 .$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R},$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x .$$

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τα όρια: **α)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ και **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2+\ln^2 x, & 0<x\le e\\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x\end{cases}$$

α. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Αν $\alpha = \frac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2e)$.

Μονάδες 5

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f\left(e^{f(x)}\right) = 4\ln x + 3 \text{ , για κάθε } x > 0 \text{ και}$$

$$(f o f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln\left(\ln x^4 + 3\right)^2 + 1, \text{ για κάθε } x > e^{-\frac{3}{4}}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f o f)(x) = f\left(e^{x-2014}\right)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1» ;

Μονάδες 8

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 7

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση f που είναι «1-1» σε ένα διάστημα Δ είναι πάντα γνησίως μονότονη στο Δ.

β. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f\colon A \to \mathbb{R}$, τότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f\left(A\right)$ της f.

γ. Αν μία συνάρτηση είναι «1-1» τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

δ. Αν για μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ ισχύει $-2015 \le f(x) \le 2015$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή το 2015 και ελάχιστη τιμή το -2015.

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ των αξόνων $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $g\colon\left(0,+\infty\right) \to \mathbb{R}$ που είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(1,-2\right)$. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

Β2. Να λύσετε την ανίσωση: $2\ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(1+f(x)) = 2x - 6 + f(x) \ (1) \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: **i.** Η f αντιστρέφεται, **ii.** $f(3) = 2$

Μονάδες 8+7

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(1+f\left(x^2+x+1\right)\right) = f(1+f(3))$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x-y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$.

Μονάδες 7

Δ2. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να βρείτε την συνάρτηση f.

Μονάδες 8

Δ3. Αν $f(0) \neq 0$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

β. Αν η συνάρτηση f δεν είναι στο συνεχής x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0, τότε δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της $f+g$ στο x_0.

δ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε υπάρχει και το όριο της g στο x_0.

ε. Αν $f(x)=x^x$, $x>0$, τότε $f'(x)=x\cdot x^{x-1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν,

$f(e)=0$ και $f'(x)=\frac{f(x)}{x}-e^{\frac{f(x)}{x}}$, για κάθε $x\geq e$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι: $f(x)=-x\cdot\ln(\ln x)$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$(\ln x)^x=\frac{1}{m},\ x\in(1,+\infty),$$

έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $m>0$.

Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x^2+2\right)-f(3x)<3x-x^2-2.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}, & -1\leq x<0\\[2ex] \alpha^2\ln(x+e)+2\alpha+(\beta^2+\dfrac{1}{2})e^x, & x\geq 0\end{cases}$$

Γ1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\alpha=-1$ και $\beta=0$,

α. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)+1}{x+1}$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Δ1. **α.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-1}{x}$$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(2x)-1}{x}=4f'(0)$$

Μονάδες 4

Δ2. Αν επιπλέον για την f ισχύει:

$$f^2(x)-4f(x)=x^2-3 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

Δ3. Αν είναι:

$$f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτμένων της C_f, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Έστω σημείο M της C_f με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων Ο με ταχύτητα $2m/s$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ.

Μονάδες 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat για μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle**.**

Μονάδες 7

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha,\beta]$.

β. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

γ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ. Αν για τη συνεχή και δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

ε. Αν για μια συνάρτηση f και για ένα σημείο $x_0\in D_f$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Μονάδες 13

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=0.$$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=x\ln x+2x-3,\ x\geq 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,\ e)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f για $x\geq 1$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,\ e)$ τέτοιο, ώστε:

$$(e-1)f'(\xi)+2=3e.$$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2012$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^3+\lambda x^2-3x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, να βρείτε την τιμή του λ.

Μονάδες 5

Για $\lambda = 0$

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Δ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.

Μονάδες 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 **ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$, τότε $f'(x)=\alpha^x$ για κάθε $\alpha>0$.

β. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Αν $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=0$ τοπικό μέγιστο.

δ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f\cdot g$ στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν και τα όρια των συναρτήσεων f και g στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$.

ε. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 3\ln\left(x \cdot e^{1-x}\right) + 2,\ x > 0.$$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $3f(x) + 2011 = 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2},$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Μονάδες 9

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της καθώς και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1),\ x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

Δ1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 6

Δ2. Για $\alpha = e$,

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι ησυνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΘΕΜΑ Α

Α1.Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\alpha<\beta$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

β) $\int_\alpha^\beta f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha), u_2=g(\beta)$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, στον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha, x=\beta$, ισούται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

δ) Αν $f\left(x\right)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[\alpha,\beta\right]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

ε) Ισχύει: $\int_\alpha^\beta \left(f(x)\cdot g(x)\right)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν, $E(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{e}{x}$, $g(x)=\ln x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x=\lambda$, $\lambda>e$.

Μονάδες 15

Β2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E(\lambda)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^x}{x+1}$$

και F μια παράγουσα της στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$ με $F(0)=1$.

Γ1. Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$F(F(x-2019)=1$$

έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι:

$$F(x+2)-F(x+1)>f(x) \text{ για κάθε } x>0.$$

Μονάδες 5

Γ4. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$, να αποδείξετε ότι $E>\frac{3}{2}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\frac{\ln x}{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)\le x-1 \text{ για κάθε } x>0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 4

Δ2. Για $\alpha=1$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\ln^2 x+2\lambda x=0$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,+\infty)$, για κάθε $\lambda<-\frac{1}{e}$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,\,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$1-\ln\xi=\frac{\xi^2}{e^2-e}$$

Μονάδες 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ τέτοιας ώστε να είναι $\int_1^3 f(x)dx=-2$.

Μονάδες 10

Α2. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει: $\alpha=\beta$ αν και μόνο αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f με $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ ισχύει ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\geq 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού 0 στο διάστημα αυτό, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

δ) Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

ε) Αν $f(x)=\int_2^4\sqrt{2+t^2}\,dt$, τότε $f'(3)=0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x>0.$$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτές της.

Μονάδες 10

Β3. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^{e^2} e^x dx \geq \int_1^{e^2} x^e dx .$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x) = -2 + \frac{2}{x},\ g(x) = 3\ln x \text{ με } x \in (0, +\infty)$$

Γ1. Να βρείτε το πρόσημο της διαφοράς: $f(x) - g(x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, $E(\lambda)$, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1,\ x = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \lambda x + 3,\ x > 0 \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$$

Δ1. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $(\varepsilon): y = 3x$ να υπολογίσετε το λ.

Μονάδες 5

Για την τιμή του λ που βρήκατε:

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$.

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

β. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει:

$$f(x) \le g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{, τότε } \lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x) .$$

γ. Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) ,$$

είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

δ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό).

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν η f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3 , να λυθεί η εξίσωση:

$$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f\left(x+3\right)-f\left(x\right)$$, όταν $x\in\left[0,+\infty\right)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot\eta\mu x dx=\pi$, $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f\left(\pi\right)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'\left(0\right)=1$ (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f\left(x\right)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι: $0<\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$

Μονάδες 6

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$

β. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ. Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$,

είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

δ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της , η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

Β1. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 7

Β2. Αν $\alpha=1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Μονάδες 11

Β3. Για την παραπάνω τιμή του α, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Μονάδες 7

Γ2. Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f''.

Μονάδες 11

Γ3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x)\cdot f'(x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1$$

Δ1. Να δείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Δ2. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \lambda x \right)$$

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

β. Αν $f(x)=|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

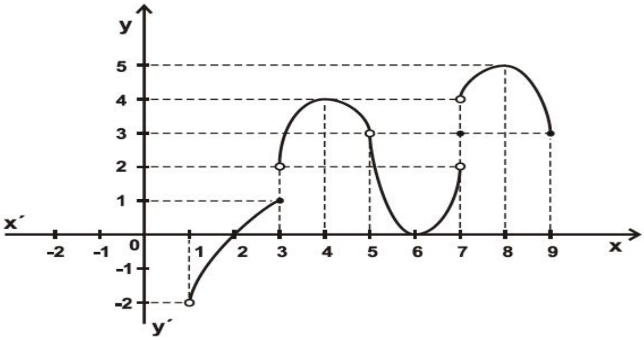
ε. Για κάθε συνάρτηση f , συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, τότε $f(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'\left(x_0\right)=0$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3, x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

Μονάδες 8

Δ3.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

β. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f ,τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$, όπου το x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$$

Μονάδες 4

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2), \text{ για κάθε } x > 1$$

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ-2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=1$

β. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

γ. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

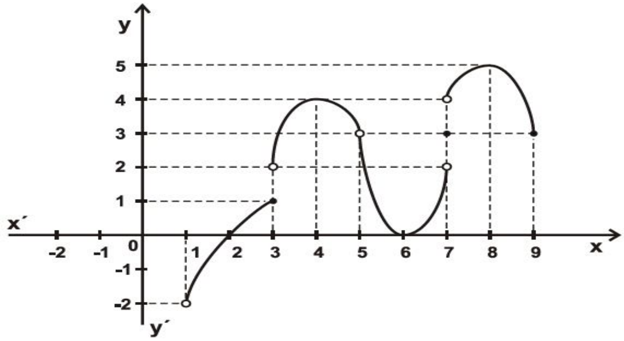
δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$, όπου O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'\left(x_0\right)=0$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\le 0\\ -x+1, & x>0\end{cases}$$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f.

Μονάδες 8

Γ2. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[-1,\ 1]$.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει: $f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)$

Μονάδες 9

Δ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3, x\ge 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\ge 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}\right)=f(x)$

Μονάδες 6

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=\mathbb{R}-\{x/\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Μονάδες 10

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

β. Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f, για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

γ. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα ελάχιστο της f.

δ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$.

ε. Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, τότε $f(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\frac{\alpha x-1}{x+1},\ x\neq -1,$$

όπου το α είναι ένας πραγματικός αριθμός .

Β1. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A\left(3,2\right)$.

Μονάδες 5

Αν $\alpha=3$, τότε:

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η:

$$f^{-1}\left(x\right)=\frac{x+1}{3-x},\ x\neq 3$$

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσων f και f^{-1}.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=x+1-\frac{1}{x-2},\ x>2$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(2,+\infty\right)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = x+1$, $x = \lambda$ και $x = \lambda+1$ με $\lambda > 2$.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in (2, +\infty)$ ισχύει $E(\lambda) > \ln 2$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ln x$.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$.

Μονάδες 5

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής **(μονάδα 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$.

β. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$

γ. Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\ln x,\ x>0 \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x}{1-x},\ x\neq 1$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(fog)(x)=\ln\left(\frac{x}{1\text{-}x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1): $y=-x$ και (ε_2): $y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι :

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi^2}{8}-1,$$

όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\eta\mu x}{\pi-x-\eta\mu x}$

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση: $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής **(μονάδα 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$.

β. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$

γ. Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

ε. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \beta, & x \leq 0 \\ x + 5, & x > 0 \end{cases}$$

Β1. Να δείξετε ότι $\beta = 5$.

Μονάδες 8

Β2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x-1},\ x \geq 1 \ \text{ και } \ g(x) = \frac{3-5x}{x-2},\ x \neq 2.$$

Γ1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 7

Γ2. Αν:

$$\varphi(x) = (fog)(x) = \sqrt{\frac{5\text{-}6x}{x\text{-}2}},\ x \in \left[\frac{5}{6}, 2\right),$$

να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \in [-1, 0) \\ \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 8

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\ (0, \pi)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $M(0, 3)$.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ-ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής **(μονάδα 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Ν*α γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε:

α. η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ. δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε σενεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν η G είναι μια παράγουσα της

f στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

β. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ. Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

δ. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

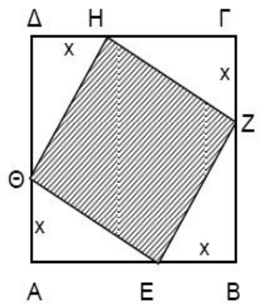
ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε:

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του επόμενου σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ 0 \le x \le 2$$

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

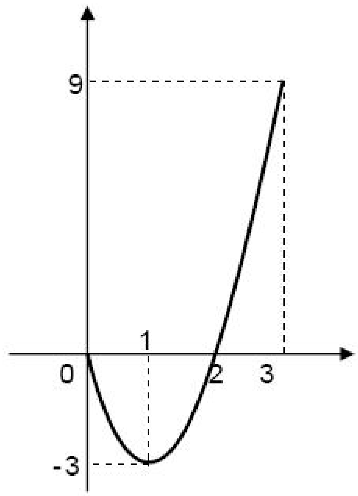
Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1\ cm^2$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2,\ f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν,τα όρια;

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$$

δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0\\ x^3-3x^2+2, & x>0\end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0,2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $\pi<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f(x)dx<\dfrac{3\pi}{2}-1$

Μονάδες 7

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)$$

έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$

Μονάδες 6

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής **(μονάδα 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Ν*α γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε:

α. η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ. δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε σενεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν η G είναι μια παράγουσα της

f στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

β. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ. Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

δ. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε:

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $h(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}, \; x \in \mathbb{R}$

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτηση h.

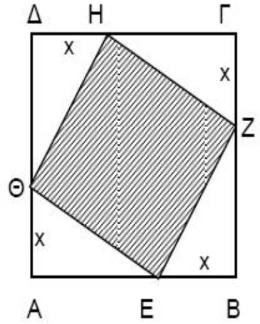
Μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 e^x h(x)dx$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του επόμενου σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Γ1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ 0 \le x \le 2$$

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

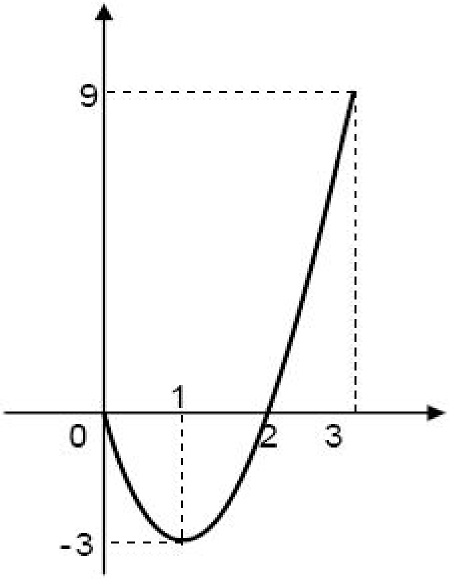
Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0,\ 2]$ για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1\ cm^2$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2,\ f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$$

δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Δ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι «1-1» είναι και γνησίως μονότονη»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι Ψευδής **(Μονάδα 1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελειώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

γ. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

δ. Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

ε. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x - \frac{2}{x^2},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\ x \in (0,8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2,\ x \in \mathbb{R} \quad \text{με } \alpha > 1$$

Δ1.Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha = 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$$

Μονάδες 9

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που είναι «1-1» είναι και γνησίως μονότονη»*

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι Ψευδής **(Μονάδα 1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α (**μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελειώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

γ. Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

δ. Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

ε. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφικήπαράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2\alpha x+6, & x\le 3\\ -x^2+(3-\alpha)x+3\alpha, & x>3\end{cases} \quad \text{με } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Β3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[3,+\infty]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x-\frac{2}{x^2},\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Γ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους $8\ \mathrm{m}$, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους $x\ \mathrm{m}$, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\ x \in (0,8)$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους $8\ \mathrm{m}$, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5\ \mathrm{m}^2$.

Μονάδες 1

ΕΠΑΝΑΠΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ-ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

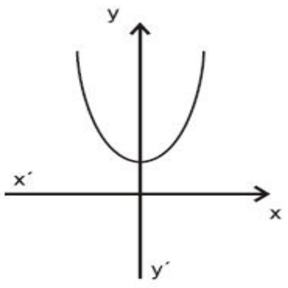
Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 ,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

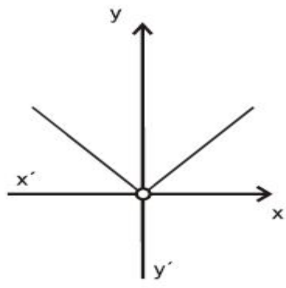
Α2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

Μονάδες 4

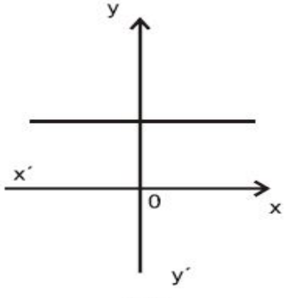
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



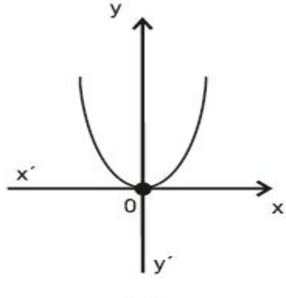
(f)



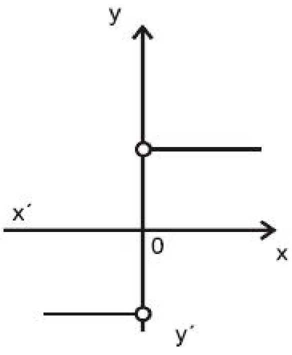
(g)



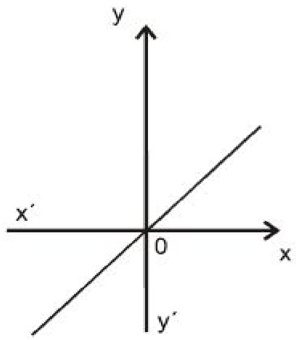
(F)



(G)



(Η)



(Τ)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *, αν ισχύει:*

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ *και* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$*, τότε* $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μονάδα 1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει την ασύμπτωτή της.

β. Αν μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$, τότε ορίζεται η fog με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x}, & x>1\\ x^2+1, & x\le 1\end{cases}$$

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$

Μονάδες 3

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},\ 4\right]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2\eta\mu x-x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$$

Μονάδες 8

Γ4. α. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$ **(μονάδες 2)**

β. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \left[f(x) - f(2x) \cdot \ln x\right]$$ **(μονάδες 5)**

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0, \text{ όπου } 0<\alpha<1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα $(0,\ 1)$ και μία στο διάστημα $(1,\ 2)$

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,\ +\infty)$ με $F(e)=e\ln 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right).$$

Μονάδες 5

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2018

ΘΕΜΑ Α

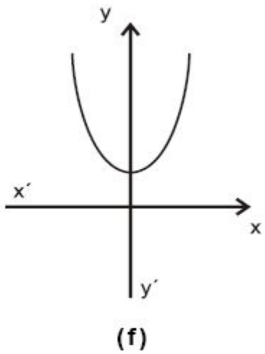
Α1. Έστω μία συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 ,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

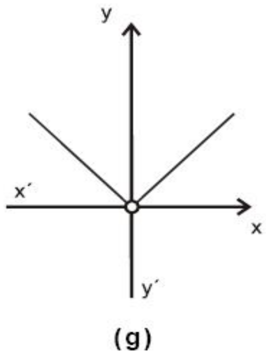
Α2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 4

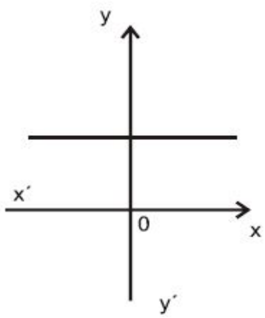
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



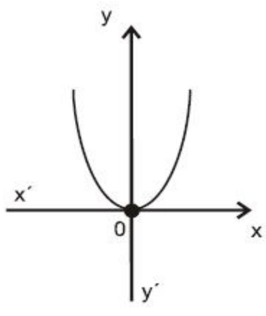
(f)



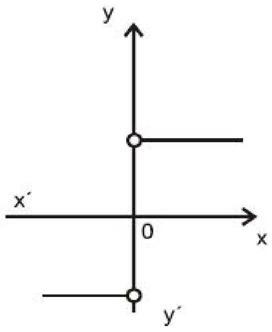
(g)



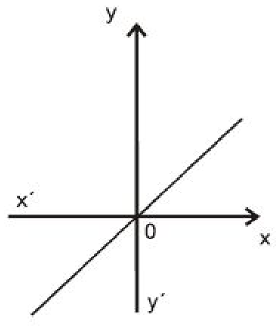
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty \text{, τότε } \lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$$

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής **(μονάδα 1)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α **(μονάδες 3)**

Μονάδες 4

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει την ασύμπτωτή της.

β. Αν μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$, τότε ορίζεται η fog με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x}, & x>1\\ x^2+1, & x\le 1\end{cases}$$

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$

Μονάδες 3

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματοςRolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},\ 4\right]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f{:}\left(1,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $\left(e,\ +\infty\right)$.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0 \text{ , όπου } \alpha>e$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα $(0,\ 1)$ και μία στο διάστημα $(1,\ 2)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $f(x)+1>e+\ln x$ για κάθε $x>1$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon[0,\ \pi]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2\eta\mu x-x$.

Δ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0\in[0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x\,dx$

Μονάδες 8

Δ4. α) Να αποδείξετε ότι : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ **(μονάδες 2)**

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)-f(2x)\cdot\ln x\right]$ **(μονάδες 5)**

Μονάδες 7

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq R$

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α; (Μονάδες 2)

β) i . Πότε μια συνάρτηση $f : A \to R$ έχει αντίστροφη; (Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης .

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σ ς το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό*** *, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη .* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο

$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο Α .

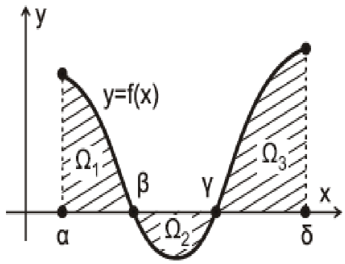
(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f : A \to R$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω1, Ω2 και Ω3 ισχύει ότι Ε(Ω1) =2 , Ε(Ω2)=1 και Ε(Ω 3) =3, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με :



α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in R$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$ **.**

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4) .

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha & ,x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x & ,x<1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική . (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_o\cdot f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΚ τη χρονική στιγμή t_o, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ με τύπο:

$$f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 5

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in R$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \cdot \ln\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in R$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in R$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq R$

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α; (Μονάδες 2)

β) i . Πότε μια συνάρτηση $f : A \to R$ έχει αντίστροφη; (Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης .

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σ ς το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό*** *, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη .* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο

$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο Α .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f : A \to R$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x\text{-}1},\ x\in R\text{-}\{1\}$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη .

Μονάδες 10

Β2. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(2, f(2)\right)$.

Μονάδες 8

Β3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\sqrt{x-2},\ x\geq 2$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης gof .

Μονάδες 10

Γ2. Έστω ότι $h(x)=(gof)(x)=\sqrt{x^2-1},\ x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Να βρείτε την ασύμπτωστη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-\sqrt{3}}{x-2}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ -(x-1)^4+\beta x, & x<1 \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι θετική.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)+x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\left(x_0,+\infty\right)$, όπου x_0 είναι ρίζα του ερωτήματος Δ3.

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ-ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f(x) < 0$ στο (x_0, β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της $f(x_0)$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α, β], ισχύει:

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

δ) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0 .

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και $g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(gof)(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της gof στο $+\infty$.

Μονάδες 6

Β3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $x_0=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{(gof)(x)}{x-2}$.

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\begin{cases}(gof)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases}.$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,2]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$f(x)f'(x)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Μ(1,1). Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0<g(x)<1$ για κάθε $x\geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο $(0,1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\frac{1}{2}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 2f^2(x)dx < 1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\varepsilon\varphi x\ e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}) \ .$$

Μονάδες 9

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f(x) < 0$ στο (x_0, β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της $f(x_0)$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α, β], ισχύει:

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0 .

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ και $g:[2,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ και τύπο $(gof)(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της gof στο $+\infty$.

Μονάδες 9

Β3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $x_0 = 2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \dfrac{(gof)(x)}{x-2}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x)f'(x) = \dfrac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Μ(1,1). Έστω το σημείο $A\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΜ.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ερικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x=1$ και την ευθεία $x=2$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\frac{1}{2}$.

Μονάδες 8

1ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται «1-1» σε ένα σύνολο Α;

Μονάδες 4

Α2. Αν $c > 0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ ($\alpha < \beta$);

Μονάδες 4

Α3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ΄ ανάγκη $f(\beta) > 0$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

δ. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A, τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο A.

ε. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = 2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x \neq 0,\ x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases},$$

και $g(x) = f(x)\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right),\ x > 0$.

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Μονάδες 6

Γ2. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)} \text{ , αν } x>1 \text{ και}$$

$$e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(x-1\right)} \text{ , αν } 0<x<1$$

Μονάδες 4

Γ3. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $\left(0,\ +\infty\right)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A\left(2,\ g(2)\right)$ και $B\left(1,\ g(1)\right)$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}\left(7-3x\right) \leq e^{-x^2}\left(x-1\right), \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2} \geq e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f{:}A \to \mathbb{R},\ A=\left(0,+\infty\right)$ με σύνολο τιμών $f\left(A\right)=\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Μονάδες 6

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι: $f^{-1}\left(x\right)=e^{x}\left(x^2-2x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες 8

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f^{-1}(x)\right), B\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή του.

Μονάδες 5

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μίας συνάρτησης f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Μονάδες 10

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμαπου αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο είναι «κάτω» από τη C_f εκτός από το κοινό τους σημείο.

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α , β , γ $\in$ Δ , τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$$

γ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

δ. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε $f''(x_0) = 0$.

ε. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}+2$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

Μονάδες 6

B3. Να ορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 5

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη .

Μονάδες 4

B5. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=(x^2+1)\cdot \ln x,\ x>0$.

Γ1. Να δείξετε ότι: $2x\ln x+\frac{1}{x}>0$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=0$$

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

Μονάδες 6

Γ4. α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες: $x=\frac{1}{e},\ x=e$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(0) = f(0) = 0,$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln\left(e^x - x\right) = \text{συν}x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \left(e^x - 1\right)\frac{f(x)}{e^x - x}dx$$

Μονάδες 4

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ;

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 10

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

β. Ανάμεσα σε δύο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\beta}^{x} f(t)dt = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + c,\ c \in \mathbb{R}$$

δ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής:

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$$

και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x)\text{-}l\right) = 0$$

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\ln\left(3e^{x}+1\right)-2$$

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

Β3. Να ορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 8

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x\right)<f^{-1}\left(\ln 5-2\right)-2.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=e^{x}-\ln\left(x+1\right)-1$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ2. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 10

Γ3. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln\left(2\alpha+\beta\right)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln\left(\alpha+2\beta-1\right)\le 2,$$

να υπολογίσετε τους α, β.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1, +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + x\ln x}{x\ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ με } f(e) = e^e$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x \cdot \ln x,\ x > 1$ καθώς και ότι οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^x,\ h(x) = \ln x$$

δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1, +\infty)$.

Μονάδες 4

Δ2. α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) = \frac{\lambda}{x}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, $x > 1$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e, f(e))$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (1+e)x - e^2$, για κάθε $x > 1$ **β.** $\int_2^3 f(x)dx \geq e^{e-1} \cdot \frac{5 + 5e - 2e^2}{2}$

Μονάδες 2x3= 6

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$

Μονάδες 3

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α2. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β)**,** τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε συνάρτηση f συνεχή με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \neq 0 \ .$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου: $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

γ. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_o .

δ. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ε. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση C_f της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & \alpha\nu\ \ x<0\\ \lambda, & \alpha\nu\ \ x=0\\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & \alpha\nu\ \ x>0\end{cases}$$

Β1. Να δείξετε ότι $\kappa=2$ και $\lambda=4$.

Μονάδες 8

Β2. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Μονάδες 10

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=2\ln(8x+1)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1)=0,\ \ f'(1)=1$$

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=2\ln x+3,\ \text{για κάθε}\ \ x>0\ .$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-x(2\ln x+1),\ x>0\ .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln x,\ x > 0$.

Μονάδες 5

Γ3. α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

β. Αν ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t) > 1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{fof} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με $1\ \text{cm/sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία $x(t_0) = 2\ \text{cm}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{f(\alpha)\cdot f(\beta)} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \text{ με } \alpha < \beta .$$

Μονάδες 5

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^5 + x^3 + x,\ x \in \mathbb{R}$

Δ1. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 3

β. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x \cdot \left(x^4 + x^2 + 1\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ2. α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1)$

Μονάδες 4

β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2{x_0}^6 + 3{x_0}^4 + 6{x_0}^2 - 12x_0$$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$$3 < \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2 - \xi_1} < 42 \text{ , με } 0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 .$$

Μονάδες 4

Δ4. α. Να αποδείξετε ότι: $3\int_0^1 e^{x^2} dx \geq 4$

Μονάδες 3

β. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του x_0, το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \left|f^{-1}(x)\right| dx$.

Μονάδες 3

5ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) της γραφικής παράστασης C_f μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$;

Μονάδες 4

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\nu}, \nu\in\mathbb{N}-\left\{0, 1\right\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει: $f'\left(x\right)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

Μονάδες 7

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

β. Αν $f(x)=\int_2^4\sqrt{2+t^2}\,dt$, τότε $f'(3)=0$.

γ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε υποχρεωτικά $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left(fof\right)(x) + 2f(x) = 2x + 1 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) = 5$$

Β1. Να βρείτε το $f(5)$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε το $f^{-1}\left(2\right)$.

Μονάδες 6

Β4. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}\left(2x^2 + 7x\right) - 1\right) = 2$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με g παραγωγίσιμη στο $\left(1, \ +\infty\right)$, για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+\alpha) - x + 1 \quad \text{με } \alpha, x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) - 1 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g'(x)\ln x = \frac{2g(x)}{x} \text{ , για κάθε } x > 1$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 3

Γ2. Αν $g(e) = -1$, να δείξετε ότι: $g(x) = -\ln^2 x$, για κάθε $x \in \left(1, +\infty\right)$.

Μονάδες 5

Γ3. Αν $g(x) = -(\ln x)^2$ σε όλο το διάστημα $\left(0, +\infty\right)$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0 \in \left(0, 1\right)$, για την οποία η διαφορά $f(x) - g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε όι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων M, N με $M(\xi, f(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και $N(\xi, g(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi \in (0, +\infty)$, στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία M και N αντίστοιχα.

Μονάδες 4

Γ4.

α. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1^+} \left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$$

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g αντίστοιχα και των ευθειών $x=1$, $x=e$

Μονάδες 4

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1-x) = 0 \ , \ f'(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_0) = 2f(1)$.

Μονάδες 3

Δ3. Έστω η συνάρτηση: $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

Μονάδες 4

Δ4.

α. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x)dx = 1$ καθώς και ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 4

Δ5.

α. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx \text{ , όπου } \lambda > \frac{1}{2} .$$

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln\lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}}$$

Μονάδες 3

6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών **(Μονάδες 2)** και στη συνέχεια να το αποδείξετε (**Μονάδες 4)**

β. Να δώσετε ένα παράδειγμα, σχεδιάζοντας ένα πρόχειρο σχήμα, μιας συνάρτησης f που δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$ **(Μονάδες 2).**

Α2. Να βρείτε το λάθος στον επόμενο συλλογισμό **(Μονάδες 2).** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **(Μονάδες 2).**

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=-I \quad \text{(θέσαμε } x=\frac{1}{u}\text{,}$$

οπότε $dx=-\frac{1}{u^2}du$). Άρα $I=-I$, οπότε $I=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx>0$, επειδή $\frac{1}{1+x^2}>0$, για κάθε $x\in[-1, 1]$.

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$.

β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή $[f(\beta), f(\alpha)]$.

γ) Αν για κάθε συνάρτηση f και για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

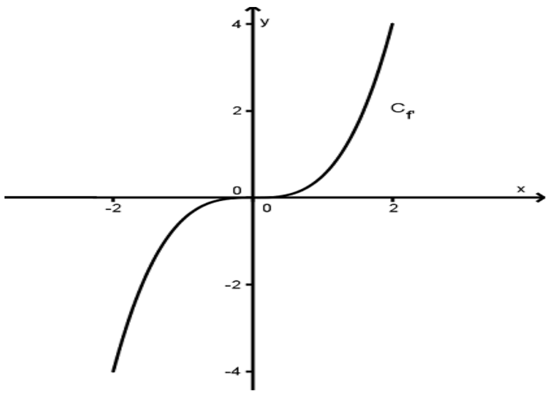
τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) Για όλες τις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις $[\alpha, \beta]$ με: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$ ισχύει $\beta = \gamma\ (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$

Μονάδες 10

Α4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2,\ 2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **(Μονάδες 2)** και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας **(Μονάδα 1)**



Το σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

α. θέση τοπικού μέγιστου της f,

β. θέση τοπικού ελάχιστου της f,

γ. σημείο καμπής της C_f.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(1+f(x)) = 2x - 6 + f(x)\ (1)\ \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$

Μονάδες 7

Β3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(1+f\left(x^2+x+1\right)\right)=f\left(1+f(3)\right)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=e^x+x^2+x,\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha\in(-1,\ 0)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει: $e^\alpha+2\alpha+1=0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι:

$$f(x)\geq \alpha^2-\alpha-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου α ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $f(x)=\dfrac{2017}{2016}$

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x^2+1\right)+f\left(x^2+2\right)<f\left(x^2\right)+f\left(x^2+3\right), \text{ για κάθε } x>0$$

Μονάδες 5

Γ5. Έστω ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0, με $x\left(t_0\right)\in(-1,\ 0)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M, ως προς τον χρόνο, να μηδενίζεται.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = x\eta\mu x, \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f(0) = 0$$

Δ1. α. Να δείξετε ότι: $f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι: $\eta\mu x > x\sigma\upsilon\nu x, \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 2

Δ2. Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = |x\varepsilon\varphi x - x^2|, \; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ3.

α. Αν $\alpha > 0$, να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \alpha$ είναι μηδέν.

Μονάδες 4

β. Έστω x_1, x_2, x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων: $g(x) = 1, \; g(x) = 2, \; g(x) = 3$

αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$(x_2 - x_1)g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)g'(\xi_2) = 2$$

Μονάδες 4

Δ4. α. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln\left[\eta\mu x - f(x)\right] - \ln x + x^2}{\eta\mu^2 x - x\sigma\upsilon\nu x + x}$

Μονάδες 3

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 5

7ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν ισχύουν:

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ,
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Μονάδες 6

Α2 .

α. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 3

β. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού; (Να κάνετε πρόχειρο σχήμα).

Μονάδες 6

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

γ. Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε $f'(x) = \alpha^x$

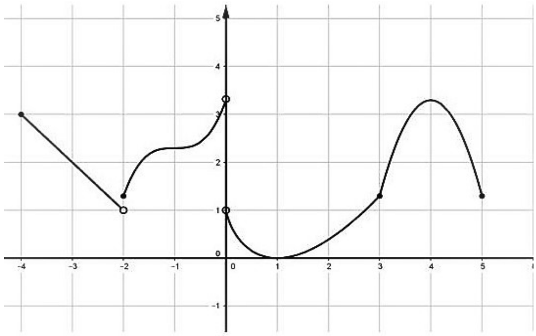
δ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$ **.**

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-4,\ 0) \cup (0,\ 5] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 3

Β2. Να βρείτε το όρια: **α.** $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ και **β.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Μονάδες 4

Β3.

α. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $(0,\ 5]$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την παράγωγο της f, όταν $x \in (-4,\ -2)$.

Μονάδες 2

Β4. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται;

$$I = \int_{2}^{4} f(x)dx \ , \quad J = \int_{-1}^{0} f(x)dx$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Β5. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = x + 1$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

Μονάδες 4

β. Να εξηγήσετε πως με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης fog.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το $A(-1,\ -1)$.

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. Ίσχύει: $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \le |x - y| \le |f(x) - f(y)|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

β. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$$

Μονάδες 6

Γ5. Αν για την παράγουσα F της f' ισχύει:

$$F^2(x) \ge F(x)F(2 - x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της F.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

- ♦ $f(1) = -1$
- ♦ $f'(x) + f(x) + 4e^{x-1} = \ln x + \frac{1}{x} + x + 1$ για κάθε $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}$, $x > 0$

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f'(x) = \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 3

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης: $h(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$, $x = 1$.

Μονάδες 5

Δ5. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση: $g(x) = -f(x)$, $x > 0$.

Αν η ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στα σημεία A_λ, B_λ αντίστοιχα, να βρείτε:

α. Την ελάχιστη τιμή των αποστάσεων $(A_\lambda B_\lambda)$.

Μονάδες 3

β. Τα όρια: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$ και $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1}$,

όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $OA_\lambda B_\lambda$ και O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

8ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α2. α. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

«Αν η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ **».**

Μονάδες 6

β. Ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος; **(Μονάδες 1)**

Αν ναι να το αποδείξετε, αν όχι να δώσετε κατάλληλο αντίπαράδειγμα .

(**Μονάδες 3)**

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ΄ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ΄ ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε x στο $[\alpha, \beta]$.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει: «Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα

$x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ ».

Μονάδες 10.

Για τις προτάσεις που χαρακτηρίσατε ως Λάθος, να βρείτε κατάλληλο παράδειγμα που να επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό σας **(Μονάδες 1).**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση: $g(x)=\dfrac{f(x)}{f^2(x)+1}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f\left(g\left(x^3+1\right)\right)=f\left(g\left(4x^2+2x\right)\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $(fog)\left(x^3+4\right)>(fog)\left(3x^2\right)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

Μονάδες 4

Επιβεβαιώστε γραφικά ότι η συνάρτηση f είναι «1-1», δίνοντας και μία γεωμετρική ερμηνεία για αυτό.

Μονάδες 2

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα κινητό (θεωρήστε το ως σημείο) M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$ ως συναρτήσεις του χρόνου t. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 3

Να δώσετε μία περιγραφή, με φυσική ερμηνεία, του παραπάνω προβλήματος.

Μονάδες 1

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμ

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx\,.$$

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(0)=\frac{1}{2} \text{ και } e^x\cdot f'(x)=f(x)-f'(x)\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

Μονάδες 5

Δ2.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 4

β. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x)) > \dfrac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$

Μονάδες 4

Δ3. Αν $g(x)=\ln x,\ x>0$, να δείξετε ότι: $\left(f o g\right)^{-1}=g^{-1} o f^{-1}$

Μονάδες 3

Δ4.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα $x_0\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

β. Να βρείτε συναρτήσει του x_0 , το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=x$ και $x=0$.

Μονάδες 3

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} f^{-1}(x)dx$

Μονάδες 3

9ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α2. α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 6

β. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή **(Μονάδες 1)**

«Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ».

Αν η πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Κάθε συνάρτηση f που είναι «1-1» είναι και γνησίως μονότονη.

β. Αν $\alpha>1$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$.

γ. Αν f είναι μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

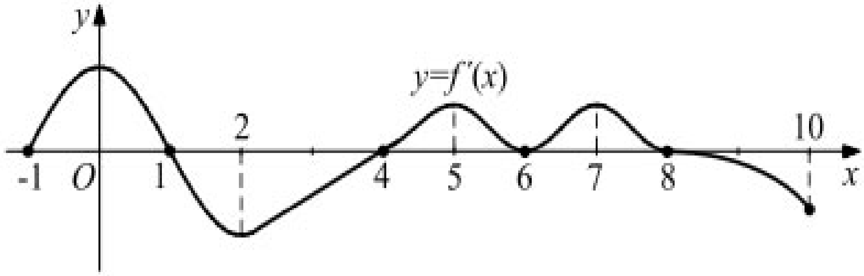
δ. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

ε. Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ $(\beta > \alpha)$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.



Να προσδιορίσετε:

i. τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

ii. τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή και κοίλη.

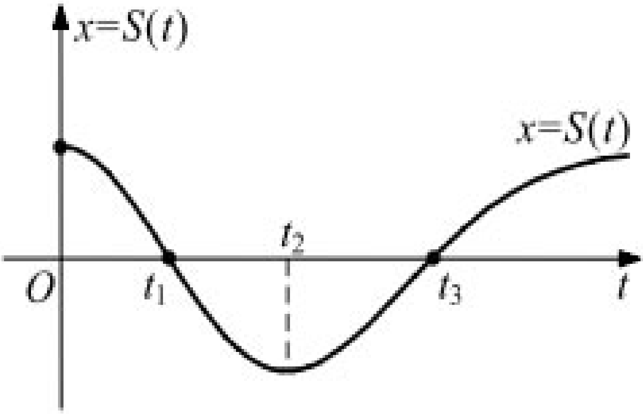
Μονάδες 5

iii. τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και των σημείων καμπής.

Μονάδες 5

Σε όλα τα ερωτήματα να *δικαιολογήσετε* τις απαντήσεις σας.

Β2. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε ένα άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:



α. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

Μονάδες 5

β. Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Μονάδες 5

Σε όλα τα ερωτήματα να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x>-2$ ισχύουν:

$$f\left(e^{f(x)}\right)=\ln(x+4) \text{ και } (fof)(e^{f(x)})=\ln\left(\ln(x+4)+2\right)$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο $(-2,+\infty)$

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(x+2),\ x>-2$ και να δώσετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f **.**

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(fof)(x)=f(e^{-x}+2)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left(e^{2}-2,\ e^{3}-2\right)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε x_1, x_2 στο $(-2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Δ2.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (-2, 0)$

β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) > f\left(f(0)\right).$$

Δ3. Αν για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(g(x) - 4x\right) = f\left(3 - x^2\right) \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε το x_1 στο οποίο η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο.

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της της συνάρτησης $h = f^3 + f$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 0$.

10ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2.

α. Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 3

β. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ. Μία συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

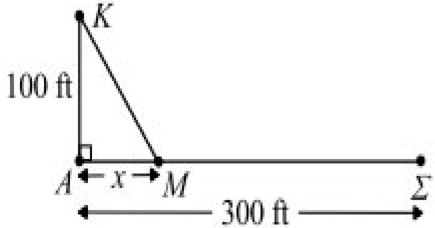
δ. Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ «κοντά» στο x_0, τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100 m μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300 m μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ms και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5m/s.



Β1. Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο Τ:

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

Μονάδες 10

Β2. Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \ln(e^x - 1) - x$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 4

Γ3. Μελετήστε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία..

Μονάδες 5

Γ4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Γ5. Αν $h(x)=\ln\frac{1}{x}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=h(x_0)$

Μονάδες 5

Γ6. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3+x^2+2}{f(2)x^2-x+1}$

Μονάδες 4

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x)+2f(x)=x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=-1$.

Μονάδες 4

11ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ με $x_0 \in \mathbb{R}$.

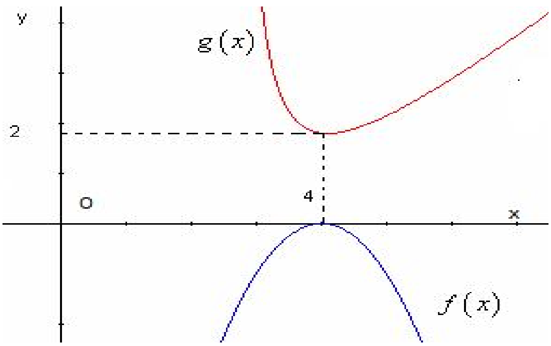
Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Δίνεται το παρακάτω σχήμα, τότε $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.



β. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Η f είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

δ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$

ε. Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^{-1}(-2015)=4\ ,\ f^{-1}(1949)=-1,$$

τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τα όρια: **α.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ και **β.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2+\ln^2 x, & 0<x<e\\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x\end{cases}$$

α. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Αν $\alpha = \frac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2e)$.

Μονάδες 5

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f\left(e^{f(x)}\right) = 4\ln x + 3$, για κάθε $x > 0$ και
- $(f \circ f)\left(e^{f(x)}\right) = \ln\left(\ln x^4 + 3\right)^2 + 1$, για κάθε $x > e^{-\frac{3}{4}}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014}\right)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Δ3. Να δείξετε ότι $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ **(Μονάδες 2)** και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **(Μονάδες 5).**

Δ4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

12ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

β. Αν η συνάρτηση f δεν είναι στο συνεχής x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ. Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0, τότε δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της $f+g$ στο x_0.

δ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε υπάρχει και το όριο της g στο x_0.

ε. Αν $f(x)=x^x,\ x>0$, τότε $f'(x)=x\cdot x^{x-1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση:

$$f\left(f(x)\right)=2g(x)-x$$

Β1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$.

Μονάδες 5

Β3. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = x_0$

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f\left(x + x_0 - 2\right)\right) + x + x_0 = 2f\left(x + x_0 - 2\right) + 2$$

Μονάδες 5.

γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f\left(\ln x + x_0 + 1\right)\right) + \ln x + 1 < x_0$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{x}, & -1 \le x < 0 \\ \alpha^2 \ln(x + e) + 2\alpha + (\beta^2 + \dfrac{1}{2})e^x, & x \ge 0 \end{cases}$$

Γ1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε τις τιμές των α και β

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

α. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) + 1}{x + 1}$

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετετο όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Δ1. α. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left(xf(x)\right)$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(2x)-1}{x} = 4f'(0)$

Μονάδες 4

Δ2. Αν επιπλέον για την f ισχύει, $f^2(x)-4f(x)=x^2-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

Δ3. Αν $f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Έστω σημείο M της C_f με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων O με ταχύτητα $2cm/sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAM.

Μονάδες 6

13ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + b$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α2. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

β. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha) = f(b)$ με $\alpha < b$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha, b]$.

γ. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β.

δ. Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ.

ε. Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, b]$ με $\int_\alpha^b f(x)dx > 0$ ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, b]$.

Μονάδες 10

Α4.

α. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή

«Για όλες τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f+g$ *συνεχής στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, *ισχύει ότι και η* f *και η* g *είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις στο* x_0*».*

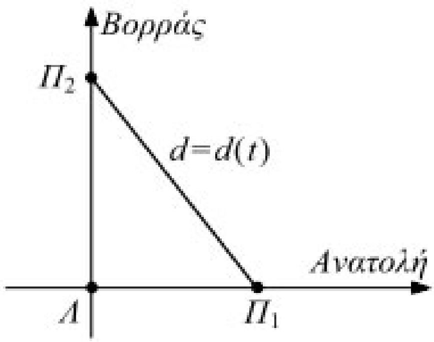
Μονάδες 2

β. Αν η παραπάνω πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα $15\ km/h$ και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα $20\ km/h$



Β1. Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των $\Pi_1(t)$ και $\Pi_2(t)$ συναρτήσει του χρόνου t

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την απόσταση $d = (\Pi_1\Pi_2)$ των δύο πλοίων συναρτήσει του χρόνου t.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d αυξάνεται με σταθερό ρυθμό ως προς το χρόνο t τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την μονοτονία, την κυρτότητα της f και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 9

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx > \frac{4}{3}$.

Μονάδες 6

Γ3. Αν F μια παράγουσα της f, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $F(x) > F(0) + x$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 3

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xF(x)}{f(x)}$.

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$F(2) - F(0) = 2f(\xi).$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x(x^2 + x + 3)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύουν:

$g(2) + xg(x) - g(x+2) - (f(x) - 3)^2 \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2-h)}{h} = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g'(2) = 0$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x \to -\infty$.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρείτε σημείο B της C_h με $h(x)=\sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $A(2,\,0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία AB.

Μονάδες 5

Δ5. Αν $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ και $\int_{g(0)}^{g(\alpha)} f(x)dx = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\,\alpha)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_0)=g(x_0)\cdot \varepsilon\varphi x_0 .$$

Μονάδες 6

14ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle; Να δώσετε ένα σχετικό πρόχειρο σχήμα.

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.
Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω αν:
α. $f(x)\geq 0$ και **β.** $f(x)\leq 0$.

Μονάδες 4

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσο του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

β. Μια συνεχής συνάρτηση f στο (α, β) παίρνει σε κάθε περίπτωση στο (α, β) μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.

δ. Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα $[\alpha, b]$ να ισχύουν το θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano.

ε. Αν υπάρχει $x_0\in[\alpha, b]$, ώστε $f(x_0)\neq 0$, τότε $\int_\alpha^b f^2(x)dx>0$.

Μονάδες 10

Α4. Θεωρούμε τον επόμενο ισχυρισμό:

«Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A(x_0, f(x_0))$ μπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι Ψευδής.

Μονάδες 1

β. Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ και } g(x) = \sqrt{e^{x-1} - 1}$$

Β1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 4

Β2. Να ορίσετε την συνάρτηση fog .

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη ενώ η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} .

Μονάδες 8

Β4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g\left(\sqrt{x^3+x}\right) = g\left(\sqrt{4x^2}\right)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$g'(x) = \frac{1}{3g^2(x) + \varepsilon} \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και ε μια σταθερά στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της, στο σημείο της $A(0, g(0))$ έχει εξίσωση: $x - 2018y + 2018 = 0$.

Γ1. Να βρείτε τον αριθμό ε .

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

$$g^3(x) + 2015 \cdot g(x) = x + 2016 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Γ3. Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξτε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και έχει τύπο:

$$g^{-1}(x) = x^3 + 2015x - 2016$$

Μονάδες 4

Γ4. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της g.

Μονάδες 6

Γ5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{g^{-1}(x)}{x \cdot g(x) \cdot \left(g^2(x)+2015\right)}$$

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνονται συνάρτηση $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to \mathbb{R}$ παράγουσα της $-3\eta\mu^3 x$ με $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και συνάρτηση g τέτοια, ώστε:

$$g(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο διάστημα $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι άρτια και η g' είναι περιττή στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 4

Δ3.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Δ4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, f^{-1} .

Μονάδες 3

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τη $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες: $(\varepsilon_1): x+y=2$, $(\varepsilon_2): x+y=-\dfrac{\pi}{2}$.

Μονάδες 3

Δ6. α. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4},\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$ βρίσκεται πάνω στη $C_{f^{-1}}$

Μονάδες 2

β. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, να βρείτε την κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο A .

Μονάδες 3

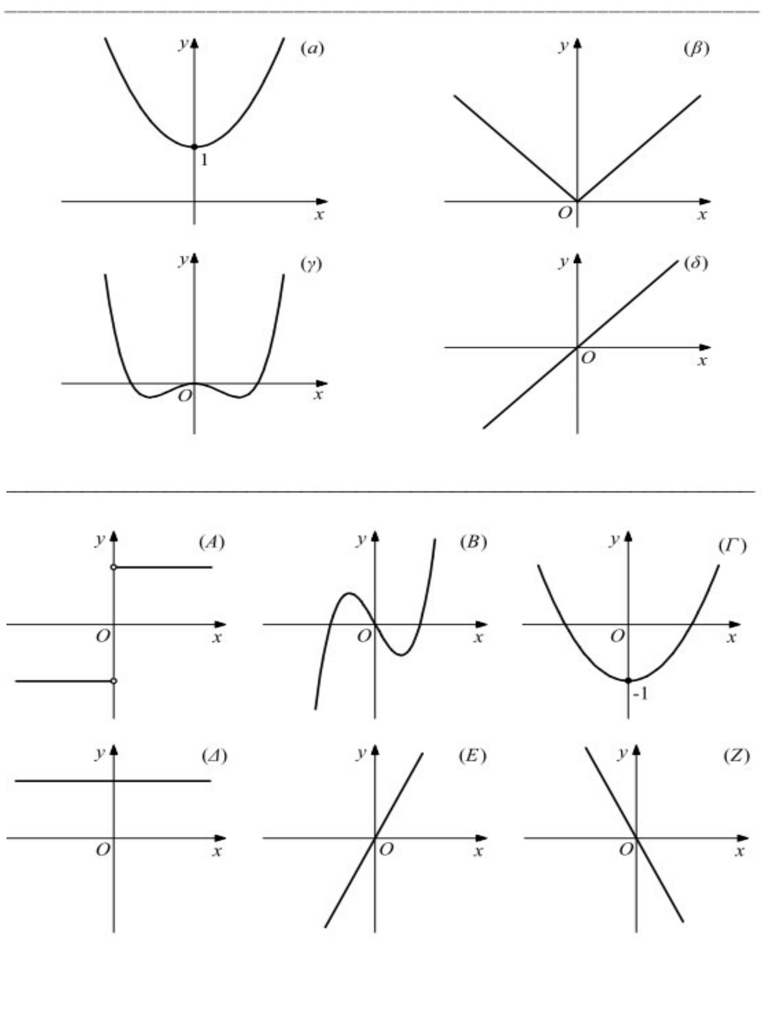
15ο Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σ΄ ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ;

Μονάδες 4

Α2. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.



Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

β. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)\cdot g(x)\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

δ. Ανάμεσα σε δυο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

ε. Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

Α4.

α. Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή.

Μονάδες 1

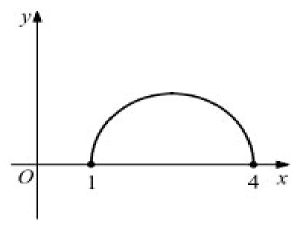
«Για όλες τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *όπου οι* $f+g$, g *είναι συνεχείς στο* $x_0 \in \mathbb{R}$, *ισχύει ότι και η* f *είναι επίσης συνεχής στο* x_0*».*

β. Αν η πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Έστω η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f που δίνεται από το επόμενο σχήμα:



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x) > 0$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β3. Υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β4. Έχει αντίστροφη η συνάρτηση f; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\ f(x) = 3\ln\left(x \cdot e^{1-x}\right) + 2,\ x > 0$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $3f(x) + 2011 = 0$.

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = 1$ (2)

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx \ .$$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x\to +\infty}\frac{f(e^x)}{x}$$

Μονάδες 5