ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2025

Οι λύσεις των προβλημάτων

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις

$$\mathrm{A} = ((-3)^3 + 27 - (-5)^3 - 10^2) \cdot (3^2 - 2^2),$$
$$\mathrm{B} = (-5^3 + 10^2)^4 : (2^3 - 3)^2$$

και να γράψετε τον αριθμό $\mathrm{A} : \mathrm{B}$ ως δύναμη με βάση το 5.

Λύση
Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= ((-3)^3 + 27 - (-5)^3 - 10^2) \cdot (3^2 - 2^2) \\ &= (-27 + 27 - (-125) - 100) \cdot (9 - 4) \\ &= 25 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5 = 5^3. \end{aligned}$$

$$\mathrm{B} = (-5^3 + 10^2)^4 : (2^3 - 3)^2 = (-125 + 100)^4 : (8 - 3)^2 =$$
$$(-25)^4 : (5)^2 = (-5^2)^4 : 5^2 = 5^8 : 5^2 = 5^6$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{5^3}{5^6} = 5^{3-6} = 5^{-3}.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου α για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$ΜΚΔ\{\alpha, 50\} + ΕΚΠ\{\alpha, 90\} = 100.$$

Σημείωση
Με $ΜΚΔ\{\alpha, \beta\}$ *συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακέραιων* α, β.
Με $ΕΚΠ\{\alpha, \beta\}$ *συμβολίζουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ακέραιων* α, β.

Λύση
Οι δυνατές τιμές του $ΜΚΔ\{\alpha, 50\}$ είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 1 και μικρότερες ή ίσες του 50. Οι δυνατές τιμές του $ΕΚΠ\{\alpha, 90\}$ είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 90. Επομένως τα πολλαπλάσια που είναι μεγαλύτερα του 90 αποκλείονται και μοναδική δυνατή τιμή είναι η $ΕΚΠ\{\alpha, 90\} = 90$, οπότε $ΜΚΔ\{\alpha, 50\} = 10$.

Από την ισότητα $ΕΚΠ\{\alpha, 90\} = 90$ προκύπτει ότι ο α πρέπει να είναι διαιρέτης του 90, δηλαδή $\alpha \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$.

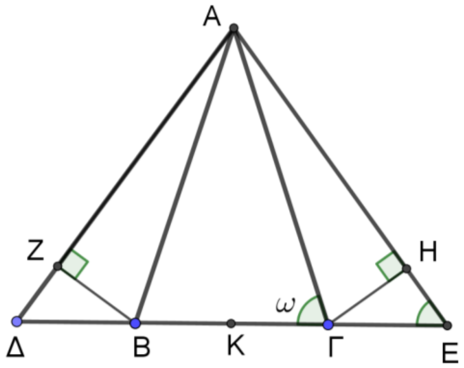
Από την ισότητα $ΜΚΔ\{\alpha, 50\} = 10$ προκύπτει ότι ο α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 10. Επομένως οι δυνατές τιμές του α είναι όλα τα πολλαπλάσια του 10 που είναι ταυτόχρονα και διαιρέτες του 90, δηλαδή $\alpha \in \{10, 30, 90\}$.

Πρόβλημα 3

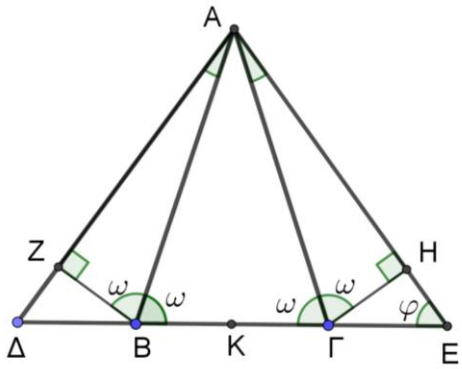
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ και $Α\hat{Γ}Β = \omega$. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΗ είναι ορθογώνια με $Α\hat{Ζ}Β = Α\hat{Η}Γ = 90^o$ και $Α\hat{Β}Ζ = Α\hat{Γ}Η = \omega$. Το σημείο Κ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Δίνεται ακόμη ότι ισχύει η ισότητα γωνιών: $Ζ\hat{Α}Η = Α\widehat{ΓΒ}$.

(α) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Γ}Β = \omega$.

(β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ε}Δ$ και να αποδείξετε ότι το σημείο Κ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ.



Λύση



(α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΗ έχουμε ότι:

$$Ζ\hat{Α}Β = 90^o - \omega = Γ\hat{Α}Η.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι: $Β\hat{Α}Γ = 180^o - 2\omega$, οπότε

$$Ζ\hat{Α}Η = Ζ\hat{Α}Β + Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Η = 90^o - \omega + 180^o - 2\omega + 90^o - \omega = 360^o - 4\omega.$$

Τότε έχουμε

$$Ζ\hat{Α}Η = \hat{Γ} \Leftrightarrow 360^o - 4\omega = \omega \Leftrightarrow 5\omega = 360^o \Leftrightarrow \omega = 72^o.$$

(β) Έστω $Α\hat{Ε}Δ = \varphi$. Στο τρίγωνο ΑΓΕ η γωνία $Α\hat{Γ}Β = \omega$ είναι εξωτερική, οπότε ισχύει η σχέση

$$Α\hat{Γ}Β = \omega = \varphi + Γ\hat{Α}Ε = \varphi + Γ\hat{Α}Η = \varphi + 90^o - \omega$$

$$\Rightarrow Α\hat{Ε}Δ = \varphi = 2\omega - 90^o \Rightarrow \varphi = 2 \cdot 72^o - 90^o = 54^o.$$

Ομοίως, βρίσκουμε και ότι $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Δ}Β = 2\omega - 90^o = 54^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $ΑΔ = ΑΕ$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διάμεσος προς τη βάση, άρα είναι και ύψος, δηλαδή η ΑΚ είναι ύψος και του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ. Άρα είναι και διάμεσος προς τη βάση ΔΕ, δηλαδή το σημείο Κ είναι το μέσο της ΔΕ.

Πρόβλημα 4. Αν από το θετικό ακέραιο

$$\overline{\alpha\beta\beta\beta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \beta,\ \text{με}\ \alpha \neq 0, \beta\ \text{ψηφία},$$

αφαιρέσουμε τον αριθμό $\overline{\alpha\beta\beta} = 100\alpha + 10\beta + \beta$ προκύπτει ο αριθμός 4900. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού $\overline{\alpha\beta\beta\beta}$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$\overline{\alpha\beta\beta\beta} - \overline{\alpha\beta\beta} = 4900 \Leftrightarrow 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \beta - (100\alpha + 10\beta + \beta\ ) = 4900$$
$$\Leftrightarrow 900\alpha + 100\beta = 4900 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 49 \Leftrightarrow \beta = 49 - 9\alpha.$$

Επειδή το β είναι ψηφίο, από την ισότητα $\beta = 49 - 9\alpha$ έπεται ότι το α δεν μπορεί, να πάρει τιμή μεγαλύτερη του 5, αλλά ούτε και τιμή μικρότερη του 5. Άρα πρέπει να είναι $\alpha = 5$, οπότε $\beta = 49 - 9\alpha = 4$.

Θα μπορούσαμε επίσης να εργαστούμε ως εξής: Επειδή $0 \leq \beta \leq 9$, έπεται ότι

$$0 \leq 49 - 9\alpha \leq 9 \Leftrightarrow -49 \leq -9\alpha \leq -40 \Leftrightarrow 40 \leq 9\alpha \leq 49 \Leftrightarrow \frac{40}{9} \leq \alpha \leq \frac{49}{9} \Leftrightarrow \alpha = 5,$$

οπότε θα είναι $\beta = 4$ και $\overline{\alpha\beta\beta\beta} = 5444$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 20 και υπόλοιπο 6.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα α, β, γ είναι ψηφία με $\alpha \neq 0$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma = 20(\alpha + \beta + \gamma) + 6 \Leftrightarrow$$
$$80\alpha - 10\beta - 19\gamma = 6 \Leftrightarrow 80\alpha - 10\beta = 19\gamma + 6$$
$$\Leftrightarrow 10(8\alpha - \beta) = 19\gamma + 6.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος $19\gamma + 6$ είναι πολλαπλάσιο του 10. Αυτό συμβαίνει μόνο για την τιμή $\gamma = 6$.

Η τιμή $\gamma = 6$ μπορεί να προκύψει άμεσα από την εξίσωση $\mathrm{A} = 20(\alpha + \beta + \gamma) + 16$, από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός Α έχει τελευταίο ψηφίο το 6.

Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$10(8\alpha - \beta) = 120 \Leftrightarrow 8\alpha - \beta = 12 \Leftrightarrow 8\alpha - 12 = \beta.$$

Επειδή $0 \leq \beta \leq 9$, έχουμε ότι η μοναδική επιτρεπτή τιμή του α είναι $\alpha = 2$, οπότε προκύπτει ότι $\beta = 4$ και ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 246$.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^2 + 9\nu + 20}{\nu^2 + 3\nu - 4}$$

είναι ακέραιος.

Λύση
Έχουμε ότι

$$\nu^2 + 9\nu + 20 = \nu^2 + 5\nu + 4\nu + 20 = \nu(\nu + 5) + 4(\nu + 5) = (\nu + 5)(\nu + 4).$$

$$\nu^2 + 3\nu - 4 = \nu^2 + 4\nu - \nu - 4 = \nu(\nu + 4) - (\nu + 4) = (\nu + 4)(\nu - 1).$$

Για να ορίζεται ο αριθμός Α πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0, οπότε πρέπει $(\nu + 4)(\nu - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \nu + 4 \neq 0$ και $\nu - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \nu \neq -4$ και $\nu \neq 1$.

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^2 + 9\nu + 20}{\nu^2 + 3\nu - 4} = \frac{(\nu + 5)(\nu + 4)}{(\nu - 1)(\nu + 4)} = \frac{\nu + 5}{\nu - 1} = \frac{\nu - 1 + 6}{\nu - 1} = 1 + \frac{6}{\nu - 1},$$

οπότε

$$\mathrm{A} = 1 + \frac{6}{\nu - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{\nu - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \nu - 1 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$$

$$\Leftrightarrow \nu \in \{-5, -2, -1\ \ 0\ \ 2, 3, 4\ 7\}.$$

Σημείωση. Μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^2 + 9\nu + 20}{\nu^2 + 3\nu - 4} = \frac{\nu^2 + 3\nu - 4 + 6\nu + 24}{\nu^2 + 3\nu - 4} = 1 + \frac{6(\nu + 4)}{(\nu - 1)(\nu + 4)} = 1 + \frac{6}{\nu - 1}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνονται οι εξισώσεις

$$5(7x - 2a) = 6\left(5x + \frac{b}{6}\right), \qquad (E_1)$$

$$3(8y - 6a) = 7\left(3y + \frac{b}{7}\right). \qquad (E_2)$$

με άγνωστο το x και το y, αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί a, b, με $b > 0$ είναι ακέραιοι που θεωρούνται γνωστοί. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του ακέραιου b για την οποία και οι δύο δεδομένες εξισώσεις έχουν ακέραια λύση.

Λύση
Για την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$5(7x - 2a) = 6\left(5x + \frac{b}{6}\right) \Leftrightarrow 35x - 10a = 30x + b$$

$$\Leftrightarrow 5x = 10a + b \Leftrightarrow x = 2a + \frac{b}{5}.$$

Επειδή οι a, b είναι ακέραιοι, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, για κάθε ακέραιο a, αν ο θετικός ακέραιος b είναι θετικό πολλαπλάσιο του 5.
Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$$3(8y - 6a) = 7\left(3y + \frac{b}{7}\right) \Leftrightarrow 24y - 18a = 21y + b$$

$$\Leftrightarrow 3y = 18a + b \Leftrightarrow y = 6a + \frac{b}{3}.$$

Επειδή οι a, b είναι ακέραιοι, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, για κάθε ακέραιο a, αν ο θετικός ακέραιος b είναι θετικό πολλαπλάσιο του 3.
Επομένως η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου b για την οποία έχουν ακέραια λύση και οι δύο δεδομένες εξισώσεις, για κάθε ακέραιο a, είναι το $ΕΚΠ\{5,3\} = 15$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Ζ στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ τέτοιο, ώστε να ισχύει $Β\hat{Α}Γ = 2 \cdot Γ\hat{Α}Ζ$ και η ευθεία ΑΖ να είναι κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας $Α\hat{Β}Γ$.
(α) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ΒΖ$.
(β) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

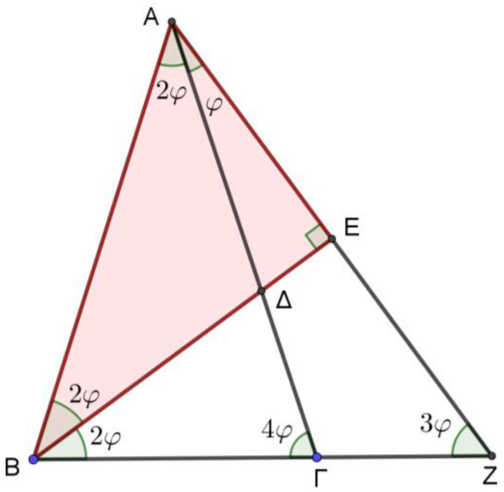
Λύση
(α) Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Β}Γ$ τέμνει την ΑΖ στο Ε. Τότε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΖΕΒ είναι ίσα, αφού έχουν

$$Α\hat{Ε}Β = Ζ\hat{Ε}Β = 90^\circ,\ Α\hat{Β}Ε = Ζ\hat{Β}Ε$$

και η πλευρά ΒΕ είναι κοινή (Γ-Π-Γ). Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΒΖ$ και $Β\hat{Ζ}Α = Β\hat{Α}Ζ$.

(β) Αν $Γ\hat{Α}Ζ = \varphi$, τότε $Β\hat{Α}Γ = 2\varphi$ και

$$Β\hat{Ζ}Α = Β\hat{Α}Ζ = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Ζ = 2\varphi + \varphi = 3\varphi.$$



Επιπλέον, έχουμε

$$Α\hat{Β}Γ = Α\hat{Γ}Β = Γ\hat{Ζ}Α + Γ\hat{Α}Ζ = 3\varphi + \varphi = 4\varphi,$$

αφού η γωνία $Α\hat{Γ}Β$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΖ. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε

$$4\varphi + 4\varphi + 2\varphi = 180^\circ,$$

και άρα $\varphi = 18^\circ$. Επομένως είναι

$$Β\hat{Α}Γ = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ \text{ και } Α\hat{Β}Γ = Α\hat{Γ}Β = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$Α = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 30 και υπόλοιπο 16.

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε ότι τα α, β, γ είναι ψηφία με $\alpha \neq 0$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$Α = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma = 30(\alpha + \beta + \gamma) + 16 \Leftrightarrow$$
$$70\alpha - 20\beta - 29\gamma = 16 \Leftrightarrow 70\alpha - 20\beta = 29\gamma + 16$$
$$\Leftrightarrow 10(7\alpha - 2\beta) = 29\gamma + 16.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος $29\gamma + 16$ είναι πολλαπλάσιο του 10. Αυτό συμβαίνει μόνο για την τιμή $\gamma = 6$.

Η τιμή $\gamma = 6$ μπορεί να προκύψει άμεσα από την εξίσωση $A = 30(\alpha + \beta + \gamma) + 16$, από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός Α έχει τελευταίο ψηφίο το 6.

Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$10(7\alpha - 2\beta) = 190 \Leftrightarrow 7\alpha - 2\beta = 19 \Leftrightarrow 7\alpha = 2\beta + 19.$$

Επειδή το β είναι ψηφίο οι δυνατές τιμές του $7\alpha = 2\beta + 19$ είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 19 και μικρότερες ή ίσες του 37. Επομένως οι δυνατές τιμές του ψηφίου α είναι μεγαλύτερες του 2 και μικρότερες του 6. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να προκύψει και ως εξής:

Επειδή $0 \leq \beta \leq 9$, έχουμε

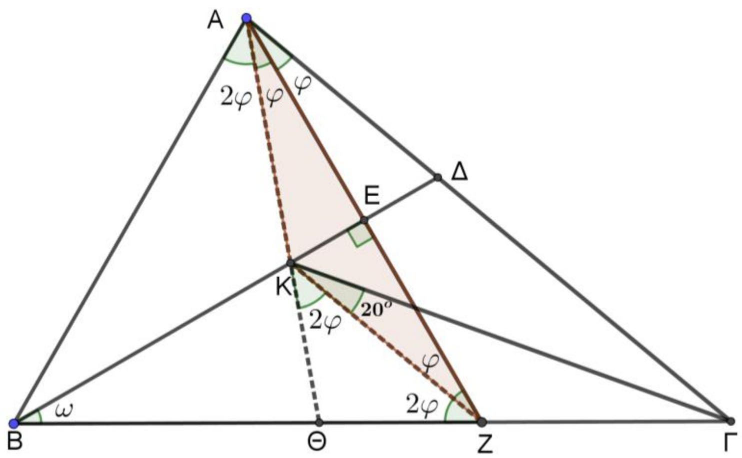
$$0 \leq 2\beta \leq 18 \Leftrightarrow 19 \leq 2\beta + 19 \leq 37 \Leftrightarrow 19 \leq 7\alpha \leq 37$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{7} \leq \alpha \leq \frac{37}{7} \Leftrightarrow \alpha \in \{3, 4, 5\}.$$

- Αν $\alpha = 3$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 2 \Rightarrow \beta = 1$ και Α = 316, ο οποίος απορρίπτεται, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του είναι 10 και είναι μικρότερο από το υπόλοιπο της διαίρεσης.
- Αν $\alpha = 4$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 9$, απορρίπτεται.
- Αν $\alpha = 5$, έχουμε $2\beta = 7\alpha - 19 = 16 \Rightarrow \beta = 8$ και Α = 586.

Πρόβλημα 2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ και σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{B\hat{A}Z} = 3 \cdot \mathrm{Z\hat{A}\Gamma}$ και ΒΖ = ΒΑ. Έστω Θ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{\Theta\hat{A}Z} = \mathrm{Z\hat{A}\Gamma}$ και έστω Κ το σημείο τομής της ΑΘ με την διχοτόμο της γωνίας Β.
(α) Να εκφράσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της γωνίας $\mathrm{Z\hat{A}\Gamma} = \varphi$.
(β) Να αποδείξετε ότι ΑΖ = ΚΓ.
(γ) Αν ισχύει $\mathrm{Z\hat{K}\Gamma} = 20^\circ$, να προσδιορίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση



(α) Έστω ότι $\mathrm{Z\hat{B}\Delta} = \omega$. Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{B\hat{A}Z} = 3\varphi$, αφού $\mathrm{Z\hat{A}\Gamma} = \varphi$. Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΖ η διχοτόμος ΒΕ είναι και ύψος, έπεται ότι αυτό είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A\hat{Z}B} = \mathrm{B\hat{A}Z} = 3\varphi.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ έχουμε την ισότητα:

$$\omega + 3\varphi = 90^o \Leftrightarrow \omega = 90^o - 3\varphi \qquad (1).$$

Άρα έχουμε:

$$\widehat{\mathrm{A}} = 4\varphi \ \text{ και } \ \widehat{\mathrm{B}} = 2\omega = 2(90^o - 3\varphi) = 180^o - 6\varphi.$$

Από το τρίγωνο ΑΖΓ με εξωτερική γωνία την $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 3\varphi$ έχουμε την ισότητα:

$$\widehat{\Gamma} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} - \mathrm{Z}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 3\varphi - \varphi = 2\varphi.$$

(β) Η ευθεία ΒΚ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΖ, και άρα

$$\mathrm{KA} = \mathrm{KZ} \ \text{ και } \ \mathrm{K}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = \varphi.$$

Έτσι, έχουμε $\Theta\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = 2\varphi$ και $\Theta\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = \Theta\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} - \mathrm{K}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = 3\varphi - \varphi = 2\varphi$, οπότε το τρίγωνο ΖΘΚ είναι ισοσκελές με $\Theta\mathrm{Z} = \Theta\mathrm{K}$.
Όμως έχουμε

$$\Theta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 2\varphi = \widehat{\Gamma} = \Theta\widehat{\Gamma}\mathrm{A},$$

οπότε το τρίγωνο ΑΘΓ είναι ισοσκελές με $\Theta\Gamma = \Theta\mathrm{A}$. Άρα έχουμε

$$\mathrm{Z}\Gamma = \Theta\Gamma - \Theta\mathrm{Z} = \Theta\mathrm{A} - \Theta\mathrm{K} = \mathrm{AK},$$

(ως διαφορές ίσων τμημάτων).
Επομένως, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΚΖ και ΚΖΓ είναι ίσα αφού έχουν:

ΚΖ κοινή πλευρά, ΑΚ = ΚΖ και $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{Z}}\Gamma = 180^\circ - 2\varphi = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}$, (Π-Γ-Π)

και άρα $\mathrm{AZ} = \mathrm{K}\Gamma$.

(γ) Αν ισχύει $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma = 20^o$, τότε $\varphi = 20^o$, οπότε από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\widehat{\mathrm{A}} = 4\varphi = 80^o, \qquad \widehat{\mathrm{B}} = 180^o - 6\varphi = 60^o \ \text{ και } \ \widehat{\Gamma} = 2\varphi = 40^o.$$

Πρόβλημα 3. Να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού η οποία έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες α, β τέτοιες ώστε $\alpha^2 = 45\beta + 2024\alpha\beta$ και $\beta^2 = 45\alpha + 2024\alpha\beta$.

Λύση. Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες α, β είναι η

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των αριθμών α, β. Αφαιρώντας τις δύο δοθείσες σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε

$$\alpha^2 - \beta^2 = 45(\beta - \alpha),$$

οπότε

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = -45(\alpha-\beta),$$

Και αφού $\alpha \neq \beta$, παίρνουμε

$$\alpha + \beta = -45.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο δοθείσες σχέσεις κατά μέλη βρίσκουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 45(\alpha+\beta) + 4048\alpha\beta.$$

Είναι

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-45)^2 - 2\alpha\beta = 2025 - 2\alpha\beta,$$

οπότε παίρνουμε

$$2025 - 2\alpha\beta = 45 \cdot (-45) + 4048\alpha\beta,$$

η οποία δίνει

$$\alpha\beta = 1.$$

Συνεπώς, μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β είναι η

$$x^2 - 45x + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 4. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της διαφοράς $\alpha - \beta$.

Λύση, (1ος τρόπος) Έχουμε:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - 3\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta)^3 - 1^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - 3\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta - 1)((\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta) + 1) + 3\alpha\beta(\alpha - \beta - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta - 1)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta - 1 = 0 \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha - \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 1 \text{ ή } 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha - 2\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 1 \text{ ή } (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + 1)^2 + (\beta - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha = -\beta = -1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha - \beta = -2.$$

2ος τρόπος. Έστω $x = \alpha - \beta$, οπότε θέτοντας $\alpha = x + \beta$ στην $\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta - 1 = 0$ παίρνουμε

$$(x + \beta)^3 - \beta^3 - 3(x + \beta)\beta - 1 = 0,$$

η οποία μετά από πράξεις δίνει

$$x^3 + 3\beta^2 x + 3\beta x^2 - 3\beta x - 3\beta^2 - 1 = 0.$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $x - 1$ παίρνουμε

$$(x - 1)(x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1) = 0,$$

οπότε

$$x = 1 \quad \text{ή} \qquad x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1$ είναι ίση με

$$\Delta = (3\beta + 1)^2 - 4(3\beta^2 + 1) = -3\beta^2 + 6\beta - 3 = -3(\beta - 1)^2.$$

Άρα το τριώνυμο $x^2 + (3\beta + 1)x + 3\beta^2 + 1$ μπορεί να γίνει ίσο με το 0, μόνο όταν

$$\beta = 1 \text{ και } x = -\frac{3\beta + 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της διαφοράς $x = \alpha - \beta$ είναι το 1 και το -2.

3[ος] τρόπος. Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί ως ισότητα αθροίσματος τριών κύβων με το τριπλάσιο γινόμενό τους, οπότε από τη γνωστή ταυτότητα των κύβων έχουμε:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 + (-\beta)^3 + (-1)^3 = 3\alpha(-\beta)(-1)$$
$$\Leftrightarrow \alpha - \beta - 1 = 0 \text{ ή } \alpha = -\beta = -1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 1 \text{ ή } \alpha - \beta = -2.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$|2x + 2| - |2x - 8| = a \qquad \text{(E)}$$

με άγνωστο το $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρο.
Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου a:
(α) Αν η εξίσωση (Ε) έχει άπειρες λύσεις.
(β) Αν η εξίσωση (Ε) έχει μοναδική λύση.

Λύση (1[ος] τρόπος)
Θα αναζητήσουμε λύσεις της εξίσωσης σε διάφορα διαστήματα που θα προκύψουν από την αλλαγή προσήμου των παραστάσεων $2x + 2$ και $2x - 8$ που βρίσκονται στην εξίσωση με την απόλυτη τιμή τους. Επειδή

$$2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -1, 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ και } 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1,$$
$$2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x < 4, \qquad 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ και } 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 4,$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $x \leq -1$. Τότε
$$\text{(E)} \Leftrightarrow -2x - 2 - (-2x + 8) = a \Leftrightarrow 0 \cdot x = a + 10,$$
η οποία έχει απειρία λύσεων , δηλαδή κάθε $x \leq -1$, αν $a = -10$, ενώ είναι αδύνατη για $a \neq -10$.

(β) $-1 < x < 4$. Τότε

$$\text{(E)} \Leftrightarrow 2x + 2 - (-2x + 8) = a \Leftrightarrow 4 \cdot x = a + 6 \Leftrightarrow x = \frac{a + 6}{4},$$

δηλαδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση για κάθε a τέτοιο ώστε

$$-1 < x = \frac{a + 6}{4} < 4 \Leftrightarrow -4 < a + 6 < 16 \Leftrightarrow -10 < a < 10.$$

(γ) $x \geq 4$. Τότε
$$\text{(E)} \Leftrightarrow 2x + 2 - (2x - 8) = a \Leftrightarrow 0 \cdot x = a - 10,$$
η οποία έχει απειρία λύσεων , δηλαδή κάθε $x \geq 4$, αν $a = 10$, ενώ είναι αδύνατη για $a \neq 10$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε:
Αν η εξίσωση (Ε) έχει άπειρες λύσεις, τότε $a = -10$ ή $a = 10$.
Αν η εξίσωση (Ε) έχει μοναδική λύση, τότε $-10 < a < 10$.

(2[ος] τρόπος) Γραφική επίλυση
Παρατηρούμε ότι $|2x + 2| = 2|x + 1|$ και $|2x - 8| = 2|x - 4|$, οπότε η (Ε) γράφεται ισοδύναμα

$$|x + 1| - |x - 4| = \frac{a}{2}.$$

Έχουμε, λοιπόν, τις περιπτώσεις

- $x < -1$. Τότε $|x+1| = -x - 1$, και $|x-4| = -x+4$, οπότε
-
$$|x+1| - |x - 4| = (-x - 1) - (-x + 4) = -x - 1 + x - 4 = -5.$$

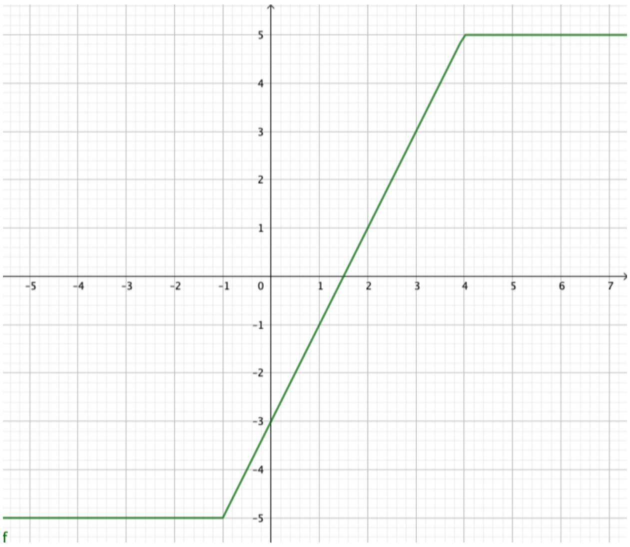
- $-1 \leq x < 4$. Τότε $|x+1| = x+1$, και $|x - 4| = -x+4$,

οπότε
$$|x+1| - |x - 4| = (x+1) - (-x+4) = x + 1 + x - 4 = 2x - 3.$$

- $4 \leq x$. Τότε $|x+1| = x+1$, και $|x - 4| = x - 4$, *οπότε*
-
$$|x+1| - |x - 4| = (x+1) - (x-4) = 5.$$

Η γραφική παράσταση της $y = |x+1| - |x - 4|$ είναι η παρακάτω:

(i) Η εξίσωση (Ε) έχει άπειρες λύσεις, αν, και μόνο αν, η οριζόντια ευθεία $y = \frac{\alpha}{2}$ τέμνει την $y = |x+1| - |x - 4|$ σε άπειρα το πλήθος σημεία. Από την παραπάνω γραφική παράσταση, αυτό συμβαίνει για την $y = 5$ η οποία προκύπτει όταν $\alpha = 10$, και την $y = -5$ για $\alpha = -10$, και μόνο για αυτές.



(ii) Η εξίσωση (Ε) έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν η οριζόντια ευθεία $y = \frac{\alpha}{2}$ τέμνει την $y = |x+1| - |x - 4|$ σε ακριβώς ένα σημείο. Αυτό συμβαίνει, αν, και μόνο αν, $-5 < \frac{\alpha}{2} < 5$, δηλαδή, αν, και μόνο αν, $-10 < \alpha < 10$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ότι οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ότι οι αριθμοί

$$\frac{3\mu - 1}{\nu} \text{ και } \frac{2\nu - 1}{\mu}$$

είναι θετικοί ακέραιοι. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του ζεύγους (μ, ν).

Λύση

Έστω ότι $\frac{3\mu-1}{\nu} = \kappa$ και $\frac{2\nu-1}{\mu} = \lambda$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι. Τότε θα είναι

$$3\mu - 1 = \kappa\nu \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 2\nu - 1 = \lambda\mu \Rightarrow$$

$$6\mu - 2 = 2\kappa\nu \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 2\nu - 1 = \lambda\mu \Rightarrow$$

$$6\mu - 2 = \kappa(\lambda\mu + 1) \Rightarrow (6 - \kappa\lambda)\mu = \kappa + 2 \Rightarrow \mu = \frac{\kappa + 2}{6 - \kappa\lambda}.$$

Επειδή ο μ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $6 - \kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda < 6$.

Επομένως είναι κ, λ θετικοί ακέραιοι και

$$0 < \kappa\lambda < 6, \qquad \mu = \frac{\kappa + 2}{6 - \kappa\lambda} \text{ και } \nu = \frac{3\mu - 1}{\kappa}$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\kappa\lambda = 1 \Rightarrow \kappa = \lambda = 1 \Rightarrow \mu = \frac{3}{5}$, μη δεκτή τιμή
- $\kappa\lambda = 2 \Rightarrow \kappa = 2,\ \lambda = 1$ ή $\kappa = 1,\ \lambda = 2 \Rightarrow (\mu, \nu) = (1, 1)$ ή $(\mu, \nu) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$. μη δεκτή
- $\kappa\lambda = 3 \Rightarrow \kappa = 3,\ \lambda = 1$ ή $\kappa = 1,\ \lambda = 3 \Rightarrow (\mu, \nu) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, μη δεκτή ή $(\mu, \nu) = (1, 2)$.
- $\kappa\lambda = 4 \Rightarrow \kappa = 2,\ \lambda = 2$ ή $\kappa = 4,\ \lambda = 1$ ή $\kappa = 1, \lambda = 4$

  $\Rightarrow (\mu, \nu) =$, μη δεκτή, ή $(\mu, \nu) = (3, 2)$ ή $(\mu, \nu) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, μη δεκτή.
- $\kappa\lambda = 5 \Rightarrow \kappa = 5,\ \lambda = 1$ ή $\kappa = 1,\ \lambda = 5 \Rightarrow (\mu, \nu) = (7, 4)$ ή $(\mu, \nu) = (3, 8)$

Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους (μ, ν) είναι:

$$(\mu, \nu) \in \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (7, 4), (3, 8)\}.$$

2ος τρόπος. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. $\nu \le \mu$. Τότε $0 < \frac{2\nu-1}{\mu} < \frac{2\nu}{\mu} \le 2$, οπότε αναγκαστικά $\frac{2\nu-1}{\mu} = 1$, και άρα $2\nu - 1 = \mu$.
   Τότε ο αριθμός $\frac{3\mu-1}{\nu} = \frac{3(2\nu-1)-1}{\nu} = 6 - \frac{4}{\nu}$ είναι ακέραιος, αν, και μόνο αν, $\nu = 1, 2$ ή 4.
   Αφού $\mu = 2\nu - 1$, παίρνουμε $\mu = 1, 3$ ή 7, αντίστοιχα, οπότε $\frac{2\nu-1}{\mu} = 1$, για τα ζεύγη $(\mu, \nu) = (1,1), (3,2)$, και $(7,4)$.
2. $\mu < \nu$. Τότε $0 < \frac{3\mu-1}{\nu} < \frac{3\mu}{\nu} < 3$, οπότε $\frac{3\mu-1}{\nu} = 1$ ή 2, και άρα $3\mu - 1 = \nu$ ή $3\mu - 1 = 2\nu$. Εξετάζουμε τις υποπεριπτώσεις:
   - $3\mu - 1 = \nu$. Τότε $\frac{2\nu-1}{\mu} = \frac{6\mu-3}{\mu} = 6 - \frac{3}{\mu}$, οπότε $\mu = 1$ και $\nu = 2$ ή $\mu = 3$ και $\nu = 8$ που προφανώς γίνονται δεκτές.
   - $3\mu - 1 = 2\nu$. Τότε $\frac{2\nu-1}{\mu} = \frac{3\mu-2}{\mu} = 3 - \frac{2}{\mu}$, οπότε $\mu = 1$ ή $\mu = 2$ που δεν δίνουν ακέραιες λύσεις για τον ν με $\nu > \mu$.

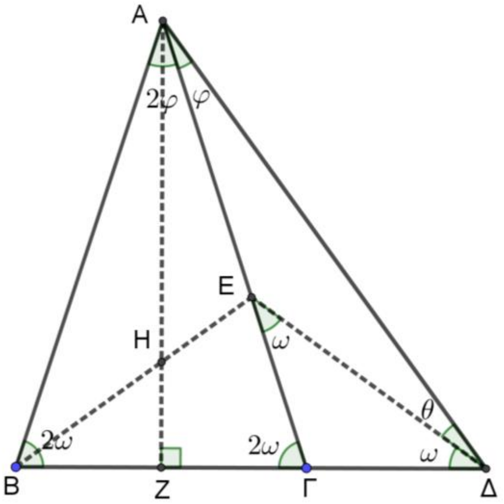
Συνεπώς, οι λύσεις είναι τα εξής πέντε ζεύγη $(\mu, \nu) = (1,1), (3,2), (7,4), (1,2)$ και $(3,8)$.

Πρόβλημα 3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ > ΒΓ και σημείο Δ στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το Γ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΑΒ και $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 2 \cdot \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$. Έστω σημείο Ε στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ και έστω Η το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ με το ύψος ΑΖ του τριγώνου ΑΒΓ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΗ είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ.
(γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ.

Λύση



(α) Θέτουμε $\Gamma\widehat{A}\Delta = \varphi$, οπότε θα είναι $\widehat{A} = 2\varphi$. Θέτουμε επίσης $\Gamma\widehat{\Delta}E = \omega = \Gamma\widehat{E}\Delta$ (αφού ΓΔΕ ισοσκελές τρίγωνο από υπόθεση). Τότε θα είναι $\widehat{\Gamma} = 2\omega$ (ως εξωτερική στο τρίγωνο ΓΔΕ) και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 2\omega$.
Θέτουμε επίσης $A\widehat{\Delta}E = \theta$.
Επειδή η γωνία $\Gamma\widehat{E}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΕΔ έχουμε την ισότητα:

$$\omega = \varphi + \theta. \qquad (1)$$

Επειδή $B\Delta = AB$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$B\widehat{A}\Delta = B\widehat{\Delta}A \Rightarrow 3\varphi = \omega + \theta. \qquad (2)$$

Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow \varphi + 2\omega = 90^o \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\omega = \varphi + \theta = 3\varphi - \theta \Rightarrow \varphi = \theta \qquad (4)$$

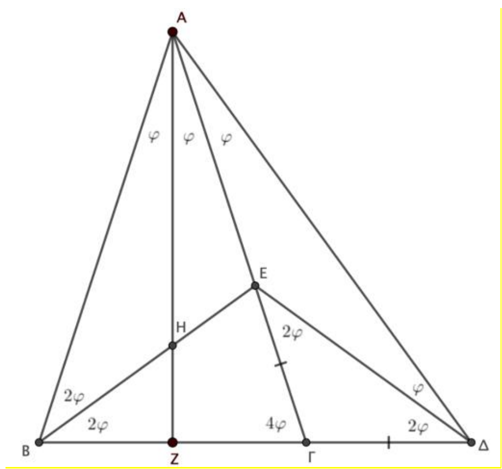
οπότε από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$\omega = 2\varphi \quad \text{και} \quad 5\varphi = 90^o \Rightarrow \varphi = 18^o,\ \theta = 18^o, \omega = 36^o \text{ και } \widehat{A} = 36^o, \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 72^o.$$

(β) Από την ισότητα $\varphi = \theta$ προκύπτει ότι $EA = E\Delta$ και αφού $B\Delta = AB$, έπεται ότι η ευθεία ΒΕ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ. Επομένως το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε $\Delta H \perp AB$.

(γ) Επιπλέον η ευθεία ΒΕ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B}$, οπότε $\Delta\widehat{B}E = \omega = 36^o = E\widehat{\Delta}B$, οπότε $EB = E\Delta$ και αφού $EA = E\Delta$, έπεται ότι το σημείο Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ.

2ος τρόπος.



Έστω $\varphi = \Delta\widehat{A}\Gamma$. Αφού το ύψος στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, και αφού $B\widehat{A}\Gamma = 2 \cdot \Delta\widehat{A}\Gamma$, έχουμε

$$B\widehat{A}Z = Z\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{A}\Gamma = \varphi.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ είναι $B\widehat{\Delta}A = B\widehat{A}\Delta = 3\varphi$, οπότε η γωνία $B\widehat{\Gamma}A$ ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι ίση με

$$B\widehat{\Gamma}A = \Gamma\widehat{A}\Delta + \Gamma\widehat{\Delta}A = \varphi + 3\varphi = 4\varphi.$$

Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΒΑΓ, βρίσκουμε

$$\frac{180^{\circ}-2\varphi}{2}=\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{A}=4\varphi$$

και άρα $\varphi=18^{\circ}$. Εύκολα βρίσκουμε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$:

$$\hat{A}=2\varphi=36^{\circ}, \hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=4\varphi=72^{\circ}.$$

Επιπλέον, αφού η γωνία $\mathrm{B}\widehat{\Gamma \mathrm{A}}$ είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΓΔ, παίρνουμε $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\Gamma=\frac{\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{A}}{2}=2\varphi$, και άρα

$$\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{A}=\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{A}-\mathrm{E}\widehat{\Delta}\Gamma=3\varphi-2\varphi=\varphi=\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}.$$

Έτσι, το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AE}=\mathrm{E}\Delta$. Αφού $\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Delta$, η ευθεία ΒΕ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΔ, οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ, η ΒΕ διχοτομεί την γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$, δίνοντας

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\mathrm{E}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma=\frac{\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta}{2}=\frac{\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{A}}{2}=2\varphi.$$

Συνεπώς, από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΕΒ, ΒΕΔ και ΑΕΔ παίρνουμε $\mathrm{AE}=\mathrm{BE}=\Delta\mathrm{E}$, δηλ. το Ε είναι το περίκεντρο του ΑΒΔ.
Τέλος, αφού $\mathrm{AZ}\perp\mathrm{B}\Delta$ και $\mathrm{BE}\perp\mathrm{A}\Delta$, το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του ΑΒΔ, οπότε $\Delta\mathrm{H}\perp\mathrm{AB}$.

Πρόβλημα 4. Οι πραγματικοί αριθμοί α,β ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3+\beta^3+6\alpha\beta=8.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αθροίσματος $\alpha+\beta$.

Λύση, (1ος τρόπος) Έχουμε:

$$\alpha^3+\beta^3+6\alpha\beta=8\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+6\alpha\beta=8\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^3-2^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+6\alpha\beta=0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta-2)((\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)+4)-3\alpha\beta(\alpha+\beta-2)=0\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta-2)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4)=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta-2=0 \text{ ή } \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4\Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta=2 \text{ ή } 2\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta+4\alpha+4\beta+8\Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta=2 \text{ ή } (\alpha-\beta)^2+(\alpha+2)^2+(\beta+2)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta=2 \text{ ή } \alpha=\beta=-2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta=2 \text{ ή } \alpha+\beta=-4.$$

2ος τρόπος. Έστω $x=\alpha+\beta$, οπότε θέτοντας $\alpha=x-\beta$ στην $\alpha^3+\beta^3+6\alpha\beta-8=0$ παίρνουμε

$$(x-\beta)^3+\beta^3+6(x-\beta)\beta-8=0,$$

η οποία μετά από πράξεις δίνει

$$x^3-3\beta x^2+3\beta^2x+6\beta x-6\beta^2-8=0.$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $x-2$ παίρνουμε

$$(x-2)(x^2-(3\beta-2)x+3\beta^2+4)=0,$$

οπότε

$$x=2 \quad \text{ή} \qquad x^2-(3\beta-2)x+3\beta^2+4=0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2-(3\beta-2)x+3\beta^2+4$ είναι ίση με

$$\Delta=(3\beta-2)^2-4(3\beta^2+4)=-3\beta^2-12\beta-12=-3(\beta+2)^2.$$

Άρα το τριώνυμο $x^2-(3\beta-2)x+3\beta^2+4$ μπορεί να γίνει ίσο με το 0, μόνο όταν

$$\beta=-2 \text{ και } x=\frac{3\beta-2}{2}=\frac{-8}{2}=-4.$$

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές του αθροίσματος $x=\alpha+\beta$ είναι το 2 και το -4.

3ος τρόπος. Η δεδομένη σχέση μπορεί να γραφεί ως ισότητα αθροίσματος τριών κύβων με το τριπλάσιο γινόμενό τους, οπότε από τη γνωστή ταυτότητα των κύβων έχουμε:

$$\alpha^3+\beta^3+6\alpha\beta=8 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+(-2)^3=3\alpha\beta(-2)$$
$$\Leftrightarrow \alpha+\beta-2=0 \text{ ή } \alpha=\beta=-2 \Leftrightarrow \alpha+\beta=2 \text{ ή } \alpha+\beta=-4.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$\big||2x-4|-a\big|=8 \qquad\qquad (\text{E})$$

με άγνωστο το x και $a\in\mathbb{R}$ παράμετρο. Αν η εξίσωση (Ε) έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$, να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου a και τις τρεις λύσεις της εξίσωσης.

Λύση. Έχουμε

$$\big||2x-4|-a\big|=8 \Leftrightarrow |2x-4|-a=8 \text{ ή } |2x-4|-a=-8 \Leftrightarrow$$
$$|2x-4|=a+8 \quad (\text{E}_1) \qquad \text{ή} \qquad |2x-4|=a-8 \quad (\text{E}_2)$$

Η εξίσωση (E_1) είναι αδύνατη για $a<-8$, έχει μοναδική λύση $x=2$ για $a=-8$ και έχει δύο λύσεις για $a>-8$, οι οποίες είναι:

$$|2x-4|=a+8 \Leftrightarrow 2x-4=a+8 \text{ ή } 2x-4=-a-8$$
$$\Leftrightarrow 2x=a+12 \text{ ή } 2x=-a-4 \Leftrightarrow x=\frac{a+12}{2} \quad \text{ή} \quad x=-\frac{a+4}{2}.$$

Η εξίσωση (E_2) είναι αδύνατη για $a<8$, έχει μοναδική λύση $x=2$ για $a=8$ και έχει δύο λύσεις για $a>8$.

Επομένως η εξίσωση (Ε) μπορεί να έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$, μόνον όταν $a=8$. Τότε η εξίσωση (Ε) έχει τη λύση $x=2$ από την εξίσωση (E_2) και άλλες δύο λύσεις από την εξίσωση (E_1), οι οποίες είναι:

$$x=\frac{a+12}{2}=10 \quad \text{ή} \quad x=-\frac{a+4}{2}=-6.$$

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε την ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\alpha_1=1$ και

$$\alpha_{\nu+1}=\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu+1},$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος

$$\Sigma = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{2024}\alpha_{2025}\,.$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{\alpha_\nu + 1}{\alpha_\nu} = 1 + \frac{1}{\alpha_\nu} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{\nu+1}} - \frac{1}{\alpha_\nu} = 1, \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα η ακολουθία $\frac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 1, οπότε

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_1} + (\nu - 1) = 1 + \nu - 1 = \nu \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \qquad \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Επιπλέον, από την ισότητα έχουμε

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1} \Rightarrow \alpha_\nu\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}^*,$$

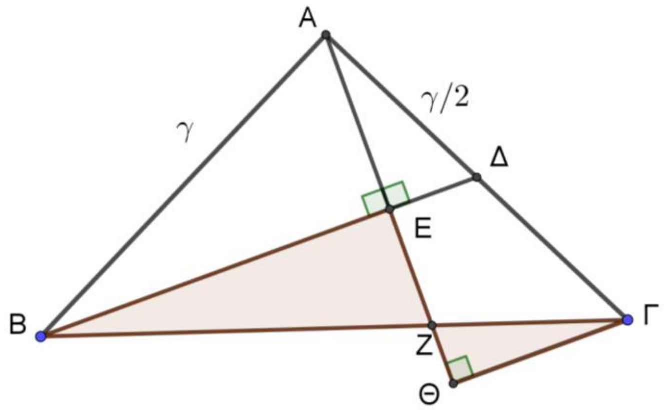
οπότε θα είναι

$$\begin{aligned}\Sigma &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{2024}\alpha_{2025} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + (\alpha_{2024} - \alpha_{2025}) \\ &= \alpha_1 - \alpha_{2025} = 1 - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}.\end{aligned}$$

Σημείωση. Η υπόθεση ότι $\alpha_\nu > 0$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, αν δεν δίνεται, μπορεί να προκύψει εύκολα με επαγωγή.

Πρόβλημα 3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Αν το Ζ είναι σημείο στην πλευρά ΒΓ τέτοιο, ώστε η ευθεία ΑΖ να είναι κάθετη στην ευθεία ΒΔ και να ισχύει $\text{ΒΖ} = 2 \cdot \text{ΖΓ}$, να αποδείξετε ότι $\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Γ} = 90^o$.

Λύση (1ος τρόπος)



Έστω $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} = \gamma$, οπότε $\text{ΑΔ} = \frac{\gamma}{2}$.

Φέρουμε από το σημείο Γ την κάθετη προς την ευθεία ΑΖ που την τέμνει, έστω στο σημείο Θ. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΘΖ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{\mathrm{BE}}{\Gamma\Theta}=\frac{\mathrm{BZ}}{\mathrm{Z}\Gamma}=2 \Rightarrow \mathrm{BE}=2\cdot\Gamma\Theta \qquad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΘΓ το τμήμα ΕΔ είναι μεσοπαράλληλο, οπότε

$$\Gamma\Theta=2\cdot\Delta\mathrm{E} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\mathrm{BE}=4\cdot\Delta\mathrm{E} \qquad (3)$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΕ έχουμε:

$$\mathrm{AE}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BE}^2=\mathrm{A}\Delta^2-\Delta\mathrm{E}^2 \Leftrightarrow \gamma^2-16\cdot\Delta\mathrm{E}^2=\frac{\gamma^2}{4}-\Delta E^2 \Leftrightarrow \Delta\mathrm{E}^2=\frac{\gamma^2}{20}.$$

Άρα είναι

$$\Delta\mathrm{E}=\frac{\gamma\sqrt{5}}{10}, \qquad \mathrm{BE}=\frac{4\gamma\sqrt{5}}{10} \text{ και } \mathrm{B}\Delta=\mathrm{BE}+\mathrm{E}\Delta=\frac{\gamma\sqrt{5}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{A}\Delta^2=\gamma^2+\frac{\gamma^2}{4}=\frac{5\gamma^2}{4}=\mathrm{B}\Delta^2,$$

οπότε από το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta=90^o$, οπότε είναι και $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=90^o$.

Δεύτερη λύση

Έστω Ο το μέσο της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(0,2\alpha), \mathrm{B}(-6\beta,0)$ και $\Gamma(6\beta,0)$. Τότε είναι $\mathrm{Z}(2\beta,0)$ και $\Delta(3\beta,\alpha)$. Από εδώ μπορούμε να προχωρήσουμε με δύο τρόπους:

2ος τρόπος: Διανυσματική λύση

Αφού $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$, είναι $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}=0$. Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}=(2\beta,-2\alpha)$ και $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}=(9\beta,\alpha)$ οπότε

$$0=\overrightarrow{\mathrm{AZ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}=2\beta\cdot 9\beta+(-2\alpha)\cdot\alpha=2(9\beta^2-\alpha^2),$$

και άρα $9\beta^2-\alpha^2=0$. Επίσης, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-6\beta,-2\alpha)$ και $\overrightarrow{A\Delta}=(3\beta,-\alpha)$ με

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}=-6\beta\cdot 3\beta+(-2\alpha)\cdot(-\alpha)=-2(9\beta^2-\alpha^2)=0.$$

Συνεπώς $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}$, και άρα $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=90^\circ$.

3ος τρόπος: Λύση με Αναλυτική γεωμετρία.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΖ είναι

$$\lambda_{AZ}=\frac{0-2\alpha}{2\beta-0}=-\frac{\alpha}{\beta},$$

ενώ αυτός της ευθείας $B\Delta$ είναι

$$\lambda_{B\Delta}=\frac{\alpha-0}{3\beta-(-6\beta)}=\frac{\alpha}{9\beta}.$$

Αφού $A\mathrm{Z}\perp\mathrm{B}\Delta$, είναι $\lambda_{AZ}\cdot\lambda_{B\Delta}=-1$, οπότε παίρνουμε

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{9\beta}=-1,$$

δηλ. $\alpha^2=9\beta^2$.
Στη συνέχεια βλέπουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι

$$\lambda_{AB}=\frac{2\alpha-0}{0-(-6\beta)}=\frac{\alpha}{3\beta},$$

ενώ αυτός της ευθείας ΑΔ είναι

$$\lambda_{A\Delta}=\frac{\alpha-2\alpha}{3\beta-0}=-\frac{\alpha}{3\beta},$$

με το γινόμενο τους να είναι

$$\lambda_{AB}\cdot\lambda_{A\Delta}=\frac{\alpha}{3\beta}\cdot\left(-\frac{\alpha}{3\beta}\right)=-\frac{\alpha^2}{9\beta^2}=-1.$$

Συνεπώς ΑΒ $\perp$ ΑΔ, και άρα $\mathrm{B\widehat{A}\Gamma}=90^\circ$.

Πρόβλημα 4. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε $P(1)=9$ και $P(9)=1481$. Να βρεθεί η τιμή του $P(10)$.

Λύση
Έστω

$$P(x)=a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

όπου $a_\nu,a_{\nu-1},\dots,a_{1,}a_0$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $a_\nu>0$. Αφού

$$a_\nu+a_{\nu-1}+\cdots+a_1+a_0=P(1)=9,$$

έπεται ότι $0\le a_i\le 9$ για κάθε $0\le i\le \nu$. Επίσης, είναι

$$1481=P(9)=a_\nu 9^\nu+a_{\nu-1}9^{\nu-1}+\cdots+a_19+a_0,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $1481-a_0=164\cdot 9+(5-a_0)$ διαιρείται με το 9, με $-4\le 5-a_0\le 5$, αφού το a_0 είναι ψηφίο . Άρα είναι $\alpha_0=5$, οπότε

$$164=a_\nu 9^{\nu-1}+a_{\nu-1}9^{\nu-2}+\cdots+a_1,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $164-a_1=18\cdot 9+(2-a_1)$ διαιρείται με το 9, με $-7\le 2-a_1\le 2$, αφού το a_1 είναι ψηφίο. Άρα $\alpha_1=2$, οπότε

$$18=a_\nu 9^{\nu-2}+\cdots+a_2.$$

Αφού $a_2<18$, έπεται ότι $\nu-2>0$, δηλ. $\nu>2$. Αν $\nu\ge 4$, τότε

$$18\ge a_\nu 9^{\nu-2}\ge 9^{\nu-2}\ge 9^2=81>18,$$

άτοπο. Άρα $\nu=3$, οπότε

$$18=\alpha_3 9+\alpha_2$$

με $0\le\alpha_2+\alpha_3\le P(1)-\alpha_0-\alpha_1=9-5-2=2$. Αφού το 9 διαιρεί το $a_2=18-9a_3$ έπεται ότι $a_2=0$ και άρα $a_3=2$.
Συνεπώς, $P(x)=2x^3+2x+5$, οπότε $P(10)=2025$.

Σχόλιο. Με διαδοχικές Ευκλείδειες διαιρέσεις με το 9, έχουμε

$$1481=164\cdot 9+5,\quad 164=18\cdot 9+2,\text{ και } 18=2\cdot 9+0.$$

Έτσι, είναι $164 = (2 \cdot 9) \cdot 9 + 2 = 2 \cdot 9^2 + 2$, και παίρνουμε την ισότητα

$$1481 = (2 \cdot 9^2 + 2) \cdot 9 + 5 = 2 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 + 2,$$

η οποία μας δίνει την *μοναδική* παράσταση του 1481 στο σύστημα αρίθμησης με βάση το 9. Ουσιαστικά στην παραπάνω λύση αποδεικνύουμε την μοναδικότητα αυτή.