Επιμορφωτική Διαδικτυακή Συνάντηση Συμβούλων Εκπαίδευσης κλ. ΠΕ03 Αττικής

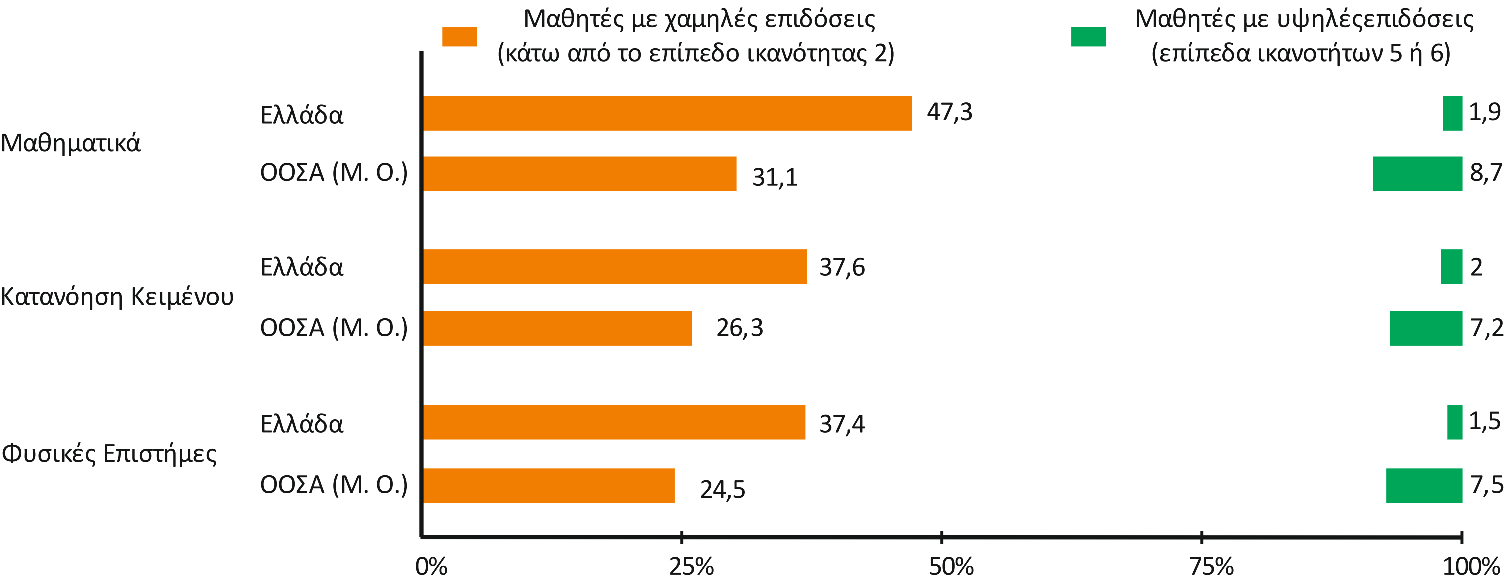
Τετάρτη 15 Ιανουαρίου 2025 και ώρες 16:00-18:00

«Η Άλγεβρα στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών Γυμνασίου»

Γιώργος Κόσυβας

Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Β΄ Αθήνας

Το νέο ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου θα ανταποκριθεί στις προκλήσεις PISA;



Τα αποτελέσματα του PISA 2022 ανέδειξαν ότι μόλις το 52,7% των μαθητών στην Ελλάδα πέτυχε το επίπεδο 2 στα Μαθηματικά (μέσος όρος ΟΟΣΑ: 68,9%), ενώ μόνο το 1,9% έφτασε τα υψηλότερα επίπεδα 5 και 6 (ΟΟΣΑ: 8,7%). **Το 1/3 περίπου των 15-χρόνων μαθητών στην Ελλάδα είναι λειτουργικά αναλφάβητοι και στα τρία μαθήματα!**

Αυτό αναδεικνύει τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μοντελοποίηση και την επίλυση σύνθετων προβλημάτων. Το νέο ΠΣ Μαθηματικών επιχειρεί να ανταποκριθεί σε αυτές, εστιάζοντας στη σύνδεση της θεωρίας με την πράξη, τη μελέτη κανονικοτήτων και σχέσεων, **καθώς και στην εφαρμογή των Μαθηματικών σε πραγματικές καταστάσεις.** Στόχος είναι η ενίσχυση της μαθηματικής σκέψης και η σταδιακή ανάπτυξη δεξιοτήτων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να ανταποκρίνονται σε πιο απαιτητικά μαθηματικά προβλήματα.

Οι άξονες της παρουσίασης

1. **Εισαγωγή στο νέο ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου, μαθηματικό περιεχόμενο και πρακτικές.**
2. **Ο ρόλος της Άλγεβρας στο ΠΣ Μαθηματικών.**
3. **Παραδείγματα διδακτικής διαχείρισης από το νέο ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου.**
4. **Συμπεράσματα, στρατηγικές διδασκαλίας της Άλγεβρας με το νέο ΠΣ.**

Σήμερα θα εξετάσουμε πώς διδάσκουμε την Άλγεβρα στο πλαίσιο του νέου ΠΣ με βάση τις σύγχρονες διδακτικές πρακτικές. Στόχος είναι να αναδείξουμε στοιχεία από τη διδακτική διαχείριση και την ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας των Μαθηματικών για τις κανονικότητες, τις αλγεβρικές παραστάσεις, τη συμμεταβολή και τη γραφική παράσταση συνάρτησης κατά τη διδασκαλία της Άλγεβρας.

1

Εισαγωγή στο νέο ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου, μαθηματικό περιεχόμενο και πρακτικές

Το μαθηματικό περιεχόμενο στο νέο ΠΣ Μαθηματικών (2023)

Το Περιεχόμενο του νέου ΠΣ Μαθηματικών οργανώνεται σε **τρία θεματικά πεδία** :

- **Άλγεβρα**: Εξερεύνηση αλγεβρικών παραστάσεων, κανονικοτήτων, συναρτήσεων και αλγεβρικών σχέσεων (εξισώσεων, ανισώσεων).
- **Γεωμετρία-Μετρήσεις**: Μελέτη σχημάτων, χώρου και συμμετρίας.
- **Στοχαστικά Μαθηματικά**: Στατιστική, Πιθανότητες.

Αυτά τα πεδία του περιεχομένου περιλαμβάνουν θεμελιώδεις πτυχές της μαθηματικής σκέψης και εφαρμογής, αναδεικνύοντας **τη σημασία της κατανόησης δομών, σχέσεων και της ανάλυσης δεδομένων**, ενώ συνδέουν τη μαθηματική γνώση με πραγματικές καταστάσεις.

Οι Μεγάλες Ιδέες του νέου ΠΣ

Οι **Μεγάλες Ιδέες** του νέου ΠΣ λειτουργούν ως θεμέλια για την ενότητα και συνοχή της μαθηματικής γνώσης, ενισχύοντας τη μαθηματική σκέψη και τη σύνδεση εννοιών. Βασικοί θεματικοί πυλώνες περιλαμβάνουν:

- **Μαθηματική Δομή**: Συνδέει αριθμητικές και αλγεβρικές έννοιες, καλλιεργώντας τη συνδυαστική σκέψη.
- **Γενίκευση και Απόδειξη**: Εστιάζει σε γενικά πρότυπα και αποδεικτικές διαδικασίες, προάγοντας τη μαθηματική λογική.
- **Μεταβολή**: Μελετά συναρτήσεις και μετασχηματισμούς, αποκαλύπτοντας τη δυναμική φύση των Μαθηματικών.
- **Ισοδυναμία**: Αναδεικνύει τη σημασία συμμετρίας και σχέσεων ισοδυναμίας, ενισχύοντας την κατανόηση της μαθηματικής οργάνωσης.

Οι ιδέες αυτές **συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές ενότητες** (π.χ. Γεωμετρία και Άλγεβρα) σε συνεκτικό πλαίσιο, ενθαρρύνοντας τη σύνδεση μεταξύ αναπαραστάσεων και την εφαρμογή της γνώσης σε ποικίλα πλαίσια.

Μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές

Οι καινοτομίες του ΠΣ δεν περιορίζονται στο περιεχόμενο (Sakonidis, et al., 2022).

Το νέο ΠΣ αποσκοπεί στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε κρίσιμες διεργασίες κατανόησης και ανάπτυξης μαθηματικής γνώσης, οι οποίες χωρίζονται σε μαθηματικές και κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές. Οι αμιγώς μαθηματικές πρακτικές περιλαμβάνουν (Πόταρη κ. ά., 2022):

την δημιουργία συνδέσεων, τον συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, τη μαθηματική επικοινωνία, την οπτικοποίηση, την επιλογή και τη χρήση εργαλείων, την επίλυση προβλήματος, τη μοντελοποίηση και τη μεταγνωστική

Αυτές οι **δεξιότητες** προάγουν τη σύνδεση μαθηματικών εννοιών με την καθημερινότητα, την κριτική σκέψη και την κατανόηση πολύπλοκων καταστάσεων. Η έμφαση μετατοπίζεται από τη μηχανική εφαρμογή τύπων στη βαθύτερη κατανόηση εννοιών.

Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές

Οι κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές εστιάζουν στη διασύνδεση γνωστικών, κοινωνικών και πολιτισμικών στοιχείων, με στόχο την ενίσχυση της μαθηματικής σκέψης και γραμματισμού. Οι βασικές δεξιότητες και ικανότητες περιλαμβάνουν (Πόταρη κ. ά., 2022) :

- **Ερμηνεία καταστάσεων**: Χρήση Μαθηματικών για την ανάλυση προσωπικών, εργασιακών και κοινωνικών φαινομένων.
- **Κριτική επίγνωση**: Ανάπτυξη αντίληψης για τον ρόλο των Μαθηματικών στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις.
- **Αξία διαλόγου**: Εκτίμηση ιδεών άλλων, ανάπτυξη επιχειρημάτων και λήψη αποφάσεων μέσω διαλόγου και διαπραγμάτευσης.
- **Μαθηματική και πολιτισμική διαλεκτική**: Κατανόηση της σχέσης μαθηματικής σκέψης και πολιτισμού, καθώς και της διαχρονικής αξίας τους στην ανθρώπινη δραστηριότητα.
- **Μαθηματικός γραμματισμός**: Ικανότητα ανάλυσης, κατανόησης, δημιουργίας και εφαρμογής μαθηματικών εννοιών για την επίλυση προβλημάτων σε ποικίλα πλαίσια, **τόσο εντός όσο και εκτός Μαθηματικών.**

Οι πρακτικές αυτές ενδυναμώνουν τους μαθητές, καθιστώντας τους ικανούς να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ως εργαλείο κατανόησης και παρέμβασης στον κόσμο γύρω τους.

Κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές στα Μαθηματικά

Οι κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές ενδυναμώνουν τους μαθητές, καθιστώντας τους ικανούς να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ως εργαλείο κατανόησης και παρέμβασης στον κόσμο γύρω τους .

Οι κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές προάγουν την αυτοπεποίθηση, τη θετική μαθηματική ταυτότητα και τη συνεργατική μάθηση, μέσω (Πόταρη κ. ά., 2022):

- **Ανάπτυξης θετικών κινήτρων**: Καλλιέργεια επιμονής, υπομονής και εκτίμησης της ομορφιάς των μαθηματικών.
- **Δεξιοτήτων αυτορρύθμισης**: Ενίσχυση της αξιολόγησης, του ελέγχου και της αυτογνωσίας στη μαθηματική πρόοδο.
- **Θετικών σχέσεων και συνεργασίας**: Υποστήριξη αλληλεπίδρασης που σέβεται τη διαφορετικότητα και ενθαρρύνει τη συζήτηση και την κοινή λύση προβλημάτων.
- **Διαχείρισης συναισθημάτων**: Ανάπτυξη ικανοτήτων για την αναγνώριση και διαχείριση άγχους και συναισθημάτων.

Ο Ρόλος των εκπαιδευτικών στις προηγούμενες πρακτικές

Οι κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές που περιγράφονται στα ΠΣ προωθούνται όταν οι εκπαιδευτικοί (Πόταρη κ. ά., 2022):

- **Διατηρούν υψηλές προσδοκίες** για όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από το επίπεδό τους.
- **Ενθαρρύνουν θετική στάση προς τα μαθηματικά**, καλλιεργώντας την πίστη ότι η επιτυχία είναι εφικτή για όλους.
- **Επιλέγουν δραστηριότητες** που εμπλέκουν ενεργά όλους τους μαθητές, προάγοντας τη συμμετοχικότητα.
- **Αναδεικνύουν τη σύνδεση των Μαθηματικών** με την καθημερινή ζωή και το ευρύτερο κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον.
- **Ενισχύουν τη συνεργασία**, προάγοντας τον διάλογο, την κατανόηση και την αποδοχή διαφορετικών απόψεων.

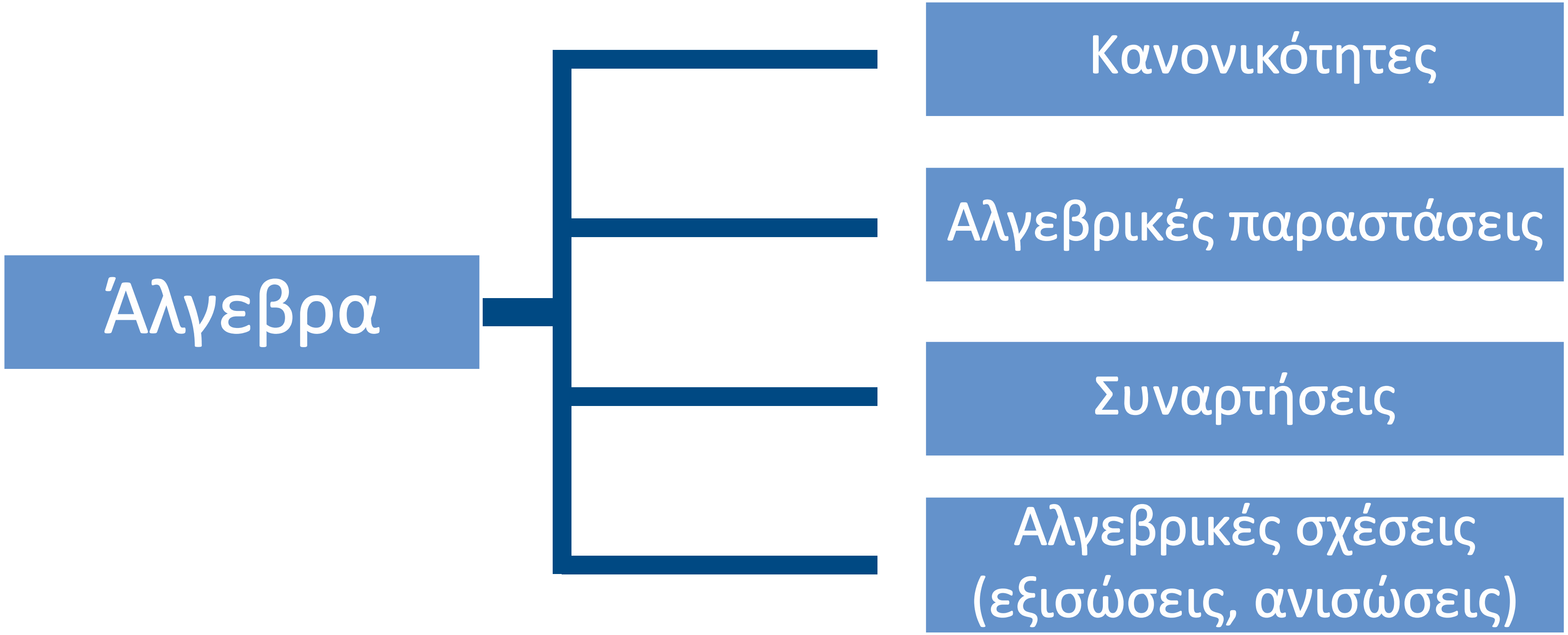
Αυτές οι πρακτικές καθιστούν τα Μαθηματικά κατανοητά, προσιτά και σχετιζόμενα με την καθημερινότητα, διαμορφώνοντας μια θετική μαθησιακή εμπειρία. Παράλληλα, εξοπλίζουν τους εκπαιδευτικούς με κρίσιμες δεξιότητες που απαιτούνται από τον πολίτη του 21ου

2

Ο ρόλος της Άλγεβρας στο ΠΣ Μαθηματικών

Μαθηματικό περιεχόμενο του νέου ΠΣ στην υποδιαίρεση ΙΙ: Άλγεβρα

Η υποδιαίρεση του πεδίου ΙΙ: Άλγεβρα πραγματεύεται τα αντικείμενα τα οποία απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Η Άλγεβρα στο νέο ΠΣ Μαθηματικών του Γυμνασίου

- Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του Γυμνασίου αναδεικνύει την Άλγεβρα ως εργαλείο κατανόησης κανονικοτήτων και σχέσεων, δίνοντας έμφαση στη μελέτη βασικών εννοιών, **όπως οι μεταβλητές, οι αλγεβρικές παραστάσεις και οι εξισώσεις.** Παράλληλα, εισάγονται **άτυπες μέθοδοι επίλυσης**, που ενισχύουν την ευελιξία και τη δημιουργικότητα στη μαθηματική σκέψη.

- **Η έμφαση στη μηχανιστική εξάσκηση και τους τυπικούς χειρισμούς μειώνεται**, ενώ προωθείται η σύνδεση της Άλγεβρας με πραγματικά προβλήματα. Για παράδειγμα, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν αλγεβρικά εργαλεία για την κατανόηση προτύπων, τη μοντελοποίηση δεδομένων ή την πρόβλεψη αποτελεσμάτων, όπως ο **υπολογισμός κατανάλωσης καυσίμων ή η ανάλυση οικονομικών δεδομένων.**

- Με αυτή την προσέγγιση, η Άλγεβρα δεν παρουσιάζεται ως αποκομμένη από την καθημερινότητα αλλά ως ένα δυναμικό μέσο που ενισχύει τη μαθηματική σκέψη, την κριτική ανάλυση και την **επίλυση προβλημάτων**, προετοιμάζοντας τους μαθητές για σύνθετες προκλήσεις.

Ανασχεδιασμός της ύλης του ΠΣ με ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης

- Η αναδιαμόρφωση της ύλης της Άλγεβρας εστιάζει στην **ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης**, προσφέροντας στους μαθητές μια βαθύτερη κατανόηση θεμελιωδών εννοιών.
- Οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν μεταβλητές, κανονικότητες, αλγεβρικές παραστάσεις, εξισώσεις και ανισώσεις, με εργαλεία όπως το μοντέλο “ζυγαριάς”, τα “αλγεβρικά πλακίδια” κ.λπ. που διευκολύνουν την κατανόηση των σχέσεων και των μεταβολών.
- Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις κανονικότητες της μορφής **αν, αν+β, αν^2**, που ενθαρρύνουν τη **διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών** και τη γενίκευση και αναδεικνύουν τη δυναμική φύση της μαθηματικής σκέψης.
- Η νέα ύλη εισάγει την **έννοια της συμμεταβολής**, προάγει τις **πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης**, εισάγει την **κλίση** ευθείας ως μεταβολή του y για μοναδιαία αύξηση του x και τονίζει τη λύση ρεαλιστικών προβλημάτων.
- Οι πρώτες παρατηρήσεις από την πιλοτική εφαρμογή δείχνουν ότι οι μαθητές **αποδέχθηκαν θετικά αυτές τις προσεγγίσεις,** εκτιμώντας την πρακτική τους αξία.

Ανασχεδιασμός της ύλης του ΠΣ με ελάφρυνση

- Παράλληλα, η ύλη ελαφρύνεται με την αφαίρεση εννοιών που θεωρούνται περίπλοκες για το Γυμνάσιο, όπως **οι ταυτότητες κύβων, η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με διακρίνουσα, η συνάρτηση του τριωνύμου δευτέρου βαθμού, οι οποίες μεταφέρονται στην Α΄ Λυκείου.** Επίσης **οι ανισώσεις πρώτου βαθμού μεταφέρονται στην Γ΄ Γυμνασίου όπως και η σύνδεση της κλίσης ευθείας με την εφαπτομένη της γωνίας.** Αυτές οι αλλαγές αποσκοπούν στη μείωση του φόρτου, επιτρέποντας στους μαθητές να εστιάσουν σε θεμελιώδεις έννοιες και δεξιότητες που είναι πιο προσιτές και κατανοητές.
- Ο ανασχεδιασμός της ύλης **επιχειρεί να ισορροπήσει μεταξύ διατήρησης βασικών εννοιών και εισαγωγής καινοτόμων προσεγγίσεων.** Εστιάζει στην ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης ως εργαλείου κατανόησης και δημιουργικότητας, ενώ παράλληλα επιδιώκει να καλλιεργήσει την αυτοπεποίθηση των μαθητών. Αυτή η προσέγγιση αποσκοπεί στη σταδιακή ανάπτυξη δεξιοτήτων που διευκολύνουν την κατανόηση των Μαθηματικών και την εφαρμογή τους σε σύνθετα προβλήματα.

Τα διεθνή ΠΣ για την Άλγεβρα:

Πρόσφορα **πραγματικά προβλήματα και εφαρμογές** παρακινούν τους μαθητές να χρησιμοποιούν **άτυπες στρατηγικές συμβολισμού** και να μεταβούν ομαλά από την Αριθμητική στην Άλγεβρα.

Γίνονται **διαθεματικές συνδέσεις** με τη γεωμετρία, τη στατιστική, και άλλες περιοχές.

Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις μαθησιακές διαδρομές που εμπλέκουν τους μαθητές στον ***«αλγεβρικό συλλογισμό»*** *:*

- ***Μετάφραση/Γενίκευση/Τυποποίηση,***
- ***Αλγοριθμική Επεξεργασία,***
- ***Ερμηνεία.***

Η Άλγεβρα στο Δημοτικό σχολείο

Η πρώιμη αλγεβρική σκέψη αναπτύσσεται στο Δημοτικό.

«Κατά την τελευταία δεκαετία, όλο και περισσότεροι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών προτείνουν να αρχίζει η μελέτη της Άλγεβρας από το Δημοτικό σχολείο. Διευκρινίζουν ότι δεν πρόκειται για μια πρόωρη διδασκαλία της Άλγεβρας της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ούτε για μια «προάλγεβρα» [...]. Πρέπει μάλλον να οδηγήσουμε τους μαθητές να αναπτύσσουν την ***αλγεβρική σκέψη*** *χωρίς απαραίτητα να χρησιμοποιούν την εγγράμματη γλώσσα της Άλγεβρας.*

(Squalli, 2002, p. 4)

Αιτίες δυσκολιών των μαθητών στην Άλγεβρα

Η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα αποτελεί πρόκληση για τους μαθητές, καθώς απαιτεί διαφορετικές δεξιότητες και τρόπο σκέψης.

1. **Εννοιολογικό άλμα:** Η αριθμητική επικεντρώνεται σε συγκεκριμένους υπολογισμούς, ενώ η άλγεβρα περιγράφει γενικές σχέσεις. Αυτή η μετάβαση από το ειδικό στο γενικό απαιτεί αφαιρετική σκέψη, κάτι που δεν είναι αυτονόητο για όλους τους μαθητές.

2. **Έλλειψη βασικών δεξιοτήτων:** Οι μαθητές συχνά δεν αποκτούν τις δεξιότητες που χρειάζονται, όπως η αναγνώριση προτύπων, η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και η εφαρμογή κανόνων, με αποτέλεσμα να καταφεύγουν στη μηχανική απομνημόνευση.

3. **Απαίτηση αφαίρεσης και γενίκευσης:** Οι ιδιότητες της Άλγεβρας είναι αφαιρέσεις των κανόνων της Αριθμητικής, και η διαδικασία κατανόησής τους απαιτεί την ικανότητα γενίκευσης και εννοιολογικής σκέψης, κάτι που αποτελεί δύσκολο εγχείρημα για πολλούς μαθητές.

Βιβλιογραφία: Kieran, 1992, NCTM, 2000, Sfard, 1991

Αλγεβρική γλώσσα και σκέψη

Η Άλγεβρα ορίζεται ως **γενίκευση της αριθμητικής** ή ως γλώσσα για τη γενίκευση της αριθμητικής. Αλλά η Άλγεβρα είναι κάτι περισσότερο από ένα σύνολο κανόνων για το χειρισμό συμβόλων, είναι ένας **τρόπος σκέψης** (Vance, το 1998, σ. 282)

Η Άλγεβρα είναι μια γλώσσα. Αυτή η γλώσσα περιλαμβάνει μεταξύ άλλων: τις σχέσεις, τους αγνώστους και τις μεταβλητές, καθώς επίσης τη **γενίκευση των κανονικοτήτων**. Όποτε γίνεται συζήτηση για αυτές τις ιδέες σε οποιαδήποτε βαθμίδα, είναι μια ευκαιρία να εργαστούμε με τη γλώσσα της Άλγεβρας (Usiskin, το 1997, σ 346)

Η Άλγεβρα είναι ένα **ισχυρό εργαλείο για τη λύση προβλημάτων**. Επιτρέπει την ευκολότερη προσέγγιση των λύσεων [...] Είναι ένα απαραίτητο εργαλείο για την παράσταση και λύση περίπλοκων καταστάσεων του κόσμου που μας περιβάλλει (Baroody και Coslick, το 1998, σ. 16-3).

Χειρισμός συμβόλων χωρίς νόημα

- Η Kieran (1992), υποστηρίζει ότι **δημιουργούνται προβλήματα διότι επιβάλλουμε στους μαθητές τη συμβολική Άλγεβρα.**
- Η Herscovics (1989) τονίζει ότι **οι μαθητές διδάσκονται την σύνταξη της αλγεβρικής γλώσσας χωρίς την σημασιολογία της.** Είναι σαν να ξέρουν τους κανόνες της γραμματικής, αλλά όχι τη σημασία των λέξεων.

Αντι-διδακτική αντιστροφή

- Ο Freudenthal (1973), ονομάζει αυτήν την γενετικά «παράλογη» πορεία που ακολουθούμε συνήθως στη διδασκαλία, **«αντιδιδακτική αντιστροφή»**.
- Η εξοικείωση με την έννοια της μεταβλητής δεν είναι προφανής!
- Η διδασκαλία και μάθηση της Άλγεβρας**, θα έπρεπε να ξεκινά από καταστάσεις που οδηγούν φυσικά και όχι τεχνητά** στη χρήση συμβολισμών, σε μια έτοιμη συμβολική γλώσσα.

Από το διαδικαστικό στο δομικό τρόπο σκέψης

Συνδέοντας **την κατανόηση στα Μαθηματικά με τη λειτουργία της γλώσσας** ο *Freudenthal (1983)* γράφει:

«Θέλουμε ο μαθητής να διαβάζει τους τύπους με κατανόηση. Επιτρέπεται να διαβάσει: α συν β, α πλην β, α επί β, α στο τετράγωνο. Εντούτοις, πρέπει κάποια στιγμή να τα κατανοήσει ως: ***άθροισμα*** *του α και β, διαφορά του β από το α, γινόμενο του α και β,* ***τετράγωνο*** *του α».*

Άλγεβρα: από την αφαίρεση στην καθημερινή χρησιμότητα

- Η διδασκαλία της Άλγεβρας συχνά περιορίζεται σε αλγοριθμικές διαδικασίες, όπως η απλοποίηση παραστάσεων, η παραγοντοποίηση και η επίλυση εξισώσεων, παρουσιάζοντάς την ως αποκομμένη από την καθημερινή ζωή. Αυτή **η έλλειψη σύνδεσης με πραγματικά προβλήματα μειώνει το ενδιαφέρον των μαθητών**, καθώς δεν αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητά της.
- Για να γίνει η Άλγεβρα ουσιαστική, είναι απαραίτητο να ενσωματωθούν εφαρμογές που αναδεικνύουν την αξία της, όπως η κατανόηση μοτίβων, η ανάλυση δεδομένων και η λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων. Έτσι, η Άλγεβρα μπορεί να λειτουργήσει ως εργαλείο κριτικής σκέψης και δημιουργικότητας, **συνδέοντας τη θεωρία με την πράξη και ενισχύοντας την αντίληψη των μαθητών για την αξία της στην καθημερινότητα.**

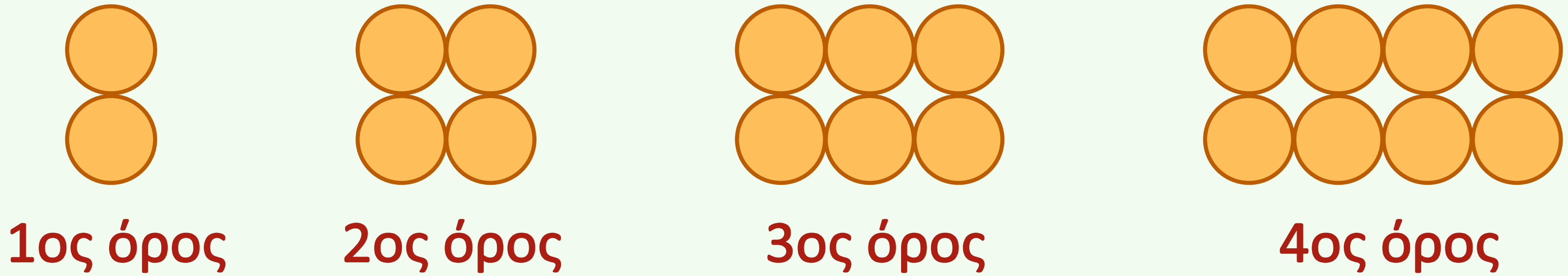
Ταξινόμηση των δραστηριοτήτων της σχολικής Άλγεβρας (Kieran, 2007)

- **Γενεσιουργός δραστηριότητα** (generational) η οποία εμπλέκει τη δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων (π.χ. γενίκευση γεωμετρικών μοτίβων).
- **Μετασχηματιστική** (transformational) η οποία αναφέρεται στις διαδικασίες μετασχηματισμού των αλγεβρικών παραστάσεων **σε ισοδύναμες** (εκτέλεση πράξεων, παραγοντοποίηση πολυωνύμων, λύση εξισώσεων), και
- **Σφαιρική** (global/meta-level) στην οποία η άλγεβρα χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την **ευρύτερη μαθηματική δραστηριότητα** (επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση, μελέτη των μεταβολών, απόδειξη).

Γενεσιουργός δραστηριότητα (Kieran, 2007)

Η γενεσιουργός δραστηριότητα (Generational Activity) σχετίζεται με τη δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων, ιδίως μέσα από διαδικασίες γενίκευσης συγκεκριμένων μοτίβων.

Παράδειγμα : Ένας μαθητής αναγνωρίζει ένα αριθμητικό ή γεωμετρικό μοτίβο (π.χ., 2, 4, 6, 8…) και το γενικεύει γράφοντας με μεταβλητές την αλγεβρική παράσταση, όπου **2ν, όπου ν=1, 2, 3, …**



Σημασία στη μάθηση: Εστιάζει στη σύνδεση συγκεκριμένων, εικονιστικών ή αριθμητικών παραδειγμάτων με τη γενικότητα που προσφέρει η αλγεβρική σκέψη. Ενισχύει την κατανόηση των μοτίβων και της αφηρημένης αναπαράστασης.

Μετασχηματιστική δραστηριότητα (Kieran, 2007)

Η μετασχηματιστική δραστηριότητα (Transformational Activity) αφορά τις διαδικασίες μετατροπής αλγεβρικών παραστάσεων σε ισοδύναμες, δηλαδή περιλαμβάνει τον χειρισμό τους με αλγεβρικές πράξεις.

Δραστηριότητες:

- Εκτέλεση αριθμητικών και αλγεβρικών πράξεων (π.χ., απλοποίηση του 2x+3x σε 5x).
- Παραγοντοποίηση πολυωνύμων (π.χ., x^2-9 σε (x−3)(x+3).
- Επίλυση εξισώσεων (π.χ., λύση της εξίσωσης 2x+5=11).

Σημασία στη μάθηση: Προωθεί τη δεξιότητα διαχείρισης και επεξεργασίας αλγεβρικών παραστάσεων, απαραίτητη για την κατανόηση της ισοδυναμίας και την επίλυση προβλημάτων.

Σφαιρική δραστηριότητα (Kieran, 2007)

Με τη σφαιρική δραστηριότητα (Global/Meta-Level Activity) η Άλγεβρα χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την κατανόηση και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, τη μοντελοποίηση καταστάσεων, τη μελέτη μεταβολών και την ανάπτυξη αποδεικτικών συλλογισμών.

Παραδείγματα χρήσης:

- **Επίλυση προβλημάτων:** Η χρήση αλγεβρικών παραστάσεων για τη λύση ενός προβλήματος (π.χ., σε μια κατάσταση όπου πρέπει να βρεθεί η τιμή ενός άγνωστου ποσού).
- **Μοντελοποίηση:** Η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων, όπως **γραμμικών εξισώσεων**, για την περιγραφή σχέσεων.
- **Μελέτη μεταβολών:** Ανάλυση των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων ή της επίδρασης **παραμέτρων** στις εξισώσεις.
- **Απόδειξη:** Χρήση αλγεβρικών μεθόδων για την κατασκευή και την **αιτιολόγηση αποδείξεων** (π.χ., δείχνοντας ότι μια εξίσωση ισχύει γενικά).

Σημασία στη μάθηση: Εστιάζει στη χρήση της Άλγεβρας ως ευρύτερης μεθόδου σκέψης και επίλυσης προβλημάτων, ενσωματώνοντάς την σε μεγαλύτερα μαθηματικά πλαίσια.

Συνόψιση δυσκολιών των μαθητών στην Άλγεβρα

Η κατανόηση της Άλγεβρας αποτελεί πρόκληση για πολλούς μαθητές. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι βασικές δυσκολίες περιλαμβάνουν:

1.Αφηρημένες έννοιες: Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις μεταβλητές και τη **σημασία του συμβολισμού**. Ο χαρακτήρας της Άλγεβρας ως αφηρημένης γλώσσας δημιουργεί εμπόδια, καθώς οι μαθητές συχνά δεν κατανοούν πώς οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν αριθμούς ή σχέσεις. (Booth, 1988; Kieran, 1992)

2.Έλλειψη συνδέσεων: Συχνά, οι μαθητές δεν βλέπουν **τη σύνδεση της Άλγεβρας με την καθημερινή ζωή ή με άλλες περιοχές των Μαθηματικών**, όπως η Γεωμετρία και η Στατιστική. Η έλλειψη παραδειγμάτων από πραγματικές εφαρμογές δυσχεραίνει την κατανόηση της χρησιμότητάς της. (NCTM, 2000)

3. Εστίαση στη μηχανική εφαρμογή: Η διδασκαλία συχνά εστιάζει στην **απομνημόνευση τύπων και στην εφαρμογή διαδικασιών**, χωρίς να δίνεται έμφαση **στο νόημα ή στη λογική** που υποστηρίζει αυτές τις διαδικασίες. Αυτό οδηγεί σε **ρηχή κατανόηση** και αδυναμία προσαρμογής σε νέα προβλήματα. (Sfard, 1991)

Συνόψιση δυσκολιών των μαθητών στην Άλγεβρα

4. Επίλυση Εξισώσεων: Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας **της ισοδυναμίας και της ισορροπίας**, βασικά στοιχεία για την επίλυση εξισώσεων. Η έλλειψη βιωματικών δραστηριοτήτων που προάγουν αυτές τις δεξιότητες επιτείνει το πρόβλημα. (Carpenter et al., 2003)

5. Ανάγνωση Γραφικών Παραστάσεων: Η μετάβαση από αριθμητικά δεδομένα σε γραφικές αναπαραστάσεις είναι συχνά προβληματική. Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν **πώς οι γραφικές παραστάσεις σχετίζονται με τις συναρτήσεις και τα δεδομένα που αναπαριστούν.** (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990)

Η αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών απαιτεί την εφαρμογή διδακτικών πρακτικών που ενισχύουν τη **σύνδεση της Άλγεβρας με την καθημερινή ζωή**, τη χρήση πολυδιάστατων αναπαραστάσεων και την εμβάθυνση στις βασικές έννοιες. **Η βιβλιογραφία υποστηρίζει ότι η ενεργητική μάθηση, η εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα και η χρήση οπτικοποιήσεων μπορούν να διευκολύνουν την κατανόηση.**

3

Παραδείγματα διδακτικής διαχείρισης και ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών από το νέο ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου

Παραδείγματα σύγχρονων προσεγγίσεων της Άλγεβρας

Οι προσεγγίσεις αυτές συμπλέουν με το νέο ΠΣ Μαθηματικών του Γυμνασίου και αποσκοπούν στη δημιουργία ενός πλούσιου μαθησιακού περιβάλλοντος που ενισχύει την κατανόηση και την εφαρμογή της Άλγεβρας μέσω οπτικοποίησης και ενεργητικής μάθησης.

1. **Αλγεβρικά πλακίδια**: Οπτικοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων για κατανόηση της δομής τους.

2. **Κανονικότητες**: Ανάδειξη μοτίβων και δημιουργία κανόνων για γενίκευση σχέσεων.

Παράδειγμα 1
«Αλγεβρικά πλακίδια»

Θεματική Ενότητα: Αλγεβρικές Παραστάσεις (Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου)

Η ισχύς της Άλγεβρας (στη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και στην αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων μέσω της μοντελοποίησης) συνδέεται άμεσα με την έννοια της μεταβλητής, την αλγεβρική παράσταση και τους μετασχηματισμούς της. Ωστόσο, αυτές οι έννοιες και διαδικασίες αποτελούν **συγχρόνως πηγή δυσκολίας, απογοήτευσης** και συχνά αποξένωσης των μαθητών/-τριών από τα Μαθηματικά.

- Οι δυσκολίες των μαθητών/-τριών σχετίζονται κυρίως με:
- **τη γλώσσα** (φυσική και συμβολική) που χρησιμοποιείται στην Άλγεβρα και τους διαφορετικούς ρόλους του γράμματος: **ετικέτα μεγέθους, άγνωστος, γενικευμένος αριθμός, μεταβλητή, παράμετρος,**
- **τη μετάφραση** ανάμεσα σε λεκτικές διατυπώσεις, συμβολικές (αλγεβρικές) εκφράσεις, πίνακες τιμών, εικονιστικές – γεωμετρικές αναπαραστάσεις,
- το ό,τι **δεν αποδίδουν νόημα στα αλγεβρικά σύμβολα** και στη χρήση τους.

Εισαγωγή: Γιατί αλγεβρικά πλακίδια; (ΜΕ-1)

Η χρήση αλγεβρικών πλακιδίων (algebra tiles) είναι μία από τις πιο αποτελεσματικές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία βασικών αλγεβρικών εννοιών στο Γυμνάσιο. Τα πλακίδια παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα:

- **Οπτικοποίησης αλγεβρικών εννοιών:** Μετατρέπουν αφηρημένες παραστάσεις σε χειροπιαστές και γεωμετρικές.
- **Κατανόησης της σύνδεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας:** Παριστάνουν παραστάσεις ως εμβαδά σχημάτων, διευκολύνοντας τη μετάβαση από τη συγκεκριμένη στη συμβολική σκέψη.
- **Ελαχιστοποίησης παρανοήσεων:** Βοηθούν στην κατανόηση της επιμεριστικής ιδιότητας, της παραγοντοποίησης και της του χειρισμού όρων.

Στόχοι Διδασκαλίας με Αλγεβρικά Πλακίδια (ΜΕ1)

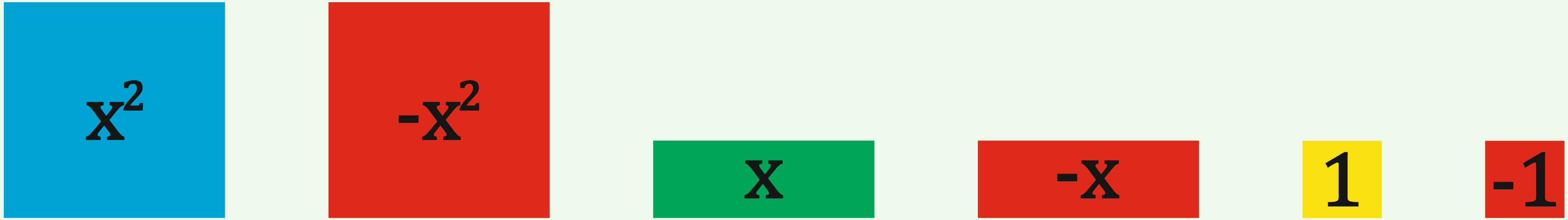
Οι μαθητές, μέσω της δραστηριότητας:

1. **Αναγνωρίζουν αλγεβρικές παραστάσεις:** Ως άθροισμα ή γινόμενο όρων.
2. **Συνδέουν γεωμετρικά και αλγεβρικά σύμβολα:** Αντιλαμβάνονται την οπτική και αφηρημένη φύση των παραστάσεων.
3. **Απλοποιούν παραστάσεις:** Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και τη σύνθεση όρων.
4. **Κατανοούν τη δομή παραγοντοποίησης:** Οπτικοποιώντας τις διαδικασίες ως εμβαδά σχημάτων.
5. **Αναγνωρίζουν και διορθώνουν λάθη:** Μέσω οπτικής επαλήθευσης.

Γνωριμία με τα αλγεβρικά πλακίδια; (ΜΕ-1)

Τα αλγεβρικά πλακίδια παρουσιάζονται **ως γεωμετρικές μονάδες** που παριστάνουν εμβαδά:

- Τα **τετράγωνα πλακίδια** αναπαριστούν x^2 και $-x^2$.
- Τα **ορθογώνια πλακίδια** αντιστοιχούν σε x και $-x$.
- Τα **μικρά τετράγωνα** παριστάνουν τους σταθερούς όρους, 1 και −1.



Οι μαθητές, οργανωμένοι σε ζεύγη ή μικρές ομάδες, παρατηρούν ένα σύνολο από πλακίδια και καλούνται **να γράψουν αλγεβρικές παραστάσεις**. Οι παραστάσεις περιλαμβάνουν όρους όπως x^2, $-x^2$, x, $-x$, 1 και -1.

Σχόλιο για τα αλγεβρικά πλακίδια (ΜΕ-1)

- **Το αρνητικό πρόσημο στα algebra tiles δεν αντιπροσωπεύει πραγματικό εμβαδόν**, καθώς το εμβαδόν είναι πάντα θετικό. Αντίθετα, χρησιμοποιείται συμβολικά για να εκφράσει αρνητικές αλγεβρικές τιμές, όπως αφαίρεση ή έλλειψη.
- Τα αρνητικά πλακίδια λειτουργούν ως εργαλεία για την οπτικοποίηση αλγεβρικών πράξεων, **όπως η εξουδετέρωση θετικών και αρνητικών όρων** ($x^2+(-x^2)=0$), βοηθώντας τους μαθητές να κατανοήσουν αφηρημένες έννοιες. Έτσι, παρότι δεν εκφράζουν γεωμετρική πραγματικότητα, **υποστηρίζουν τη μετάβαση από τη γεωμετρική στη συμβολική σκέψη.**

Δραστηριότητες με αλγεβρικά πλακίδια (ΜΕ-1)

Οι μαθητές, σε ζεύγη ή ομάδες, παρατηρούν πλακίδια και καλούνται να:

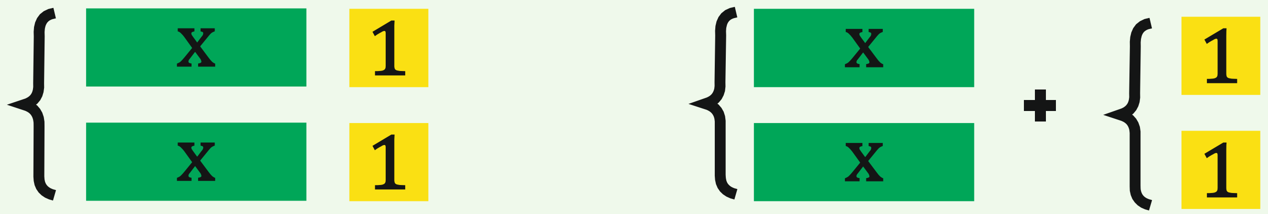
- Περιγράψουν τη γεωμετρική σημασία κάθε πλακιδίου.
- Δημιουργήσουν αλγεβρικές παραστάσεις που περιγράφουν σύνολα πλακιδίων.
- Εξετάσουν πώς αλλάζουν οι παραστάσεις **όταν προστίθενται ή αφαιρούνται πλακίδια.**

Η δραστηριότητα οργανώνεται με ερωτήσεις όπως:

- *Ποια είναι η γεωμετρική σημασία κάθε πλακιδίου;*
- *Πώς αλλάζει η παράσταση όταν προστίθενται ή αφαιρούνται πλακίδια;*
- *Τι περιγράφει η αλγεβρική παράσταση σε σχέση με τα πλακίδια;*

Διερεύνηση της επιμεριστικής ιδιότητας (ΜΕ-1)

Οι μαθητές στη συνέχεια χρησιμοποιούν χαρτόνια **για να φτιάξουν δικά τους αλγεβρικά πλακίδια.** Με αυτά, μετατρέπουν σχηματισμούς πλακιδίων σε αλγεβρικές παραστάσεις και αντίστροφα. Για παράδειγμα, ένας σχηματισμός που περιλαμβάνει x, x, 1,1 μπορεί να αναπαρασταθεί ως 2(x+1) ή 2x+2.



$2\cdot(x+1)$ $\quad$ $2\cdot x+2\cdot 1$

Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις όπως:

- *Τι περιγράφει η αλγεβρική παράσταση σε σχέση με τον σχηματισμό;*
- *Μπορείτε να συνδυάσετε τα πλακίδια διαφορετικά για να έχετε την ίδια παράσταση;*

Απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων (ΜΕ-1)

Η δραστηριότητα συνεχίζεται με την **απλοποίηση** αλγεβρικών παραστάσεων χρησιμοποιώντας τα πλακίδια. Παραδείγματα περιλαμβάνουν:

- $3x+2x=5x$: Οι μαθητές συνδυάζουν πέντε πλακίδια x για να αναγνωρίσουν το αποτέλεσμα.
- $5x^2-2+6x-3-2x-3x^2= 2x^2+4x-5$: Οι μαθητές κατηγοριοποιούν τα πλακίδια με βάση τη διάστασή τους (x^2, x, σταθεροί όροι), προσθέτοντας και αφαιρώντας τα αντίστοιχα πλακίδια.

Επιμεριστική ιδιότητα και απλοποίηση (ΜΕ-1)

Η επιμεριστική ιδιότητα διδάσκεται μέσω οπτικοποίησης:

- Στην παράσταση (x+2)(x+3), οι μαθητές **οπτικοποιούν το εμβαδόν** ενός **ορθογωνίου**, με όρους όπως x^2,3x, 2x, 6.
- Συνδέουν την οπτική αναπαράσταση με τη συμβολική μορφή:

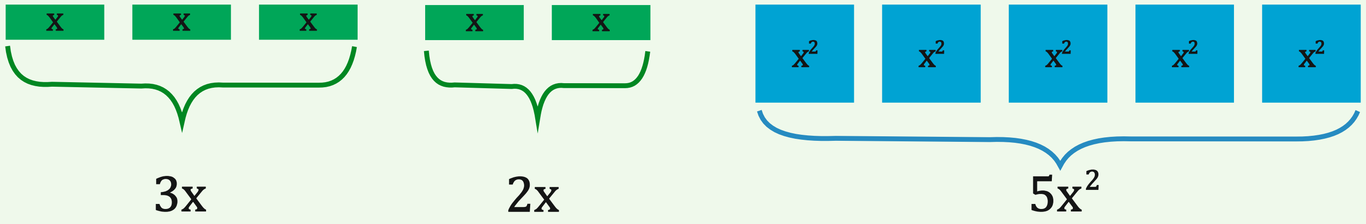
$$(x+2)(x+3)=x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$$

Οι μαθητές συγκρίνουν στρατηγικές και επαληθεύουν τη διαδικασία τους.

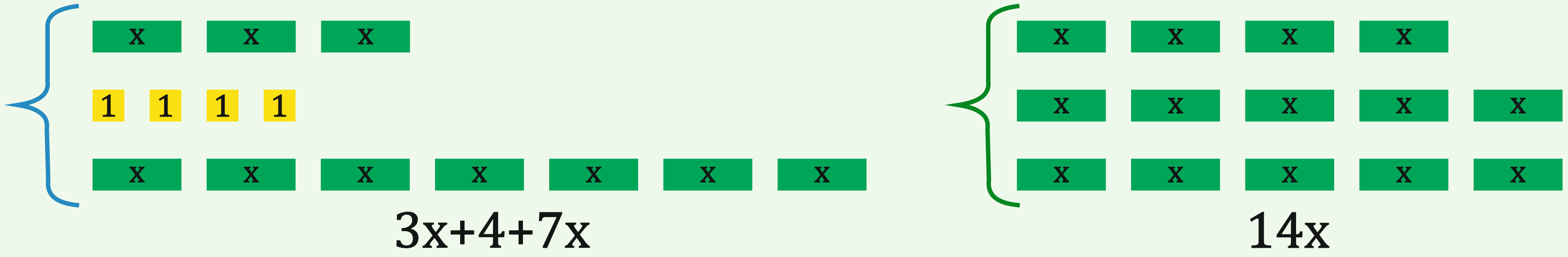
Εντοπισμός και αξιοποίηση λαθών (ΜΕ-1)

Στη συνέχεια, οι μαθητές εξετάζουν **παραδείγματα λαθών**:

- **$3x+2x=5x^2$**: Αναγνωρίζουν ότι οι όροι x και x^2 δεν μπορούν να συνδυαστούν καθώς παριστάνουν διαφορετικές διαστάσεις.



- **$3x+4+7x=14x$**: Διαπιστώνουν ότι ο σταθερός όρος 4 δεν μπορεί να προστεθεί στους όρους με x.



- *Μπορείτε να συνδυάσετε πλακίδια διαφορετικά για την ίδια παράσταση;*
- *Πώς τα πλακίδια σας βοηθούν να διορθώσετε τα λάθη;*

Αλγεβρικά πλακίδια: αλγεβρικές παραστάσεις (ΜΕ-1)

- Τα αλγεβρικά πλακίδια (algebra tiles) αποτελούν ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, **όπως οι πράξεις με αλγεβρικές παραστάσεις, η επίλυση εξισώσεων, η παραγοντοποίηση και η επιμεριστική ιδιότητα** (Kieran, 2007; Kitchens, 1996). Μέσω οπτικών και χειραπτικών προσεγγίσεων, βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν αλγεβρικό συλλογισμό, να αναγνωρίζουν λάθη και να κατανοούν τη λογική πίσω από αλγεβρικές διαδικασίες.
- Η σύνδεση γεωμετρικών και αλγεβρικών παραστάσεων ενισχύει τη μαθηματική σκέψη, μειώνει παρανοήσεις και βελτιώνει την αυτοπεποίθηση, λειτουργώντας ως γέφυρα μεταξύ συγκεκριμένης και συμβολικής σκέψης, ιδίως για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (Κόσυβας, 2008α).

Συμπεράσματα για τα αλγεβρικά πλακίδια (ΜΕ-1)

Η χρήση αλγεβρικών πλακιδίων:

- **Γεφυρώνει Άλγεβρα και Γεωμετρία:** Οι μαθητές αποκτούν οπτική κατανόηση των αφηρημένων εννοιών.
- **Διευκολύνει την απλοποίηση και παραγοντοποίηση:** Μέσω οπτικοποίησης και κατηγοριοποίησης όρων.
- **Ενισχύει την αυτοπεποίθηση:** Δίνοντας στους μαθητές τη δυνατότητα να διορθώνουν λάθη και να αναπτύσσουν αλγεβρικό συλλογισμό.

Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται να αξιοποιήσουν τη δραστηριότητα για:

- **Εφαρμογή συνεργατικής μάθησης:** Με διαμοιρασμό στρατηγικών και συζήτηση.
- **Διάγνωση παρανοήσεων:** Χρησιμοποιώντας τα πλακίδια για να αποκαλύψουν και να διορθώσουν λανθασμένες αντιλήψεις.

Με τα αλγεβρικά πλακίδια, τα μαθηματικά γίνονται πιο προσιτά, κατανοητά και ενδιαφέροντα για τους μαθητές.

Παράδειγμα 2
«Κανονικότητες»

Θεματική Ενότητα: Κανονικότητες – Συναρτήσεις

- **Κανονικότητες (Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου)**
- Η αναζήτηση κανονικοτήτων (και γενικότερα, αναλλοίωτων χαρακτηριστικών και σχέσεων) βρίσκεται **στο κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας.** Η ενασχόληση των μαθητών/-τριών με αυτό το πεδίο μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια **της μαθηματικής σκέψης (διερεύνηση, εικασία, μοντελοποίηση)** και να αποτελέσει ένα σημείο εισαγωγής στις συναρτήσεις και την Άλγεβρα.

Κανονικότητες: αναγνώριση μοτίβων, δημιουργία κανόνων (ΜΕ-2)

- Στο περιβάλλον μπορούμε να αναγνωρίσουμε **ομάδες στοιχείων που ακολουθούν έναν κανόνα** και είναι τοποθετημένα με συγκεκριμένο τρόπο. Τέτοιες **δομές** στις οποίες **οι διαδοχικοί όροι δημιουργούνται από έναν κανόνα** είναι γνωστές ως κανονικότητες.
- Συχνά η κανονικότητα είναι **μία διαδοχή ή μία ακολουθία όρων.**
- **Κάθε στοιχείο** μιας τέτοιας διαδοχής ονομάζεται **όρος της κανονικότητας**. Κάθε όρος έχει μία σειρά στη διαδοχή που δείχνει τη θέση του όρου στην κανονικότητα.
- **Οι κανονικότητες διακρίνονται σε επαναλαμβανόμενες και μεταβαλλόμενες.**
- **Οι κανονικότητες είναι συνδετικός κρίκος ανάμεσα στην Αριθμητική και την Άλγεβρα.**

Οι κανονικότητες είναι η κινητήρια δύναμη των Μαθηματικών

«Στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου συντελούνται οι αρχικές απόπειρες εξερεύνησης, αναγνώρισης, επέκτασης και δημιουργίας ακολουθιών και οι μαθητές αρχίζουν να κάνουν γενικεύσεις και να βρίσκουν μαθηματικές σχέσεις. Πρέπει να βιώσουν ποικίλες εμπειρίες με ακολουθίες με τη βοήθεια συγκεκριμένου υλικού για μια μακρά χρονική περίοδο, προτού προχωρήσουν με πιο αφηρημένο τρόπο στις επόμενες τάξεις. Οι μαθητές πρέπει να έχουν ευκαιρίες ***να παρατηρήσουν μοτίβα σε καθημερινά γεγονότα****, σε μορφές, σε σχέδια και σε σύνολα αριθμών που θα τους ωθήσουν να δουν ότι* ***η κανονικότητες είναι κινητήρια δύναμη των Μαθηματικών****».*

(National Council of Teachers of Mathematics, 1992a, p. 60)

Γεωμετρικά μοτίβα

- Η λέξη “κανονικότητα” αποδίδει το περιεχόμενο του αγγλικού όρου **pattern** και αναφέρεται στον κανόνα που διέπει μια κατάσταση ή ένα φαινόμενο.
- Η εικονιστική κανονικότητα (ή το γεωμετρικό μοτίβο) αναφέρεται στον κανόνα με τον οποίο σχηματίζονται **ακολουθίες εικονιστικών συλλογών** από διακεκριμένα στοιχεία όπως κουκκίδες ή τετραγωνάκια.

Κανονικότητες και Άλγεβρα

Τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη των κανονικοτήτων και της τάξης (Schoenfeld, 1992).

Η διερεύνηση προτύπων, σχέσεων και συναρτήσεων είναι κεντρικό θέμα στην Άλγεβρα (NTCM, 2000)

Ο αλγεβρικός συλλογισμός αποτελείται από μορφές γενίκευσης μαθηματικών ιδεών με αφετηρία ένα σύνολο ειδικών περιπτώσεων. Τα γνωρίσματα αυτά υπερέχουν στις κανονικότητες (Rivera & Becker, 2008).

Γενίκευση

Λόγω των ικανοτήτων ανώτερου επιπέδου που εμπλέκονται στη γενίκευση, όπως αφαίρεση, ολιστική σκέψη, οπτικοποίηση, ευελιξία και συλλογισμός, η γενίκευση είναι ένα γνώρισμα που χαρακτηρίζει τους ικανούς μαθητές και τους διακρίνει από τους άλλους.

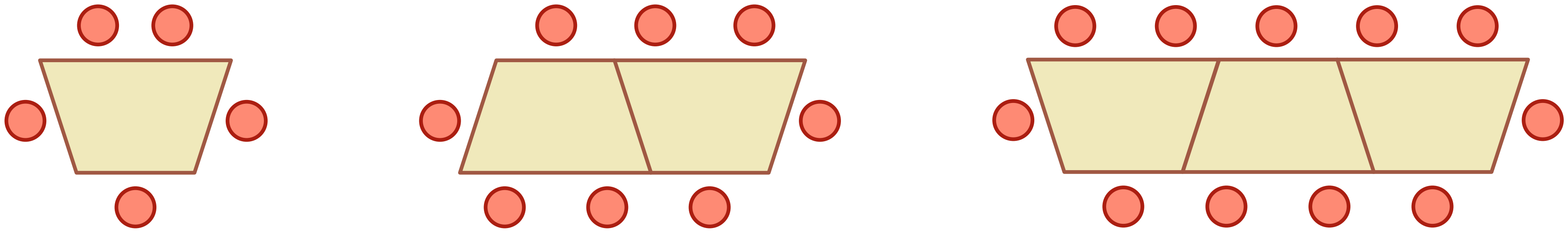
(Greenes 1981, Sriraman 2003, ternberg 1979).

Η έρευνα της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας

- Η ερευνητική συνεισφορά στη διδασκαλία της γραμμικής κανονικότητας (linear pattern) εστιάζει στη γενίκευση αριθμητικών μοτίβων, **τη σύνδεση γεωμετρικών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων και την οπτικοποίηση,** που προάγει τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Radford, 2006; Rivera, 2010; Κόσυβας, 2011α; 2014α). Παράλληλα, **η χρήση τεχνολογικών εργαλείων**, όπως προτείνει ο Kaput (2008), ενισχύει τη μαθηματική σκέψη, διευκολύνοντας την εξερεύνηση και κάνοντας τη μάθηση πιο ουσιαστική.
- Η διερεύνηση της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας, **μέσω συνεργατικής επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων**, αποτελεί το επίκεντρο της διδακτικής διαχείρισης. Οι μαθητές ενθαρρύνονται **να εξετάσουν πολλαπλές προσεγγίσεις**, ανταλλάσσοντας ιδέες, γεγονός που διευρύνει την κατανόησή τους. Ο εκπαιδευτικός, **ως διευκολυντής της διαδικασίας,** υποστηρίζει την αυτονομία των μαθητών και ενθαρρύνει την ενεργητική συμμετοχή τους. Με αυτόν τον τρόπο, η μαθησιακή εμπειρία αποκτά ουσιαστικό περιεχόμενο, ενισχύοντας τη σύνδεση ανάμεσα στη θεωρία και την πρακτική εφαρμογή.

Πρόβλημα για διερεύνηση: γραμμική αριθμητική κανονικότητα (1)

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες. Είσαστε ιδιοκτήτης ή ιδιοκτήτρια εστιατορίου. Διαθέτετε μικρά τραπέζια σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου που χωρούν ένα άτομο στις τρεις πλευρές και δύο στη μεγάλη. Τα τραπέζια μπορούν να ενωθούν μεταξύ τους για να σχηματίσουν μεγαλύτερα. **Το μοτίβο συνεχίζεται και για τους όρους που δεν δίνονται στην εικόνα.**



α) Να σχεδιάσετε τα τραπέζια των δύο επόμενων όρων και να παρατηρήσετε με προσοχή τους διαδοχικούς όρους.

β) Πώς μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των ατόμων που μπορούν να καθίσουν σε 4 τραπέζια; Σε 6 τραπέζια; **Να διατυπώσετε με λόγια** τον κανόνα εύρεσης του επόμενου όρου **αν γνωρίζουμε τον προηγούμενο.**

γ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών. Ποιον κανόνα θα χρησιμοποιήσετε για να τον συμπληρώσετε;

Σειρά του όρου (ν)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Πλήθος των ατόμων										

δ) Πόσα άτομα μπορούν να καθίσουν **σε 100 τραπέζια;**

Πρόβλημα για διερεύνηση: γραμμική αριθμητική κανονικότητα (2)

Εργασία μαθητών κατά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.

ε) Να τοποθετήσετε τα ζεύγη τιμών (ν, y) σε ένα **ορθογώνιο σύστημα αξόνων**. Αν ενώσετε τα σημεία αυτά, τι γραμμή σχηματίζεται.

στ) Να βρείτε έναν **γενικό κανόνα** που συνδέει το πλήθος των ατόμων (y) με τον αριθμό των τραπεζιών (ν). Να ελέγξετε αν ο κανόνας ισχύει και να τον χρησιμοποιήσετε για να βρείτε πόσα άτομα μπορούν να καθίσουν σε 50, 80, 90 τραπέζια;

ζ) Πόσα τραπέζια χρειάζονται για να χωρέσουν 182 καλεσμένοι για έναν γάμο;

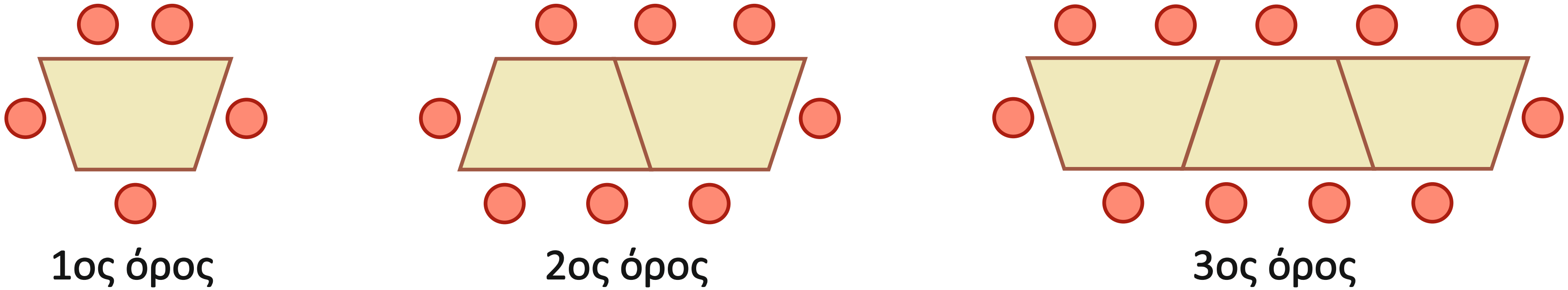
Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Εάν βρήκαμε διαφορετικούς τρόπους, τους εξηγούμε στην ολομέλεια.

Ενδεικτική διαχείριση (τριμερές μοντέλο)-1

Φάση 1: Ατομική κατανόηση (3-7 λεπτά)

Ενώνετε *τραπέζια σχήματος τραπεζίου για να φιλοξενήσετε περισσότερους καλεσμένους. Πόσες θέσεις πελατών προσθέτει κάθε νέο τραπέζι; Πώς μπορείτε να βρείτε τις θέσεις για 100 τραπέζια;*

- *Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβαίνουμε από τον έναν αριθμό θέσεων στον επόμενο;*
- *Πώς θα υπολογίζατε τον αριθμό θέσεων αν υπήρχαν 100 τραπέζια;*



Οι μαθητές καταγράφουν τις πρώτες σκέψεις τους **σε σημειώσεις**, σχεδιάζουν απλά σχήματα ή δημιουργούν έναν πίνακα που δείχνει την αλλαγή στις θέσεις καθώς προστίθενται τραπέζια.

Ενδεικτική διαχείριση (τριμερές μοντέλο)-2

Φάση 2: Συνεργατική διερεύνηση σε μικρές ομάδες (17-23 λεπτά)

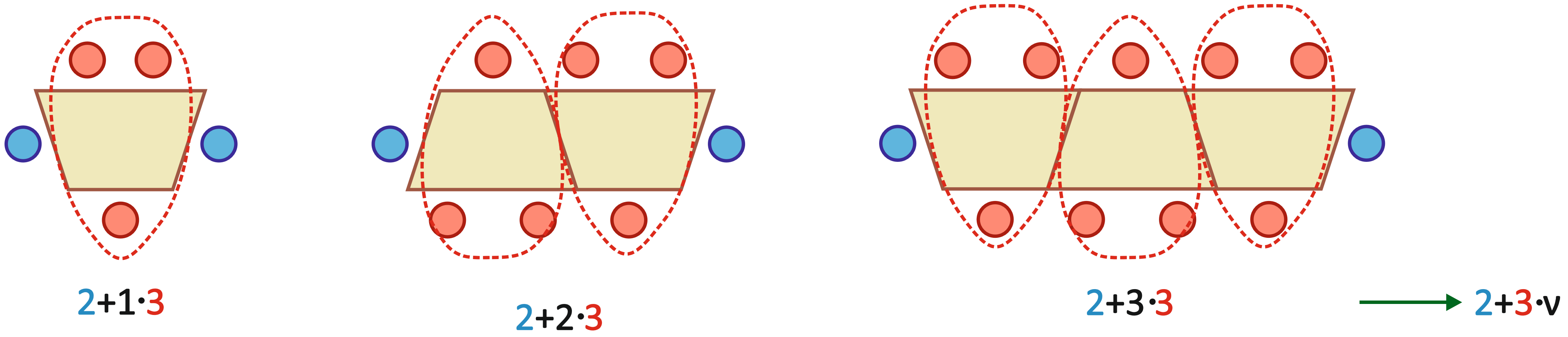
Οι μαθητές συνεργάζονται για να:

- Κατασκευάσουν πίνακα τιμών (π.χ., για ν=1, 2, 3, …, 10 τραπέζια).
- Διατυπώσουν τον **αναδρομικό κανόνα** (π.χ., κάθε νέο τραπέζι προσθέτει 4 θέσεις).
- Γενικεύσουν τη σχέση μέσω ενός **γενικού κανόνα**: $y=3\nu+2$.

Χρησιμοποιούν **ταμπλέτες αφής (tablets) με ψηφιακό πενάκι** για να γράψουν την κοινή λύση τους. Εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιήσουν **χαρτόνια** γράφοντας σε αυτά με μαρκαδόρους μεγάλου μεγέθους (Κόσυβας, 2014γ; Κόσυβας, 2015). Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει διακριτικά χωρίς να δίνει άμεσες απαντήσεις.

Ενδεικτική διαχείριση (Ενδεικτικοί διάλογοι)-2

- **Μαθητής Α:** *Με κάθε νέο τραπέζι προσθέτουμε 3 θέσεις.*
- **Μαθητής Β**: *Οπότε, ο κανόνας για να βρίσκουμε τον επόμενο όρο είναι:* ***προηγούμενος αριθμός + 3.***
- **Μαθητής Γ**: *Ο γενικός κανόνας πρέπει να είναι y=3ν+2. Στο σχέδιο χρωματίζουμε δύο άτομα με μπλε χρώμα. Ο αριθμός 2 είναι σταθερός για όλους τους όρους. Για να περάσουμε από έναν όρο στον επόμενο «κάθε φορά προσθέτουμε 3 άτομα», τα οποία κυκλώνουμε.*



Από το σχέδιο προκύπτει ο γενικός κανόνας: y=3ν+2. Δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε κάθε φορά τον προηγούμενο όρο για να βρίσκουμε τον επόμενο.

Οι μαθητές κάθε ομάδας θα πρέπει να συμφωνήσουν και **ένας εκπρόσωπός τους να εκθέσει τον συλλογικό προβληματισμό στην ολομέλεια.**

Ενδεικτική διαχείριση (τριμερές μοντέλο)-3

Φάση 3: Ανοιχτή «διαμάχη» στην ολομέλεια (17-23 λεπτά)

Οι εκπρόσωποι των ομάδων παρουσιάζουν τις λύσεις τους **στον διαδραστικό πίνακα της τάξης.** Ο εκπαιδευτικός επιλέγει **τη σειρά έκθεσης των στρατηγικών με γνώμονα την ποιότητα του διαλόγου**, **ξεκινώντας ιδανικά με σωστές λύσεις για σταθερή βάση κατανόησης και σταδιακή ανάλυση των λαθών**, ενώ προσαρμόζει τη σειρά ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης και τη φύση του προβλήματος, εστιάζοντας στη σύνδεση μεθόδων και την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης.

Παράδειγμα λανθασμένης λύσης:

- **Μαθητής**: *Κάθε τραπέζι έχει 5 θέσεις, άρα y=5ν.*
- **Άλλος μαθητής**: *Αλλά οι ενδιάμεσες πλευρές ενώνονται, οπότε κάποιες θέσεις χάνονται.*

Ενδεικτική διαχείριση (τριμερές μοντέλο)-3

Ορθή λύση:

- **Μαθητής**: *Ο γενικός κανόνας y=3ν+2 εξηγεί γιατί προσθέτουμε 3 θέσεις σε κάθε τραπέζι και ξεκινάμε από 2+3 θέσεις.*

$$2+3 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{+3} 17 \xrightarrow{+3} 20, \ldots$$

1ος όρος	2ος όρος	3ος όρος	4ος όρος	5ος όρος	6ος όρος	
$2+1\cdot 3$	$2+2\cdot 3$	$2+3\cdot 3$	$2+4\cdot 3$	$2+5\cdot 3$	$2+6\cdot 3$	$\longrightarrow 2+3\cdot\nu$

Πρέπει να βοηθήσουμε όλους τους μαθητές ***να δουν και να σκεφτούν το γενικό μέσα στο ειδικό καθώς αυτοί καταγίνονται με κανονικότητες*** (Wittmann, 2007).

Συζήτηση και Αναστοχασμός

Ο εκπαιδευτικός συνοψίζει τη διαδικασία, αναδεικνύοντας τις διαφορές αναδρομικού και γενικού κανόνα:

- Ο **αναδρομικός κανόνας** είναι χρήσιμος για μικρές τιμές.
- Ο **γενικός κανόνας** παρέχει άμεσες απαντήσεις για μεγάλες τιμές.

Ο γενικός κανόνας y=3ν+2 αναλύεται ως εξής:

1. **Ο όρος 3ν:** Εκφράζει τη σταθερή αύξηση των θέσεων, με 3 επιπλέον θέσεις για κάθε νέο τραπέζι. Αυτή η σταθερότητα δείχνει τη γραμμική φύση της σχέσης.
2. **Ο όρος +2:** Παριστάνει τις 2 αρχικές θέσεις που υπάρχουν πριν προστεθούν νέα τραπέζια. Είναι σταθερός και δεν εξαρτάται από τον αριθμό των τραπεζιών.

Συνολικά: Ο κανόνας y=3ν+2 συνδυάζει τη σταθερή γραμμική αύξηση (3ν) με την αρχική τιμή (+2), περιγράφοντας πλήρως τον συνολικό αριθμό θέσεων.

Ερωτήσεις αναστοχασμού:

- *Ποια είναι η διαφορά μεταξύ αναδρομικού και γενικού κανόνα;*
- *Πώς ο πίνακας τιμών σάς βοήθησε να βρείτε τον κανόνα;*
- *Μπορείτε να διατυπώσετε εναλλακτικούς γενικούς κανόνες εκτός από τον y=3ν+2; Πώς αιτιολογείτε την ισοδυναμία τους και τι αυτή αποκαλύπτει για τη φύση της γραμμικής σχέσης;*

Με αυτή τη διδακτική προσέγγιση, οι μαθητές διατυπώνουν, διερευνούν και εξευρίσκουν πολλαπλούς κανόνες, αξιοποιώντας τα λάθη για εμβάθυνση (Κόσυβας, 2022α). Μέσω της μετάβασης από τη συγκεκριμένη στην αφηρημένη κατανόηση, αναπτύσσουν αιτιολογημένη σκέψη, **ανταλλάσσουν αριθμητικά, οπτικά και αλγεβρικά επιχειρήματα** και συνεργάζονται για κοινές λύσεις. Ο εκπαιδευτικός διευκολύνει τη μαθηματική συζήτηση, καλλιεργώντας ένα ασφαλές και συμμετοχικό περιβάλλον μάθησης.

4

Συμπεράσματα, στρατηγικές διδασκαλίας της Άλγεβρας με το νέο ΠΣ

Προτεινόμενες στρατηγικές διδασκαλίας:

- Στρατηγικές Αντιμετώπισης Δυσκολιών στην Άλγεβρα Η διδασκαλία της Άλγεβρας απαιτεί τη χρήση στρατηγικών που αποσκοπούν στην αντιμετώπιση των δυσκολιών που σχετίζονται με τη γλώσσα, τους πολλαπλούς ρόλους του γράμματος και τη μετάφραση μεταξύ αναπαραστάσεων.
- **Οι κύριες στρατηγικές περιλαμβάνουν**: Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων: Παρουσίαση των αλγεβρικών εννοιών μέσα από αλγεβρικές, γραφικές, λεκτικές και πίνακες τιμών, ώστε να διευκολυνθεί η σύνδεση μεταξύ τους (Watson et al., 2013; Huntley et al., 2007).
- **Σύνδεση με την καθημερινή ζωή**: Εφαρμογή των αλγεβρικών εννοιών σε προβλήματα πραγματικού κόσμου για τη νοηματοδότησή τους (van de Walle et al., 2018).
- **Ενίσχυση της σημασίας των συμβόλων**: Σύνδεση των συμβόλων με τις έννοιες που εκφράζουν, μέσω δραστηριοτήτων που συνδυάζουν διαφορετικές μορφές αναπαράστασης (Sfard, 2008; Drijvers, 2010).
- **Χρήση τεχνολογίας**: Ενσωμάτωση ψηφιακών εργαλείων που διευκολύνουν τη δυναμική εξερεύνηση αλγεβρικών σχέσεων (Drijvers, 2010).
- **Συνεργατικές δραστηριότητες**: Ομαδική εργασία και συζήτηση για την εμβάθυνση στην κατανόηση των αλγεβρικών σχέσεων (Sfard, 2008).

Η εφαρμογή αυτών των στρατηγικών βοηθά τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις, ενισχύοντας τη μαθηματική τους σκέψη και την ουσιαστική κατανόηση της Άλγεβρας.

Συμπέρασμα: Η Άλγεβρα στο νέο ΠΣ Μαθηματικών

- Τα αποτελέσματα του PISA 2022 ανέδειξαν την ανάγκη για ανασχεδιασμό της μαθηματικής διδασκαλίας, με στόχο την αντιμετώπιση των δυσκολιών και την ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης. Το νέο ΠΣ Μαθηματικών **μετατοπίζει το βάρος από τους τυπικούς χειρισμούς και τη μηχανιστική εξάσκηση στη βαθύτερη κατανόηση**, προωθώντας πολυδιάστατες προσεγγίσεις.
- Η Άλγεβρα αντιμετωπίζεται πλέον ως εργαλείο αναπαράστασης, ανάλυσης και σύνδεσης μαθηματικών εννοιών με πραγματικά προβλήματα. Μέσα από τη χρήση εργαλείων και προσεγγίσεων, όπως τα **αλγεβρικά πλακίδια** (οπτικοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων), οι **κανονικότητες** (μελέτη μοτίβων και κανόνων), η **συμμεταβολή** (αναπαράσταση σχέσεων) και η **γραφική παράσταση συναρτήσεων**, οι μαθητές αποκτούν ευελιξία στη σκέψη και την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών.
- Το νέο ΠΣ προάγει τη μαθηματική σκέψη ως κεντρική δεξιότητα, ενθαρρύνοντας τη δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων που ενισχύουν τη λογική σκέψη, την ενεργητική εμπλοκή και την επίλυση προβλημάτων. Αυτή η προσέγγιση καλεί τους εκπαιδευτικούς να ενσωματώσουν σύγχρονες πρακτικές, συνδέοντας τη θεωρία με την πράξη.
- Η υιοθέτηση αυτών των καινοτόμων προσεγγίσεων θέτει τις βάσεις για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων που όχι μόνο θα βελτιώσουν τις επιδόσεις των μαθητών, αλλά και θα τους προετοιμάσουν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του 21ου αιώνα.

Βιβλιογραφία

Booth, L. R. (1984). Misconceptions in algebra. Teaching Mathematics and Its Applications, 3(2), 79–92.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *In A. F. Coxford (Ed.), The ideas of algebra, K-12 (pp. 20-32). Reston, VA: NCTM.*

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Drijvers, P. (Ed.). (2010). *Secondary algebra education*. Sense Publishers.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics, 27(1), 59–78.

Kaput, J. J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions, and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 265–281.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. *In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390-419). New York: Macmillan.*

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Information Age Publishing.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. Journal for Research in Mathematics Education, 37(4), 297–312.

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouverts : notion, catégories et difficultés. *Annales de Didactique et des Sciences cognitives*, *15*, IREM de Strasbourg, 43-71.

Kosyvas, G. (2013). Pratiques pédagogiques de problèmes ouverts dans un collège expérimental à Athènes. *Repères-IREM*, *91*, 25-50.

Kosyvas, G. (2016). Levels of arithmetic reasoning in solving an open-ended problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(3), 356–372.

Kosyvas, G., & Glinou, A. (2023). Collaborative learning and problem-solving practices in the instruction of mathematics in secondary education. In G. Kosyvas (Ed.), *The Connect Approach Handbook: A Handbook on the implementation of the Flipped Classroom Approach in Secondary Education (Gymnasium) in the context of Mathematics, Physics and Foreign Language* (pp. 30–35). Athens: Regional Directorate for Primary and Secondary Education of Attica (e-book).

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Radford, L. (2006). The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic generalization. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 107–129.

Rivera, F. (2010). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding pattern generalization. *Mathematics Education Research Journal, 22*(1), 5–25.

Sakonidis, C., Potari, D., & Zachariades, T. (2022). Meeting the challenges of re-designing two mathematics curricula reforms in uncertain times. *Research in Mathematics Education*, *24*(2), 150–169.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge University Press.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 421–456). Reston, VA: NCTM.*

van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2018). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (10th ed.). Pearson.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics*. Oxford University Press.

Βιβλιογραφία

Βερύκιος, Π. (2011). Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών εννοιών της Σχολικής Άλγεβρας σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος. Στο: *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών* (σσ. 9-50). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Κόσυβας, Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο.* Αθήνα: Gutenberg.

Κόσυβας, Γ. (2008α). Επιμεριστική ιδιότητα και εκπληκτικές κανονικότητες. *Ευκλείδης Α΄, 70*, 11-14. Αθήνα: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2008β). Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη. *Πρακτικά του 25ου Συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 434-448). Βόλος: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2011). Η άτυπη μοντελοποίηση του προβλήματος των χειραψιών. *Πρακτικά 28ου Συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 281-306). Αθήνα: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2014α). Ομαδοσυνεργατική επίλυση ανοιχτών προβλημάτων στο δημοτικό σχολείο σε τέσσερις φάσεις: ατομική και συνεργατική έρευνα, μαθηματική συζήτηση και συγκεφαλαίωση. *Επιστημονικό Βήμα, ΙΠΕΜ-ΔΟΕ, 18*, 127-159.

Κόσυβας, Γ. (2014β). Εμπλοκή των μαθητών σε ένα πρόβλημα εικονιστικής κανονικότητας για την εισαγωγή στην άλγεβρα. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών–Επιστημονικών Θεμάτων, 3*, 31-53.

Κόσυβας, Γ. (2015). Τα «Χαρτόνια Εργασίας» των μαθητών ως μέσον για την ομαδοσυνεργατική επίλυση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις. *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου της ΠΑΠΕΔΕ* (ειδικό τεύχος). *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών–Επιστημονικών Θεμάτων, 4*, 228-235.

Κόσυβας, Γ. (2022α). Οι αριθμητικές κανονικότητες στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του Γυμνασίου: ένα θαυμάσιο μέσον γενίκευσης και εισαγωγής στην Άλγεβρα. *Ευκλείδης Α΄, 123*(3), 6-11. Αθήνα: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2022β). Μαθηματική πολυτροπικότητα σε πολυπολιτισμικές τάξεις της δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης με μαθητές πρόσφυγες/μετανάστες. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών–Επιστημονικών Θεμάτων, 24*, 4-20.

Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου* (2η έκδοση). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.