Διδασκαλία στην επίλυση προβλήματος

Βαλάντης Βερύκιος

1ο ΓΕΛ Υμηττού

Γενικά στοιχεία

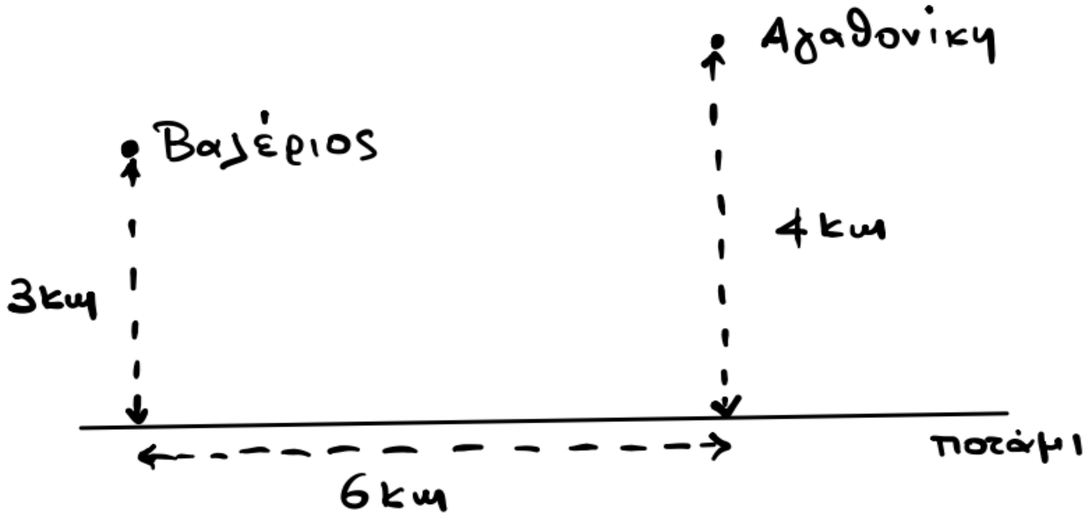
- Μαθητές : οι μαθητές ενός τμήματος θετικού προσανατολισμού Β τάξης.
- Χώρος : αίθουσα μαθηματικών του σχολείου (διαμορφωμένη για εργασία των μαθητών σε ομάδες, υπάρχει διαδραστικός πίνακας)
- Χρόνος - Διάρκεια : Οκτώβριος 2024, διάρκεια 2 ωρών.
- Μέθοδος διδασκαλίας : ομαδοσυνεργατική, 4 πενταμελείς ομάδες μαθητών.

Στόχοι της διδασκαλίας

- Οι μαθητές να “μεταφράσουν” τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός προβλήματος σε μαθηματική γλώσσα (μοντελοποίηση).
- Οι μαθητές να ανακαλέσουν και να χρησιμοποιήσουν συνδυαστικά γνώσεις από την άλγεβρα και τη γεωμετρία που έχουν διδαχθεί.
- Οι μαθητές να αξιοποιήσουν δυνατότητες για πειραματισμό και διερεύνηση που τους δίνει το λογισμικό Geogebra.

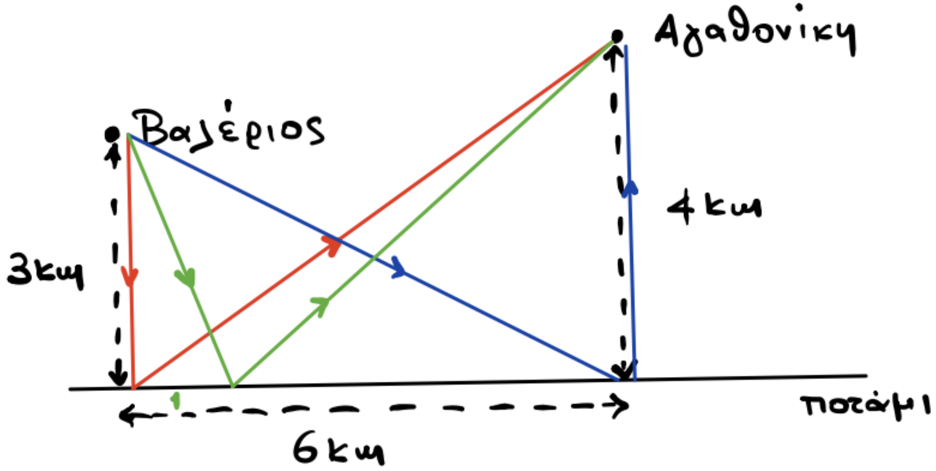
Φάση 1 (πρώτες ενέργειες)

- Διατύπωση του προβλήματος : “Η αγελάδα Αγαθονίκη βόσκει αμέριμνη στο λιβάδι 4 χιλιόμετρα βόρεια από το ποτάμι. Κάποια στιγμή σκοντάφτει και χτυπάει στο πόδι. Ακινητοποιημένη μουγκανίζει απελπισμένα για λίγο νερό. Ο νεαρός βοσκός Βαλέριος βρίσκεται 6 χιλιόμετρα δυτικά της Αγαθονίκης και 3 χιλιόμετρα βόρεια από το ποτάμι. Μαθαίνει το ατύχημα και θέλει να της φέρει όσο το δυνατόν γρηγορότερα νερό από το ποτάμι. Μπορείτε να προτείνετε στον Βαλέριο μια κατάλληλη διαδρομή;”
- Πρόχειρο σχήμα στον πίνακα :



Φάση 1 (πρώτες ενέργειες)

- Οι μαθητές συζητούν στις ομάδες το πρόβλημα και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι χρειάζεται να εντοπίσουν τη διαδρομή με το ελάχιστο μήκος.
- Πειραματίζονται με απλές διαδρομές και προσπαθούν να συγκρίνουν τα μήκη των διαδρομών αυτών.



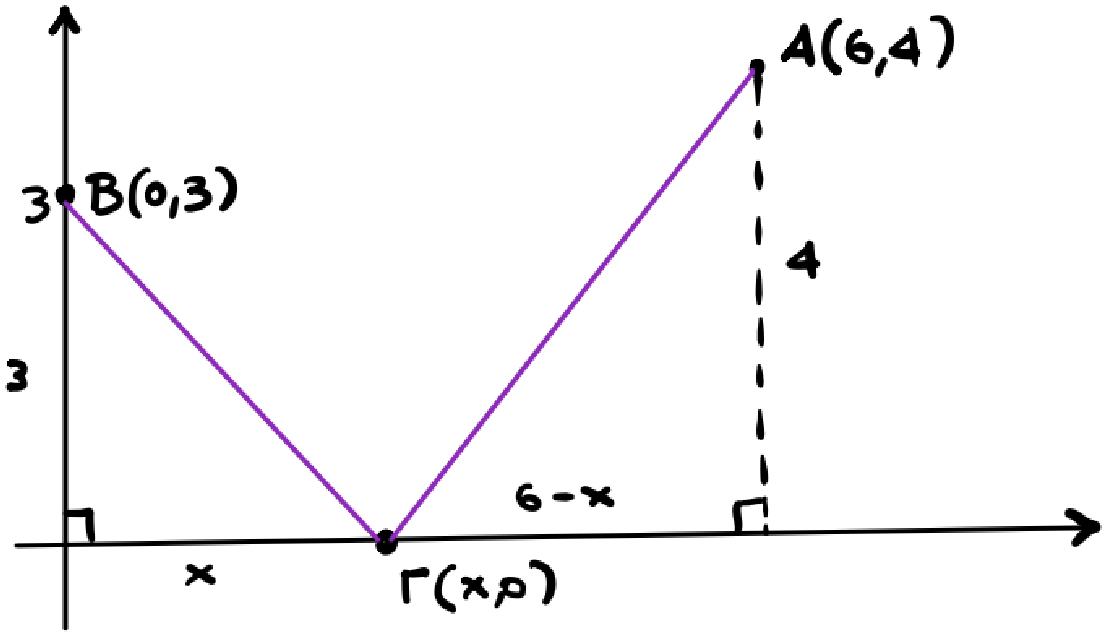
— : $3+\sqrt{6^2+4^2} = 3+2\sqrt{13}$

— : $\sqrt{3^2+6^2}+4 = 4+3\sqrt{5}$

— : $\sqrt{3^2+1^2}+\sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{10}+\sqrt{41}$

Φάση 2 (Μοντελοποίηση)

- Εισαγωγή συστήματος συντεταγμένων:

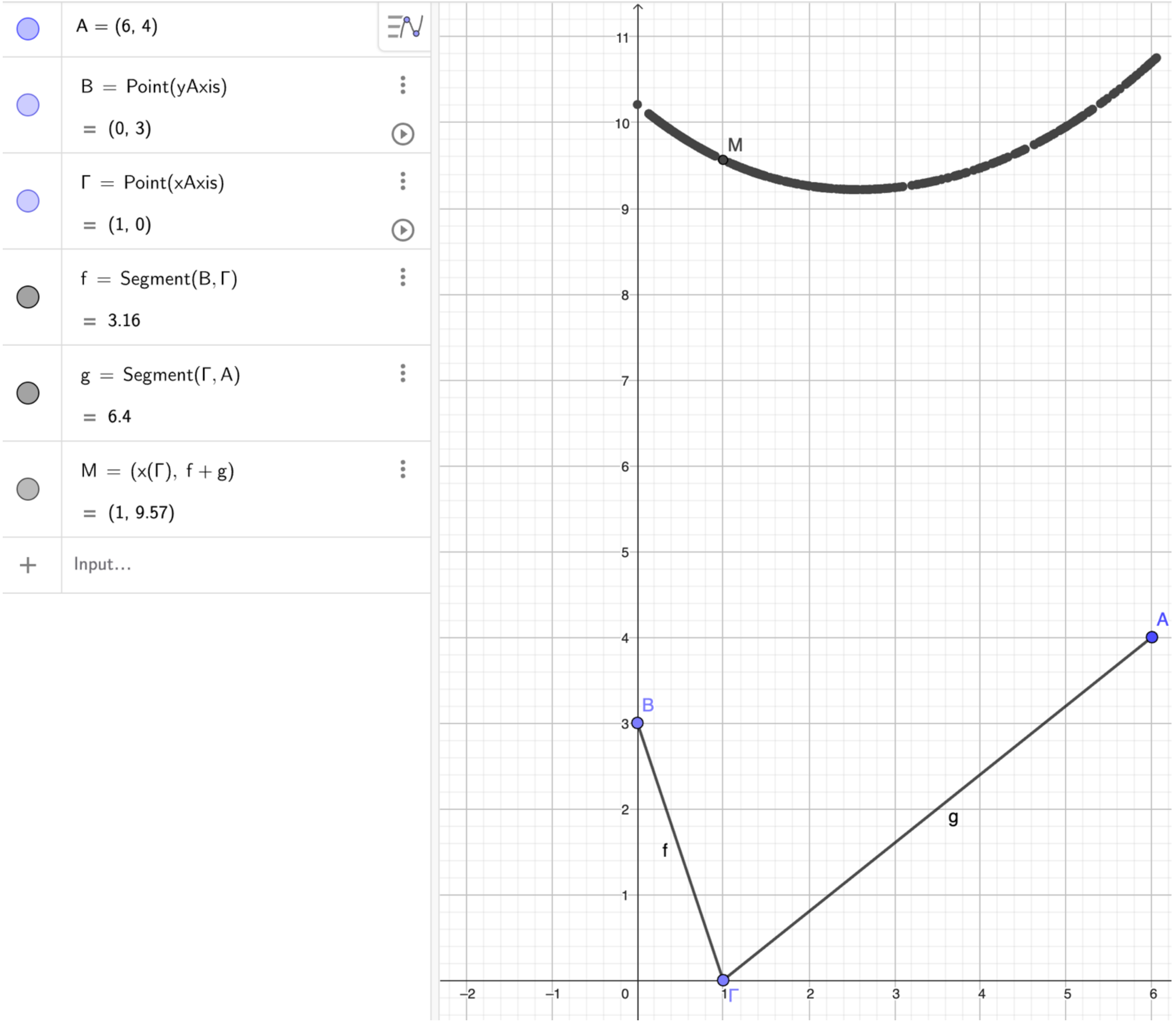


Φάση 2 (Μοντελοποίηση)

- Οι μαθητές ανακαλούν γνώσεις που αφορούν την απόσταση σημείων στο επίπεδο
- 3 από τις 4 ομάδες δίνουν σωστά τον τύπο για το μήκος της τυχαίας διαδρομής: $\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(6-x)^2+16}$
- Οι μαθητές εντοπίζουν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το $x\quad : 0 \leq x \leq 6$
- Οι μαθητές διαπιστώνουν ότι δεν έχουν τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία για να εντοπίσουν την κατάλληλη τιμή του x που ελαχιστοποιεί την παραπάνω παράσταση

Φάση 3 (Ψηφιακά μέσα–προσεγγιστική λύση)

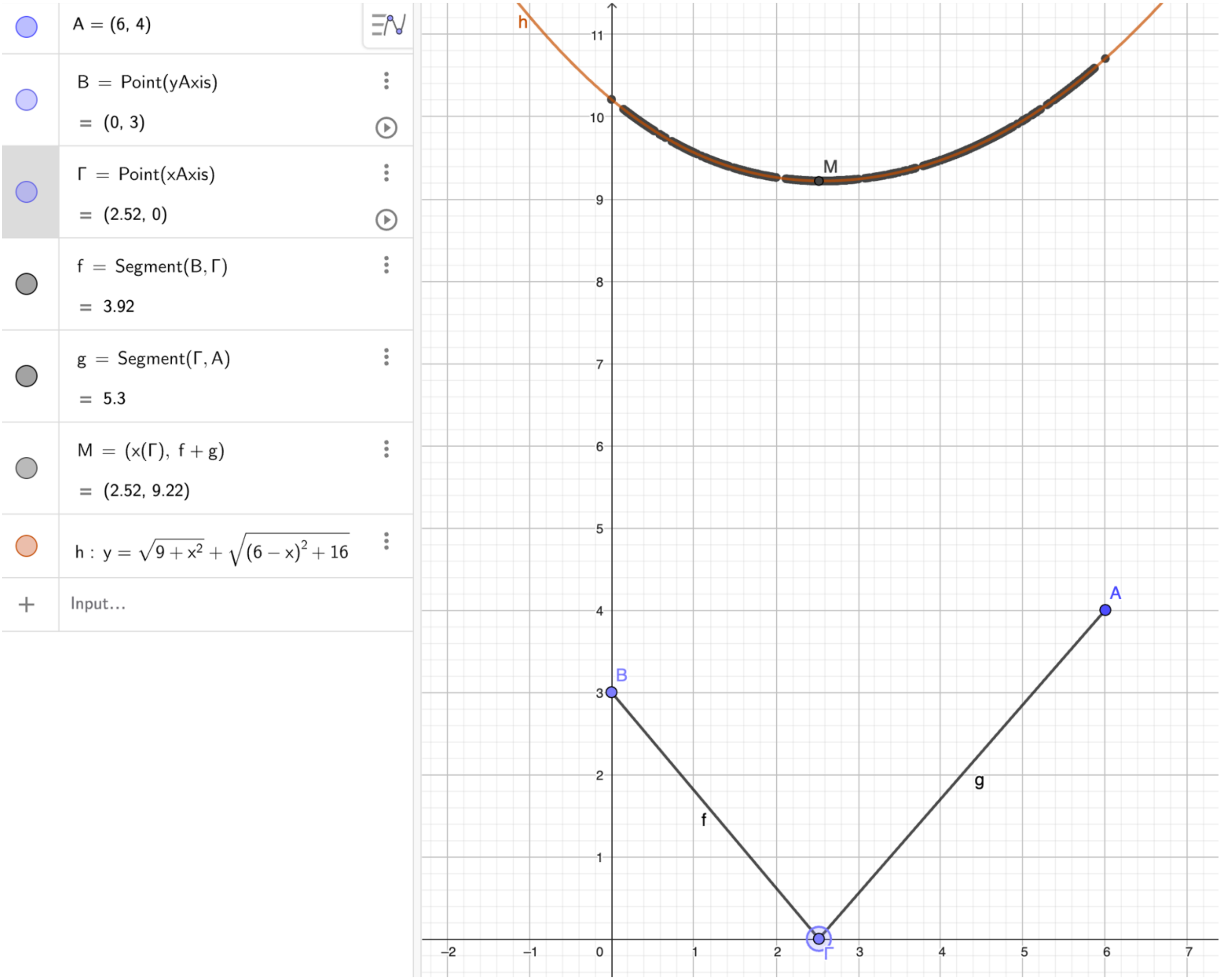
- Στο διαδραστικό πίνακα, σε ένα αρχείο Geogebra καταγράφεται δυναμικά το μήκος της διαδρομής για κάθε x και στη συνέχεια δημιουργείται σημείο Μ με τετμημένη το x και τεταγμένη το αντίστοιχο μήκος διαδρομής. Το σημείο Μ με ίχνος ενεργό διαγράφει μια καμπύλη.



Φάση 3 (Ψηφιακά μέσα –προσεγγιστική λύση)

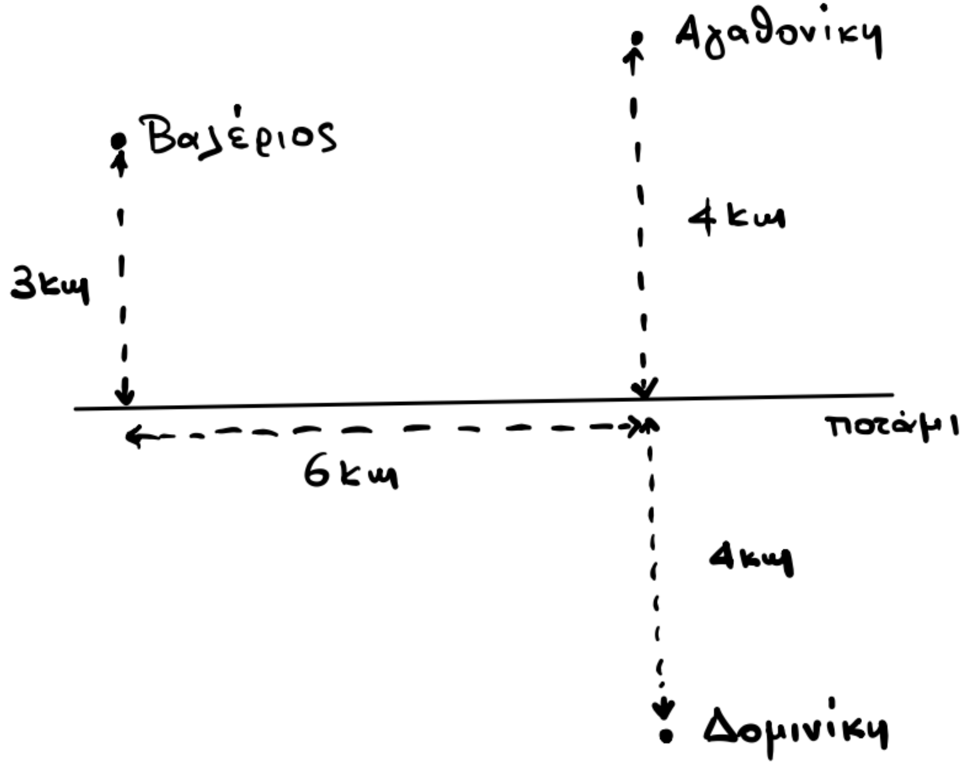
- Οι μαθητές πειραματίζονται με την τιμή του x για να εντοπίσουν το ελάχιστο μήκος διαδρομής
- Αναγνωρίζουν την καμπύλη που διαγράφει το σημείο Μ ως τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που είχαν βρει στη φάση της μοντελοποίησης.
- Σχεδιάζουν στο λογισμικό τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathrm{f(x)} = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{(6 - x)^2 + 16}$ και διαπιστώνουν ότι ταυτίζεται με την καμπύλη που διαγράφει το Μ
- Διαπιστώνουν ότι η τιμή του x που αναζητούν είναι αυτή στην οποία επιτυγχάνεται το ελάχιστο της συνάρτησης και δίνουν μια προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα.

Φάση 3 (Ψηφιακά μέσα –προσεγγιστική λύση)



Φάση 4 (ακριβής λύση)

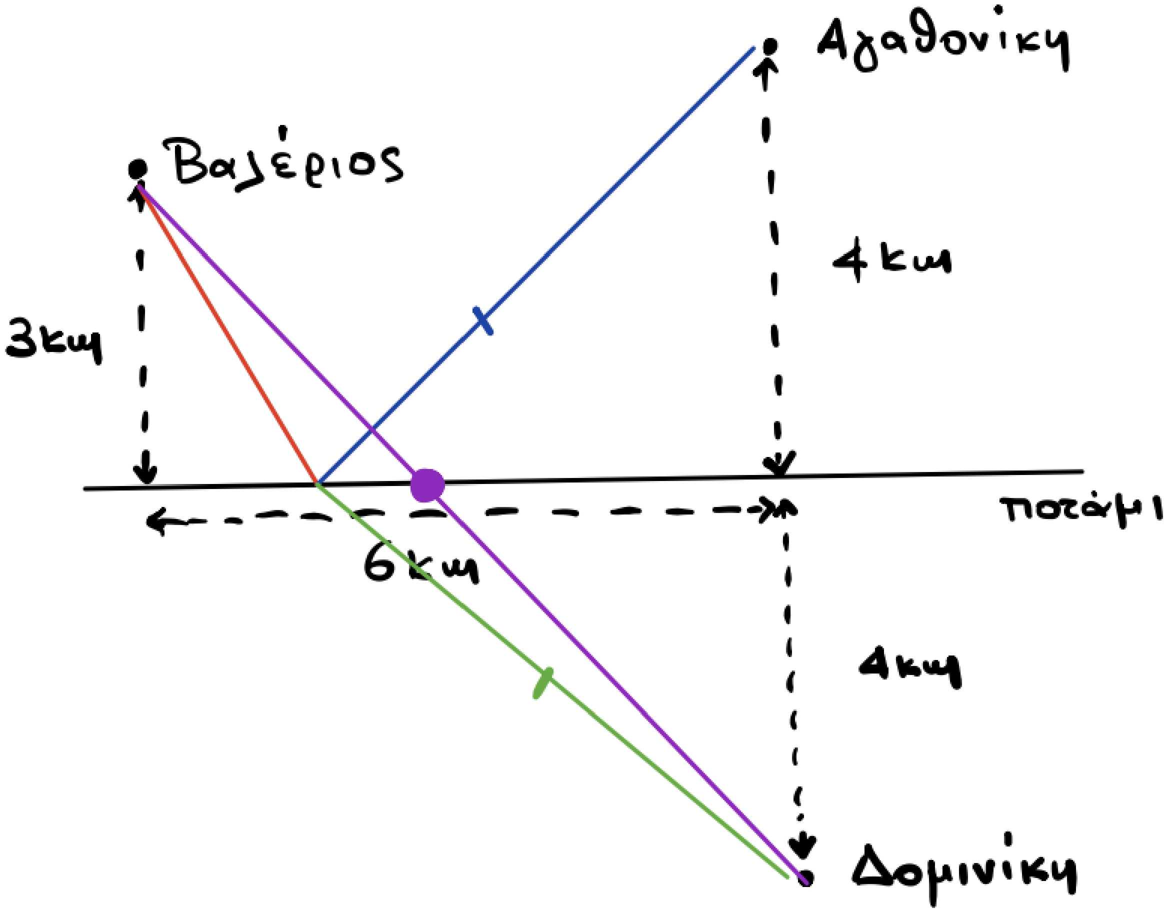
- Στους μαθητές δίνεται η επόμενη προσθήκη στην εκφώνηση : “Η ξαδέρφη της Αγαθονίκης, Δομινίκη, βρίσκεται στην απέναντι πλευρά του ποταμού επίσης 4 χιλιόμετρα μακριά από το ποτάμι και μασουλάει αμέριμνη ”
- Πρόχειρο σχήμα στον πίνακα :



Φάση 4 (ακριβής λύση)

- Μετά από σχετική συζήτηση μια από τις ομάδες των μαθητών διαπιστώνει (και ανακοινώνει στην ολομέλεια) ότι για όποιο σημείο στο ποτάμι κι αν επιλέξει ο βοσκός να πάρει νερό η απόσταση που θα διανύσει μέχρι την Αγαθονίκη είναι ίδια με την απόσταση που θα διανύσει μέχρι τη Δομινίκη
- Οι ομάδες διαπιστώνουν ότι αρκεί να λύσουν το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της διαδρομής μέχρι τη Δομινίκη
- Οι μαθητές ανακαλούν την τριγωνική ανισότητα για να επιχειρηματολογήσουν ότι η συντομότερη διαδρομή είναι η ευθεία γραμμή προς τη Δομινίκη. Εντοπίζουν γεωμετρικά το επιθυμητό σημείο στο ποτάμι.

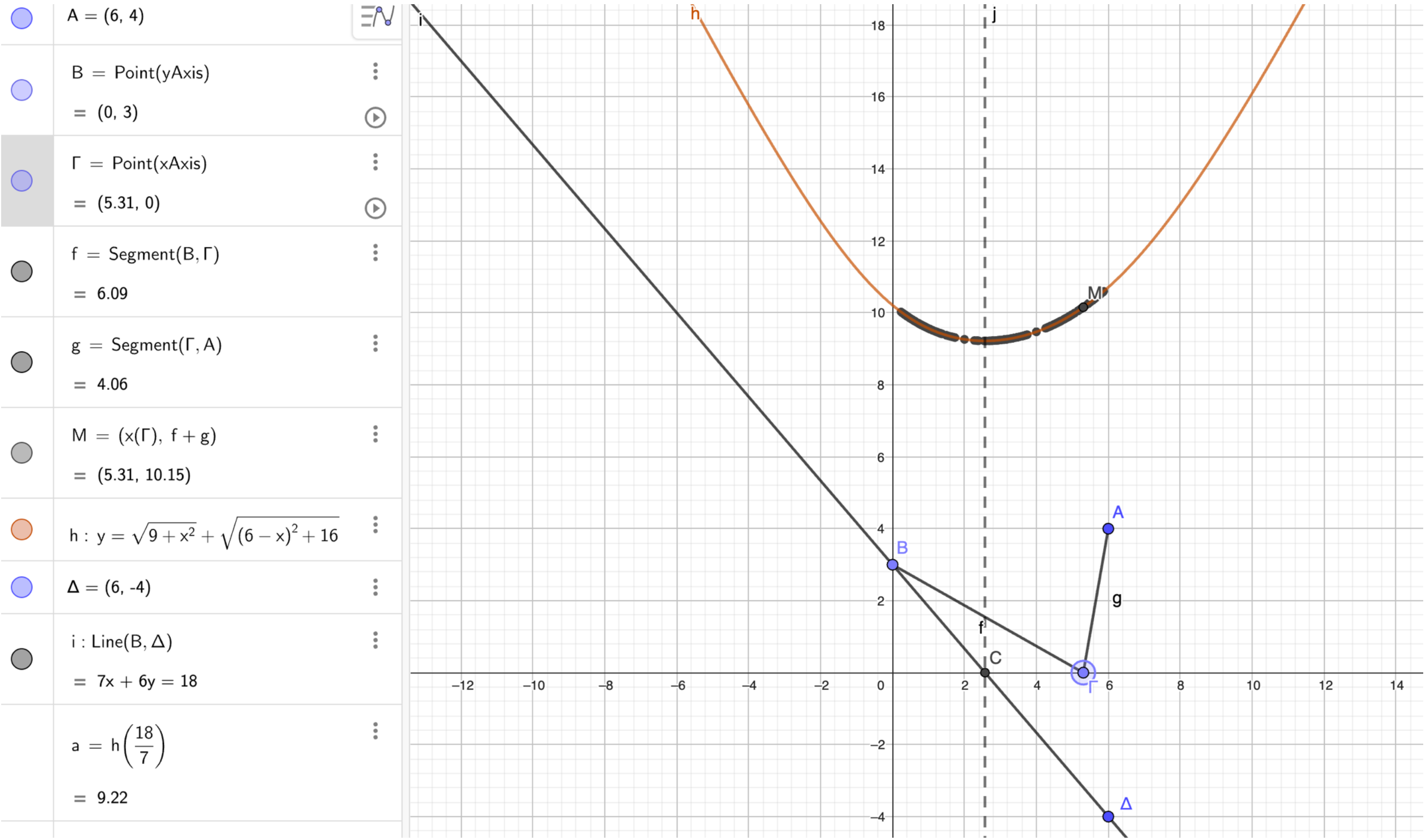
Φάση 4 (ακριβής λύση)



Φάση 4 (ακριβής λύση)

- Ο καθηγητής ζητά την ακριβή τιμή του x που ελαχιστοποιεί το μήκος της διαδρομής.
- Οι μαθητές επιστρέφουν στο σύστημα συντεταγμένων, τοποθετούν το σημείο που αφορά τη Δομινίκη και βρίσκουν την εξίσωση της ευθείας που συνδέει το βοσκό με τη Δομινίκη.
- Υπολογίζουν το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $x'x$ και δίνουν την απάντηση $x = \frac{18}{7}$
- Στο αρχείο Geogebra εντοπίζουν το σημείο με συντεταγμένες $(\frac{18}{7}, f(\frac{18}{7}))$ και διαπιστώνουν ότι είναι το χαμηλότερο σημείο της καμπύλης που διαγράφει το Μ

Φάση 4 (ακριβής λύση)



Συμπεράσματα

- Οι μαθητές ενεπλάκησαν με δύο είδη μοντελοποίησης:
- Αλγεβρικά προσδιόρισαν την παράσταση που δίνει το μήκος της διαδρομής και μετάφρασαν το ζητούμενο του προβλήματος ως τον υπολογισμό της τιμής του x που η παράσταση επιτυγχάνει το ελάχιστο.
- Στο περιβάλλον του Geogebra μετέφρασαν το ζητούμενο ως την εύρεση του χαμηλότερου σημείου στην καμπύλη που διαγράφει το Μ.
- Οι δύο προσεγγίσεις των μαθητών συνδέθηκαν άρρηκτα όταν διαπίστωσαν ότι η καμπύλη που διαγράφει το Μ ταυτίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο την παράσταση που υπολόγισαν αρχικά.

Συμπεράσματα

- Οι μαθητές ανακάλεσαν και συνδύασαν γνώσεις που έχουν διδαχθεί στα μαθήματα της άλγεβρας και της γεωμετρίας
- Από την άλγεβρα: γραφική παράσταση συνάρτησης, πεδίο ορισμού, εξίσωση ευθείας.
- Από τη γεωμετρία: Πυθαγόρειο θεώρημα, Τριγωνική ανισότητα.
- Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να μελετήσουν το πρόβλημα με εναλλακτικές οπτικές που τους έδωσαν πρώτα μια προσεγγιστική και μετά μια ακριβή λύση.

Συμπεράσματα

Το ψηφιακό περιβάλλον έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές :

- Να πειραματιστούν με πολύ περισσότερες διαδρομές.
- Να έχουν μια μοντελοποίηση του προβλήματος μέσω μιας γραφικής παράστασης
- Να διαπιστώσουν ότι οι δύο προσεγγίσεις, η αλγεβρική και η γραφική συνδέονται.
- Να βρουν μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος.
- Να επιβεβαιώσουν την ακριβή λύση που βρήκαν στην τελευταία φάση.